

アンサンブルの均質化と時間相関

九大理 藤坂博一、柴田博史

少数自由度系カオスによる時間発展の解析では、一般化次元 D_q や $f(\alpha)$ スペクトルによるマルチフラクタル解析が知られており、実験の解析によく用いられるようになった。 D_q や $f(\alpha)$ が鈍感な量であるために、解析方法が複雑なわりにはカオス運動の多様性を十分に記述し得ていないように思われる。例えば、カオス振動の特性振動数等の動的特性量については何の情報も与えないし、ストレンジアトラクターの形成過程に関しては何も知ることはできない。カオス揺らぎの直接的なダイナミックスを扱うことが要求されているように思う。

我々は、ここ数年、定常な時間揺らぎ $\{u(s)\}$ の新しい解析方法として、揺らぎスペクトル法を提案して来た¹⁾。この方法では、大きな時間領域 t にわたる平均

$$\alpha_t \equiv t^{-1} \int_0^t u(s) ds$$

の揺らぎの確率分布 $\rho_t(\alpha)$ が漸近的に、

$$\rho_t(\alpha) \sim \exp[-\sigma(\alpha)t]$$

と書けることを仮定して、この $\sigma(\alpha)$ (揺らぎスペクトル) およびそれに関連した諸量を求めることを目的とする。

特性量 $M_q(t) \equiv \langle \exp(q\alpha_t) \rangle$ ($\langle \cdots \rangle$ はアンサンブル平均) を定義すると、これは大きな t に対して、

$$M_q(t) \sim \exp[\phi(q)t]$$

と書け、

$$\phi(q) = - \min_{\alpha} [\sigma(\alpha) - q\alpha]$$

の関係がある。この方法は、主に、カオス系を中心に適用され、相転移点近傍での種々のスケーリング則が見いだされている。²⁾ 揺らぎスペクトル法に特徴的なことは、揺らぎの平均の多値性を記述する為に、フィルタリングパラメータと呼ぶパラメータ q が現われることである。 q は時間揺らぎの種々の平均値を抜き出すパラメータであるといえる。

一方、時間揺らぎを特徴づけるのに有用な量として、相関があるが上の方法では時間相関を陽わに取り出すことはできない。この意味で、揺らぎスペクトル法だけでは揺らぎのオーバーオールな特性をとらえきれていないことがわかる。平均の多値性に対応して、時間相関にも種々の側面（多様性）があると仮定し、更に、それはパラメータ q によって記述されるとしよう。パラメータ q と揺らぎのパワースペクトルと両立する量として、

$$\begin{aligned} I_q(\omega) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle F_t(\omega) \delta(\alpha_t - \alpha(q)) \rangle / \rho_t(\alpha(q)) \\ &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle F_t(\omega); \alpha(q) \rangle_t \end{aligned} \quad (1)$$

を定義する。³⁾ ただし、

$$F_t(\omega) \equiv t^{-1} \left| \int_0^t u(s) e^{-i\omega s} ds \right|^2$$

は、時間幅 t にわたる揺らぎのパワースペクトルである。すなわち、 $I_q(\omega)$ (q 次パワースペクトルと呼ぶ) は、時間幅 t の平均値が $\alpha(q)$ ($\equiv d\phi(q)/dq$) の値を持つ領域についてのパワースペクトルであり、フィルタリングパラメータが q なる値に対応する特徴的な振動形態を抜き出すものである。一方、これは

$$\begin{aligned} I_q(\omega) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \langle F_t(\omega) \exp(q t \alpha_t) \rangle / M_q(t) \\ &\equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \langle F_t(\omega); q \rangle_t \end{aligned} \quad (2)$$

と書ける。平衡統計力学との対応で言えば、(1) はミクロカノニカル分布についての平均であり、(2) はカノニカル分布についての平均である。それぞれ、ミクロカノニカル平均、カノニカル平均と呼ぶことにする。

このように定義した q 次パワースペクトルの解釈にふれておく。パラメータ q は種々の平均値を抜き出す役割をするが、 q の値が異なると、その時間幅での運動形態は一般に異なるはずである。(熱力学との対応で言えば、 β (逆温度) の大小によって、熱力学体系の空間的に離れた二点間のエネルギー密度の相関の様子が異なることを意味する。)

従って、特性振動数、揺らぎの減衰率、すなわち、パワースペクトルに q 依存性が生ずることになる。特に、 $q=0$ のパワースペクトル $I_0(\omega)$ は通常のパワースペクトル $I(\omega)$ と一致する。すなわち、通常のパワースペクトルは $q=0$ に対応する運動形態の特徴を記述する。従って、 $q \neq 0$ (特に、大きな $|q|$) の運動形態は、通常のパワースペクトルでは全く記述できないことがわかる。 $I_q(\omega)$ の q 依存性は、二時間相関に還元できない多時間相関の効果であり、上述のようにアンサンブルの均質化を行なうことにより、この効果を (q, ω) で特徴づけることが可能であるということの意味する。特別な場合として、 $\{u(s)\}$ がガウシアンであればすべての多時間相関は二時間相関に分解でき、 $I_q(\omega)$ は q に依らない。

数値解析の方法としては、ミクロカノニカル法とカノニカル法がある。ミクロカノニカル法では、時間幅 t での平均値 α_t より $q_t = \sigma'(\alpha_t)$ から q_t を求め、 $q_t = q$ なるアンサンブルメンバーだけでパワースペクトルを構成する。この方法は、 q がおおきくなるにつれ、 $q_t = q$ なる値を持つ時間領域が現れにくくなる為に、効率が悪い。カノニカル法では、すべてのアンサンブルメンバーに $\exp(q_t \alpha_t) / M_q(t)$ (α_t はそのメンバーの平均値) の重みをかけて、各パワースペクトルを平均すればよいので、すべてのアンサンブルメンバーが利用できるという利点がある。数値解析にはカノニカル法が適しているようである。

詳細については、文献3)を参照していただきたい。 q 次パワースペクトルは、広範囲の時間揺らぎの解析に適用できるので、特に実験の方につかっていただきたい。

文献

- 1) H.Fujisaka and M.Inoue, Phys.Rev.A41(1990),5302,
Statistical-Physical Theory of Multivariate Temporal Fluctuations — Global Characterization and Temporal Correlation —.
- 2) H.Fujisaka and M.Inoue, Prog.Theor.Phys.Suppl. No.99(1989),82,
"Thermodynamics", Temporal Correlations and Scaling Laws.
- 3) H.Fujisaka and H.Shibata, Prog.Theor.Phys. 85(1991),No.2,
New Asymptotic Law Governing Overall Temporal Correlations in Chaotic Systems — Ensemble Homogenization and Order- q Power Spectrum —.