

球面上にある N 点渦糸環の縮約系について

On reduced systems of the polygonal ring of N vortex points on a sphere

坂上 貴之 (Takashi Sakajo), 北海道大学 (Hokkaido University),
E-mail: sakajo@math.sci.hokudai.ac.jp

1 イントロダクション

渦糸とは非粘性・非圧縮流体において渦度が δ 関数的に一点に集中しているとしたものである。その運動は渦糸以外の領域では渦無しとした Euler 方程式に従い、渦糸の強さは Kelvin の循環定理より保存されるので、初期において与えた渦糸以外は時間発展を通じて渦度は生成せず、自身の作る流れに従ってあたかも実在する質点のように運動する。このような仮定のもとでは、渦運動の解析が非常に容易になるので、地球流体運動におけるモデルとして球面渦糸系の運動を扱うことが多い。よく扱われる対象の一つとして強さが同じ (これを Γ と書く) 渦糸が一定の緯度 θ_0 に等間隔で並んだ配置、すなわち、 N 個の渦糸が球面極座標で次のように与えられる場合がある。

$$\Theta_m = \theta_0, \quad \Psi_m = \frac{2\pi m}{N}, \quad 1 \leq m \leq N. \quad (1)$$

この渦糸配置を N 点渦糸環 (N -ring) と呼ぶ。このような配置は一見人工的に見えるかもしれないが、球面でのジェット気流の数値モデルとして導入された渦層の数値的研究 [23] では、渦層が長時間発展の後に渦度の集中した渦巻構造を複数構成し、それらが同一緯度に等間隔に並ぶ様子などが観察される。この各渦巻構造の中に含まれる渦度を一点に集中せると、それは渦糸環モデルになるので、この時間発展を追うことは球面におけるシアの不安定性を数理的に理解する上で重要である。

さて、球面渦糸の運動方程式は以下のように与えられる。(詳細な導出は [7] を見よ。)

$$\dot{\Theta}_m = -\frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{j \neq m}^N \frac{\sin \Theta_j \sin(\Psi_m - \Psi_j)}{1 - \cos \gamma_{mj}}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \sin \Theta_m \dot{\Psi}_m = & -\frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{j \neq m}^N \frac{\cos \Theta_m \sin \Theta_j \cos(\Psi_m - \Psi_j) - \sin \Theta_m \cos \Theta_j}{1 - \cos \gamma_{mj}} \\ & + \frac{\Gamma_1}{4\pi} \frac{\sin \Theta_m}{1 - \cos \Theta_m} - \frac{\Gamma_2}{4\pi} \frac{\sin \Theta_m}{1 + \cos \Theta_m}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3)$$

ただし γ_{mj} は二つの渦糸 (Θ_m, Ψ_m) と (Θ_j, Ψ_j) のなす角度を表しており、次のように与えられる。

$$\cos \gamma_{mj} = \cos \Theta_m \cos \Theta_j + \sin \Theta_m \sin \Theta_j \cos(\Psi_m - \Psi_j).$$

ここで、球面の回転の効果として北極と南極にそれぞれ Γ_1 および Γ_2 の強さを持つ極渦を考えている。この系はハミルトン系であり、そのハミルトニアンは

$$H = -\frac{\Gamma^2}{8\pi} \sum_{m=1}^N \sum_{j \neq m}^N \log(1 - \cos \gamma_{mj}) - \frac{\Gamma_1 \Gamma}{4\pi} \sum_{m=1}^N \log(1 - \cos \Theta_m) - \frac{\Gamma_2 \Gamma}{4\pi} \sum_{m=1}^N \log(1 + \cos \Theta_m) \quad (4)$$

で与えられる。極渦のない時、渦糸系の三体問題は完全可積分であり、その解の性質がよく調べられている [8, 9, 10, 24]。一方、極渦がある場合は z 軸回転不変性より、それに付随する不変量 $\sum_{m=1}^N \cos \Theta_m$ が存在してい

るが、それ以外に不変量は存在せず三体問題は可積分ではない。また、我々が対象としている渦糸環の運動については、Pekarsky と Marsden[20] らが任意の大きさを持つ 3 点渦糸環の安定性を調べている。Laurent-Poltz[13] は渦糸の大きさが $+1, -1$ と交互に与えられているような偶数個の渦糸環を考え、その安定性を調べている。我々が今回扱う強さの等しい渦糸環の安定性については Boatto と Cabral[2, 3] による研究があるが、我々はこれより一歩進めて極渦のある球面渦糸環の安定性解析だけでなく、この定常解が不安定になった時にそれらがどのように運動するかについても考える。

2 線形解析

このセクションでは渦糸環の線形安定性解析の結果を簡単に述べる。証明の詳細については [25] を参照のこと。まず、 N 点渦糸環配置 (1) を方程式 (2) と (3) に代入して、 $\dot{\Theta}_m = 0$ および $\dot{\Psi}_m = V_0(N)$ を得る。ただし、 $V_0(N)$ は

$$V_0(N) = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{4\pi \sin^2 \theta_0} + \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2 + 2\pi) \cos \theta_0}{4\pi \sin^2 \theta_0} - \frac{1}{2N} \frac{\cos \theta_0}{\sin^2 \theta_0},$$

で与えられる定数である。したがって、等間隔配置の渦糸環 (1) は角速度 V_0 の回転系で見れば定常解であり、その相対配置は変わらない。そこで、微小な $\epsilon \ll 1$ に対して、この相対定常解に次のような摂動を加える。

$$\Theta_m(t) = \theta_0 + \epsilon \vartheta_m(t), \quad \Psi_m(t) = \frac{2\pi m}{N} + V_0(t)t + \epsilon \varphi_m(t).$$

これを方程式 (2) と (3) に代入して $O(\epsilon)$ の項を抜き出すと次の線形化方程式を得る。

$$\dot{\vartheta}_m = \frac{1}{2N \sin \theta_0} \sum_{j \neq m}^N \frac{\varphi_m - \varphi_j}{1 - \cos \frac{2\pi}{N}(m-j)}, \quad (5)$$

$$\dot{\varphi}_m = \frac{1}{2N \sin^3 \theta_0} \sum_{j \neq m}^N \frac{\vartheta_m - \vartheta_j}{1 - \cos \frac{2\pi}{N}(m-j)} + B_N \vartheta_m. \quad (6)$$

ここで B_N は次で与えられるパラメータである：

$$B_N = \frac{1 + \cos^2 \theta_0}{2N \sin^3 \theta_0} - \frac{\kappa_1(1 + \cos^2 \theta_0)}{2 \sin^3 \theta_0} - \frac{\kappa_2 \cos \theta_0}{2 \sin^3 \theta_0}. \quad (7)$$

なお、 κ_1 と κ_2 は Γ_1 と Γ_2 から以下のように定義される南北両極渦の強さと等価なパラメータである。

$$\kappa_1 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + 2\pi}{2\pi}, \quad \kappa_2 = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\pi}.$$

この時、線形化方程式の固有値と固有ベクトルを陽的に与えることができる。

命題 1 $p = 0, 1, \dots, N-1$ に対して、線形化方程式の固有値 $\lambda_p^\pm$ は次のように与えられる。

$$\lambda_p^\pm = \pm \frac{1}{2N \sin^2 \theta_0} \sqrt{(pN - p^2)^2 + 2N \sin^3 \theta_0 B_N (pN - p^2)}. \quad (8)$$

このことから、 $\lambda_0^\pm$ は 0 固有値 (Ψ 方向の回転運動に対応) である。また、 N が偶数 $N = 2M$ の時、 $\lambda_M^\pm$ は単純固有値であり、後は全て二重固有値であることがわかる。その一方、 N が奇数 $N = 2M + 1$ なら全ての固有値は二重である。さらに、この命題から固有値には以下のような順序関係がある。

$$(\lambda_1^\pm)^2 < (\lambda_2^\pm)^2 < \dots < (\lambda_M^\pm)^2.$$

したがって、ある j について $(\lambda_j^\pm)^2 > 0$ であれば、すべての固有値 $\lambda_k^\pm (k \geq j)$ は不安定になる。このことから多角形渦糸環の安定性は最大固有値 $\lambda_M^\pm$ の安定性の条件 $(\lambda_M^\pm)^2 < 0$ と同じである。すなわち、次のことが言える。

定理 2 緯度 θ_0 上にある渦糸環が安定であるための必要十分条件は, N が偶数の時

$$\frac{N}{4} + \frac{1 + \cos^2 \theta_0}{N} < \kappa_1(1 + \cos^2 \theta_0) + \kappa_2 \cos \theta_0 \equiv \kappa,$$

であり, 一方 N が奇数の時は次のようになる.

$$\frac{N^2 - 1}{4N} + \frac{1 + \cos^2 \theta_0}{N} < \kappa_1(1 + \cos^2 \theta_0) + \kappa_2 \cos \theta_0 \equiv \kappa.$$

なお, 外部流がない時の渦糸環の安定性は, この方法とは別の方法で Boatto ら [2] や Polvani ら [21] によって既に求められており, 我々の結果は彼等のそれと完全に一致している. さらにこの線形解析においては, 各固有値に対する固有ベクトルも以下のように完全に決定できる.

命題 3 固有値 $\lambda_p^\pm$ はそれぞれ線形独立な二つの固有ベクトル $\vec{\phi}_p^\pm$ と $\vec{\psi}_p^\pm$ を持ち, 次のように表される.

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_p^\pm &= {}^t \left(\sqrt{\xi_p}, \sqrt{\xi_p} \cos \frac{2\pi}{N} p, \dots, \sqrt{\xi_p} \cos \frac{2\pi}{N} (N-1)p, \pm \sqrt{\eta_p}, \pm \sqrt{\eta_p} \cos \frac{2\pi}{N} p, \dots, \pm \sqrt{\eta_p} \cos \frac{2\pi}{N} (N-1)p \right), \\ \vec{\phi}_p^\pm &= {}^t \left(0, \sqrt{\xi_p} \sin \frac{2\pi}{N} p, \dots, \sqrt{\xi_p} \sin \frac{2\pi}{N} (N-1)p, 0, \pm \sqrt{\eta_p} \sin \frac{2\pi}{N} p, \dots, \pm \sqrt{\eta_p} \sin \frac{2\pi}{N} (N-1)p \right). \end{aligned}$$

ただし $\xi_p = \frac{p(N-p)}{2N \sin \theta_0}$ と $\eta_p = \frac{p(N-p)}{2N \sin^3 \theta_0} + B_N$ で与えられる.

更に, これらの固有ベクトルは p が異なれば互いに直交していることもわかる ([27]).

補題 4 命題 3 で与えられた固有ベクトルについて次が成立する.

$$(\vec{\psi}_p^\pm, \vec{\phi}_q^\pm) = 0, \quad (\vec{\psi}_p^\pm, \vec{\psi}_q^\pm) = (\vec{\phi}_p^\pm, \vec{\phi}_q^\pm) = 0 \quad \text{for } p \neq q,$$

3 系の縮約方法について

N 点の渦糸系の方程式は $2N$ 次元の相空間における力学系を定めるので, 一般に N 点渦糸環が不安定化した時の運動を記述することは困難である. しかしながら, 系に適当な対称性をつけ加えることで, より自由度の少ない系に縮約すれば, その低次元系の力学を研究することで高次元の相空間に埋め込まれた不変な構造を調べることができる. このような不変な力学系への縮約を行うため, 前節で求めた互いに独立な固有ベクトルを用いた解の有限次元固有ベクトル分解を用いる.

すなわち, $\vec{x} = (\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_N, \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N)$ によって表される $2N$ 次元力学系上における渦糸環の定常状態 x_0 とおくことにすると, N が偶数の場合と奇数の場合では最大固有値 $\lambda_M^\pm$ の重複度の違いがあることに注意して, この点を中心として方程式の解軌道は次のような固有ベクトルによる一次結合で表現できる.

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \sum_{p=1}^M (a_p \vec{\psi}_p^+ + b_p \vec{\psi}_p^-) + \sum_{p=1}^{M-1} (c_p \vec{\phi}_p^+ + d_p \vec{\phi}_p^-) + e \vec{\zeta}^+ + f \vec{\zeta}^-, \quad \text{for } N = 2M, \quad (9)$$

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \sum_{p=1}^M (a_p \vec{\psi}_p^+ + b_p \vec{\psi}_p^- + c_p \vec{\phi}_p^+ + d_p \vec{\phi}_p^-) + e \vec{\zeta}^+ + f \vec{\zeta}^-, \quad \text{for } N = 2M + 1. \quad (10)$$

ここで, 新たに与えられたベクトル $\vec{\zeta}^\pm$ は, すべての $\vec{\psi}_p^\pm$ と $\vec{\phi}_p^\pm$, ($p = 1, \dots, M$) と直交する単位ベクトルであり,

$$\vec{\zeta}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2N}} {}^t (1, 1, \dots, 1, \pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1),$$

で与えられる。これらの係数は渦糸の位置から次のように求めることができる。

$$\begin{aligned}
 a_p &= \frac{1}{2N\xi_p}(\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\psi}_p^+ + \vec{\psi}_p^-) + \frac{1}{2N|\eta_p|}(\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\psi}_p^+ - \vec{\psi}_p^-), \\
 b_p &= \frac{1}{2N\xi_p}(\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\psi}_p^+ + \vec{\psi}_p^-) - \frac{1}{2N|\eta_p|}(\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\psi}_p^+ - \vec{\psi}_p^-), \\
 c_p &= \frac{1}{2N\xi_p}(\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\phi}_p^+ + \vec{\phi}_p^-) + \frac{1}{2N|\eta_p|}(\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\phi}_p^+ - \vec{\phi}_p^-), \\
 d_p &= \frac{1}{2N\xi_p}(\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\phi}_p^+ + \vec{\phi}_p^-) - \frac{1}{2N|\eta_p|}(\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\phi}_p^+ - \vec{\phi}_p^-), \\
 e &= (\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\zeta}^+), \quad f = (\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\zeta}^-).
 \end{aligned} \tag{11}$$

このことから、例えば固有ベクトル $\vec{\psi}_p^\pm$ が張る二次元空間に運動を射影するための条件は自分以外の固有ベクトルの展開係数が0になることであり、それはすなわち (11) から以下の条件と同値である。

$$\begin{aligned}
 (\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\psi}_p^+ + \vec{\psi}_p^-) &= 0, \quad (\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\psi}_p^+ - \vec{\psi}_p^-) = 0 \quad (q \neq p), \\
 (\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\phi}_p^+ + \vec{\phi}_p^-) &= 0, \quad (\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\phi}_p^+ - \vec{\phi}_p^-) = 0 \quad (\forall p), \\
 (\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\zeta}^+ + \vec{\zeta}^-) &= 0, \quad (\vec{x} - \vec{x}_0, \vec{\zeta}^+ - \vec{\zeta}^-) = 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

残りの $\vec{\phi}_p^\pm$ や $\vec{\zeta}^\pm$ への射影条件も同様に求められる。なお、この条件を解くと $2N$ 個の各変数の間に何らかの関係が求められるが、これは系の相空間の二次元部分空間への射影条件ではあっても、系を不変な二次元力学系へ縮約するための条件でないということに注意しなければならない。ここで求めた条件が本当に縮約系を与える条件であるかどうかは、元の微分方程式のレベルに戻って別途示す必要がある。

4 偶数渦糸環の場合

ここでは渦糸の数が偶数 $N = 2M$ の時を考える。渦糸環が不安定になった時の運動を調べるために、その安定性を決定している最大固有値 $\lambda_M^\pm$ に対応する固有ベクトル $\vec{\psi}_M^\pm$ と $\vec{\zeta}^\pm$ で張られる空間への系の射影を考える。前節で与えた条件 (12) を満たす解は、任意の実数に A, B, C, D に対して、 $\vec{x} = \vec{x}_0 + A\vec{\psi}_M^+ + B\vec{\psi}_M^- + C\vec{\zeta}^+ + D\vec{\zeta}^-$ であるので、この条件から各変数間の関係を書き下すと次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \Theta_{2m-1} &= \Theta_1, \quad \Psi_{2m-1} = \Psi_1 + \frac{2\pi}{M}(m-1), \\
 \Theta_{2m} &= \Theta_2, \quad \Psi_{2m} = \Psi_2 + \frac{2\pi}{M}(m-1), \quad 1 \leq m \leq M.
 \end{aligned} \tag{13}$$

この射影条件は渦糸の方程式に代入すれば、時間によって変化しない関係であることが直ちに導かれるのでこの関係は $2N$ 個の渦糸の隣あう二つの渦糸のペア (Θ_1, Ψ_1) と (Θ_2, Ψ_2) による縮約系を与える。さらに、不変量 $\Theta_1 + \Theta_2 = 2 \cos \theta_0$ を用いるとこの系は二次元の不変な力学系に帰着させることができる。

実際、 $\Phi \equiv \Psi_1 - \Psi_2$ として、条件 (13) の条件を使って方程式を以下のような (Θ_1, Φ) の二次元方程式を得る。

$$\begin{aligned}
 \dot{\Theta}_1 &= -\frac{1}{8M} \sum_{j=1}^M \frac{\sin \Theta_2 \sin \left(\Phi + \frac{2\pi(1-j)}{M} \right)}{1 - \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 - \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos \left(\Phi + \frac{2\pi(1-j)}{M} \right)} \\
 &\quad + \frac{1}{8M} \sum_{j=1}^M \frac{\sin \Theta_2 \sin \left(-\Phi + \frac{2\pi(1-j)}{M} \right)}{1 - \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 - \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos \left(-\Phi + \frac{2\pi(1-j)}{M} \right)},
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi} &= -\frac{\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2}{8M \sin \Theta_1 \sin \Theta_2} \sum_{j=1}^M \frac{\sin \Theta_1 \sin \Theta_2 + (1 + \cos \Theta_1 \cos \Theta_2) \cos \left(\Phi + \frac{2\pi(1-j)}{M} \right)}{1 - \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 - \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos \left(\Phi + \frac{2\pi(1-j)}{M} \right)} \\
 &\quad - \frac{\cos \Theta_1 - \cos \Theta_2}{8M \sin \Theta_1 \sin \Theta_2} \sum_{j=1}^M \frac{\sin \Theta_1 \sin \Theta_2 + (1 + \cos \Theta_1 \cos \Theta_2) \cos \left(-\Phi + \frac{2\pi(1-j)}{M} \right)}{1 - \cos \Theta_1 \cos \Theta_2 - \sin \Theta_1 \sin \Theta_2 \cos \left(-\Phi + \frac{2\pi(1-j)}{M} \right)} \\
 &\quad + \left(\frac{\kappa_1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4M} \right) \left(\frac{\cos \Theta_1}{\sin^2 \Theta_1} - \frac{\cos \Theta_2}{\sin^2 \Theta_2} \right) + \frac{\kappa_2}{4} \left(\frac{1}{\sin^2 \Theta_1} - \frac{1}{\sin^2 \Theta_2} \right).
 \end{aligned} \tag{15}$$

変数 Θ_2 は不変量を通じて Θ_1 に関係付けられているので上は二次元空間 (Θ_1, Φ) での閉じた方程式となっている。なお、この縮約系から N 点渦系系の運動は上の方程式から定まる渦系ペアの運動を $\frac{2\pi}{M}$ ずつ回転させて得られることに注意する。我々はこの縮約系における定常解の分岐、周期解の存在と外部流の大きさの変化に伴う遷移、およびその安定性と第二固有値 $\lambda_{M-1}^\pm$ との関係について論じる。

まず、最も簡単な赤道 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ にある $N = 4$ の場合について次のことが示される [25]。

命題 5 $N = 4$ および $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ の時の縮約方程式 (14) と (15) の定常解およびその安定性は次で与えられる。

(1) *Collinear fixed points*: $\sin \Phi = 0, \tan^2 \Theta_1 = 4\kappa_1 - 3$;

これは $\kappa_1 > \frac{3}{4}$ に対して存在する双曲型の不動点である。

(2) *Staggered fixed points*: $\cos \Phi = 0, \tan^2 \Theta_1 = \frac{8\kappa_1 - 6}{5 - 4\kappa_1}$;

これは $\frac{3}{4} < \kappa_1 < \frac{5}{4}$ で存在する楕円型の不動点である。

(3) *4-ring fixed points*: $\cos \Phi = 0, \Theta_1 = \frac{\pi}{2}$;

これはすべての κ_1 について存在するが、 $\kappa_1 < \frac{5}{4}$ に対して双曲型 $\kappa_1 > \frac{5}{4}$ に対して楕円型である。

なお、この 4-ring は我々の考えている 4 点渦系環の定常状態に対応しており、この安定性は $\kappa_1 = \frac{5}{4}$ で楕円型から双曲型へ不安定化しているが、この値は定理 2 で与えた渦系環の安定性条件と一致することに注意する。

次にこの二次元系は Hamilton 系なので、その大域的な流れの様子は Hamilton 系の等高線を書くことによって捉えることができる。上の命題より縮約 4 点渦系環の不動点の数とその安定性が $\kappa_1 = \frac{5}{4}$ と $\kappa_1 = \frac{3}{4}$ で変化していることを考慮して、我々は $\kappa_1 = 1.4, \kappa_1 = 1.1, \kappa_1 = 0.9, \kappa_1 = 0.6$ の場合の Hamiltonian の等高線を図 1 に示す。それぞれの場合について大域的流れは次のようになる。

(a) 楕円型の 4-ring と双曲型の collinear fixed points があって、collinear fixed points を結ぶヘテロクリニック軌道がある。4-ring は線形安定であり、初期値に少し摂動を加えると解は 4-ring の廻りを回転する軌道を描く。これを線形周期軌道と呼ぶ。

(b) Collinear fixed points については (a) と変化はないが、4-ring は不安定化して双曲型となり、あらたに中立安定な staggered fixed points が出現する。さらに、この staggered fixed points を囲むような 4-ring のホモクリニック軌道が現れる。この時、4-ring は線形安定ではないが、4-ring に僅かな摂動を加えると、解はやはり 4-ring の廻りをまわる軌道を描く。これを非線形周期軌道と呼ぶ。

(c) 不動点の個数やその安定性は変化しないが、等高線の位相的性質が変化する。すなわち、collinear fixed points を結ぶヘテロクリニック軌道が staggered fixed point を囲み、4-ring はそれぞれ隣あう 4-ring とヘテロクリニック軌道で結ばれる。この時、4-ring に Φ 方向に僅かな摂動を加えると、二つの渦系がその相対位置を一旦変えた後、もとの配置に戻る swing-by 周期軌道をとる。一方で Θ_1 方向に摂動を加えると、互いの相対配置を次々に変えながら赤道の上を跳ねるように回る revolving 周期軌道が現れる。

(d) Collinear fixed points と staggered fixed points が消え、双曲型の 4-ring とそれらを結ぶヘテロクリニック軌道だけが残る。この時、4-ring に摂動を加えれば、(c) と同様に swing-by 周期軌道か revolving 周期軌道のいずれかとなる。

(a) から (d) において示された各周期軌道の球面上での様子を図 2 に示す。ここで注目することは、(b) から (c) へ到る過程において、4 点渦系環を結ぶ separatrix の付けかえにより摂動 4-ring の周期解に遷移が起きているということである。つまり、線形安定性の変化とは関係なく、周期解の構造の質的変化が起こっている。なお、このような separatrix の付替が起こる κ_1 の値は 1 である。(このことは Hamiltonian から簡単な計算でわかる。)

さて、ここで第二固有値 $\lambda_1^\pm$ の安定性とこの周期解の安定性について考える。命題 1 から $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $N = 4$ の場合、第二固有値 $\lambda_1^\pm$ が不安定化するの $\kappa_1 = 1$ の時である。また、この縮約系の相空間は最大の単純固有値 $\lambda_2^\pm$ の固有空間と一致することを思い出そう。この時、 $\lambda_1^\pm$ が不安定ならば、対応する不安定多様体はこの相空間に横断的に存在している。したがって、第二固有値が不安定な時、4 点渦系環に縮約条件を満たさなくなるような微小摂動を加えると、その不安定多様体に沿って解は縮約系の相空間から離れるので、縮約系で得られた周期解は不安定になる。その意味で、縮約系における周期軌道の安定性はこの 4 点渦系環の第二固有値の安定性によって決まることがわかる。このことから次がわかる。

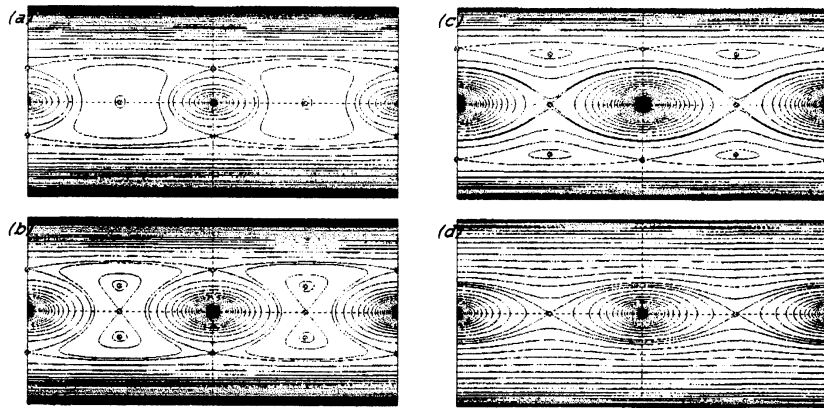


Figure 1: 赤道上有る4点縮約渦糸環における Hamiltonian の等高線の様子. 相空間 $(\Psi, \Theta_1) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ にプロットした. (a) $\kappa_1 = 1.4$, (b) $\kappa_1 = 1.1$, (c) $\kappa_1 = 0.9$, (d) $\kappa_1 = 0.6$.

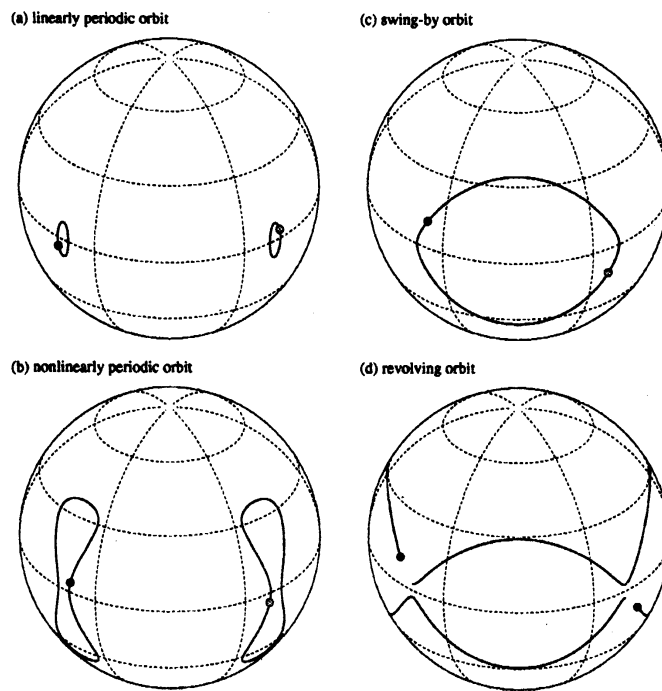


Figure 2: 赤道上有る縮約4点渦糸環に現れる4つの周期軌道の様子. (a) 線形周期軌道 ($\kappa_1 = 1.4$) (b) 非線形周期軌道 ($\kappa_1 = 1.1$), (c) swing-by 周期軌道 ($\kappa_1 = 0.9$), (d) revolving 周期軌道 ($\kappa_1 = 0.9$).

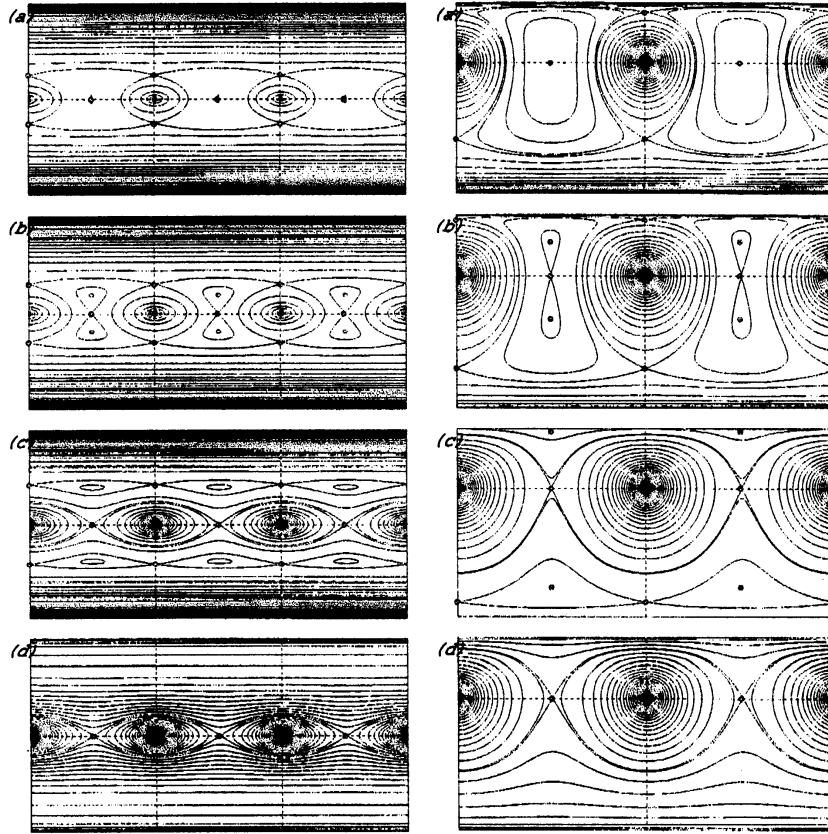


Figure 3: (左図) 赤道にある6点縮約渦糸環における Hamiltonian の等高線の様子. (a) $\kappa_1 = 1.7$, (b) $\kappa_1 = 1.4$, (c) $\kappa_1 = 1$, (d) $\kappa_1 = 0.7$. (右図) $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ にある4点縮約渦糸環における Hamiltonian の等高線の様子. (a) $\kappa = 1.5$, (b) $\kappa = 1.3$, (c) $\kappa = 1.15$, (d) $\kappa = 1.0$, ただし $\kappa = \frac{3}{2}\kappa_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\kappa_2$ である. 周期解の遷移が起こるのは $\kappa_1 = 1.1935$ 付近である.

定理 6 赤道にある 4 点渦糸環の運動は次のように分類できる.

κ_1 の値	定常解	摂動 4-ring の運動
$\frac{5}{4} < \kappa_1$	hyperbolic collinear, elliptic 4-ring	安定線形周期軌道
$1 < \kappa_1 < \frac{5}{4}$	hyperbolic collinear, hyperbolic 4-ring, elliptic staggered	安定非線形周期軌道
$\frac{3}{4} < \kappa_1 < 1$	hyperbolic collinear, hyperbolic 4-ring, elliptic staggered	不安定 swing-by 周期軌道, 不安定 revolving 周期軌道
$\kappa_1 < \frac{3}{4}$	hyperbolic 4-ring	不安定 swing-by 周期軌道, 不安定 revolving 周期軌道

この定理は赤道にある 4 点渦糸環に関する定理であるが, 他の偶数渦糸環についても同じことを示すことができる. ここでは二つの例について示す. 図 3 は, それぞれ赤道にある 6 点縮約渦糸系および $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ 上にある 4 点縮約渦糸系に対する Hamiltonian の等高線である. いずれの場合も同様の周期解の遷移が起こっていることがわかる. またこれらの安定性もこれまでと同様の議論から渦糸環の第二固有値の安定性によって決定される.

5 三点渦糸環の場合

前章においては, 偶数の場合を取り扱ったが, この場合は系の安定性を定める最大固有値が単純固有値であり, それに付随する固有ベクトルが一つしかないことが系の二次元系への縮約を可能にした. しかし, 渦糸の数が奇数である場合は最大固有値は二重固有値であり, 独立な二つの固有ベクトルを持つ. したがって, 渦糸環が不安定化, すなわち最大固有値が不安定になる時, 奇数渦糸環の場合は不安定方向が二つあるので不安定多様体は二次元となる. したがって, その上で動く解軌道は複雑なものになりうる. そこで, 本章では三体問題をとりあげ, その複雑な挙動について調べることにする.

$N = 3$ の場合は, 0 でない固有値は $\lambda_1^\pm$ だけであり, これは二つの線形独立な固有ベクトル $\vec{\phi}_1^\pm$ と $\vec{\psi}_1^\pm$ をもつ. そこで形式的に系の各固有ベクトルによって張られる二次元空間への射影条件を (12) などを用いて求めると以下ようになる. $\vec{\psi}_1^\pm$ 平面への射影条件は

$$\Theta_1 = 3\theta_0 - 2\Theta_2, \quad \Theta_3 = \Theta_2, \quad \Psi_1 = -2\Psi_2 + \frac{4}{3}\pi, \quad \Psi_3 = \Psi_2 - \frac{4}{3}\pi, \quad (16)$$

で与えられ, $\vec{\phi}_1^\pm$ 平面への射影条件は

$$\Theta_1 = \theta_0, \quad \Theta_3 = 2\theta_0 - \Theta_2, \quad \Psi_1 = 0, \quad \Psi_3 = -\Psi_2, \quad (17)$$

で与えられる. また, $\zeta^\pm$ への射影条件は

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3, \quad \Psi_2 = \Psi_1 + \frac{2\pi}{3}, \quad \Psi_3 = \Psi_1 - \frac{2\pi}{3}, \quad (18)$$

で与えられている. 最後の射影条件 (18) は三点渦糸が渦糸環の配置を意味しているので, 解軌道が $\zeta^\pm$ -射影平面を通過する時, 三点の渦糸は丁度渦糸環配置をとっていることがわかる.

ここで, 与えられた解軌道に対して距離 $l_\zeta^{(3)}$ を以下のように定義する.

$$l_\zeta^{(3)} = \sqrt{\frac{(2\Theta_1 - \Theta_2 - \Theta_3)^2}{6} + \frac{(\Theta_2 - \Theta_3)^2}{2} + \frac{1}{6}\sin^2 \frac{2\Psi_1 - \Psi_2 - \Psi_3}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 \frac{\Psi_2 - \Psi_3 - \frac{4}{3}\pi}{4}}.$$

経度変数 Ψ_i は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ で定義されていることに注意すると, この距離が 0 になれば, 解の直交展開係数 (11) における a_1, b_1, c_1, d_1 はそれぞれ 0 となり, 解軌道は $\zeta^\pm$ で張られた射影平面の上にあることを意味しているの

で、この量で元の解が三点渦糸環配置にどれほど近いかを測ることができる。この距離は後で、具体的に渦糸の運動を記述する時にも用いる。

さて、§3 で注意したように、ここで求めた条件 (16) および (17), (18) は単なる射影条件であり、もとの力学系の低次元系への縮約条件を与えているわけではない。したがって、この条件を用いてハミルトニアンの等高線を書いたとしても、その等高線が解の軌道と一致しているわけではない。しかし、両極の渦の強さが同じ $\Gamma_1 = \Gamma_2$ で、定常 3 点渦糸環が赤道上 $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ にある場合、 $\vec{\phi}_1^\pm$ への射影条件 (17) は二次元系への縮約条件になっていることは、方程式を代入するとわかる。したがって、二次元縮約系の運動として、射影ハミルトニアン

$$\begin{aligned} H_{\vec{\phi}_1^\pm} = & -\frac{\Gamma^2}{4\pi} \log(1 - \cos \theta_0 \cos \Theta_2 - \sin \theta_0 \sin \Theta_2 \cos \Psi_2) \\ & -\frac{\Gamma^2}{4\pi} \log(1 - \cos \theta_0 \cos(2\theta_0 - \Theta_2) - \sin \theta_0 \sin(2\theta_0 - \Theta_2) \cos \Psi_2) \\ & -\frac{\Gamma^2}{4\pi} \log(1 - \cos \Theta_2 \cos(2\theta_0 - \Theta_2) - \sin \Theta_2 \sin(2\theta_0 - \Theta_2) \cos 2\Psi_2) \\ & -\frac{\Gamma_1 \Gamma}{4\pi} \log(1 - \cos \theta_0)(1 - \cos \Theta_2)(1 - \cos(2\theta_0 - \Theta_2)) \\ & -\frac{\Gamma_2 \Gamma}{4\pi} \log(1 + \cos \theta_0)(1 + \cos \Theta_2)(1 + \cos(2\theta_0 - \Theta_2)). \end{aligned}$$

の等高線を書けば、それらは 6 次元空間中の渦糸環の解軌道と一致する。そこで、図 4 (a) に $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -0.2\pi$ の時の $H_{\vec{\phi}_1^\pm}$ の等高線を示す。図中左の○は 3 点渦糸環の相対定常状態に対応する点である。また、極渦がこの大きさを持つ時には渦糸環は不安定になるので、解軌道は図中右の対称な位置にある定常点とのヘテロクリニックな軌道を持つ。なお、この対称な位置にある定常点はもとの 3 点渦糸の配置に対して、球面を回転させて南極と北極を入れ替えてできる配置 (極反転対称渦糸環配置) に対応していること。したがって、3 点渦糸環に $\vec{\phi}_1^\pm$ 方向に微小な摂動を加えると、ヘテロクリニック軌道の近傍を動く解は互いに南極と北極を入れ替えることで移り合う二つの 3 点渦糸環の形を交互にとりながら周期的な運動を行うことがわかる。

一方、この不変な縮約系を横断するような $\vec{\psi}_1^\pm$ の不安定方向が存在しているので、3 点渦糸環に任意の方向に微小な摂動を与えれば、この不変な縮約系の二次元相空間から離れていく。このことは縮約系で得られた周期解が不安定であり、長時間発展は複雑になることを予測させる。そこで、その様子を見るために 3 点渦糸環に以下のような微小な初期摂動

$$\vec{x}(0) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} \right) + \epsilon(\mu \vec{\psi}_1^+ + (1 - \mu) \vec{\phi}_1^+),$$

を加えた時の渦糸環の運動を図 5 に示す。ただし、摂動の大きさは $\epsilon = 10^{-5}$ であり、 μ は摂動方向を決定するパラメータである。図 5(a) は $\mu = 0.0$ の時の $\cos \Theta_1, \cos \Theta_2, \cos \Theta_3$ の時間発展の様子を表している。図 5(b) はその時の $l_\zeta^{(3)}$ の時間発展を示している。初期摂動方向は $\vec{\phi}_1^+$ のみ成分を持つので、初期において 3 点渦糸は縮約系の上を運動している。実際、図 5(a) を見ると時刻 $t = 200$ までは初期において 3 点渦糸は 0 の位置を運動し、一瞬 $\cos \Theta_2, \cos \Theta_3$ が原点对称に値を取った後、再び 0 ラインに戻ってきており、再び 3 点渦糸環になっていることを示している。この初期解軌道が上で考えた縮約系におけるヘテロクリニック軌道近傍を移動していることは図 5(b) の $l_\zeta^{(3)}$ を見ればすぐにわかる。すなわち図中 0 のラインは 3 点渦糸が渦糸環配置をとっていることを意味し、少し変動して $\frac{\sqrt{6}}{4}$ のラインに移動してしばらく留まっている。この $\frac{\sqrt{6}}{4}$ のラインは丁度 3 点渦糸が極対称 3 点渦糸環配置をとっている状態に相当するので、この時間発展の初期段階では縮約系の運動が支配的であることがわかる。

しかし、初期摂動には縮約系に横断的な方向への丸め誤差が含まれており、その方向の摂動がどんどん大きくなって、時刻 $t = 200$ 以後は不安定になる。しかし、その軌道をよく見ると 3 点の軌道は同じような良く似たパターンを繰り返している。(周期的にくりかえされているわけではないことに注意する。) しかも、その繰り返しパターンの合間 ($t = 180, 290, 400$ 付近) に、瞬時ではあるが渦糸の一点が 0 ラインに留まり他の二点が原点对称に値をとるパターンが存在している。その瞬間に相当する距離 $l_\zeta^{(3)}$ を見ると、0 から $\frac{\sqrt{6}}{4}$ の近傍に近付いていることがわかる。これらのことから、不安定化した三体問題の運動は縮約系近傍を定期的に再帰する軌道に沿って発展していることがわかる。このような再帰構造は、縮約系で得られたヘテロクリニック構造とは別のヘ

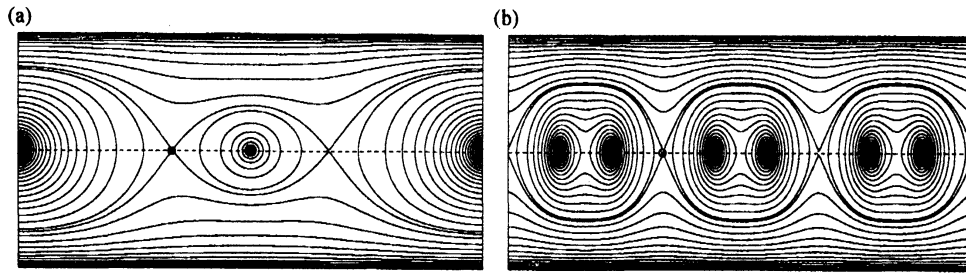


Figure 4: (a) 両極の渦糸の大きさが $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -0.2\pi$, 定常3点渦糸環が赤道にある時, 縮約条件 (17) によって $\phi_1^\pm$ によって張られる二次元空間に縮約した系のハミルトニアン の等高線. (b) 同じ条件における射影条件 (16) によって, $\psi_1^\pm$ で張られる二次元空間にハミルトニアン の等値面を射影したもの.

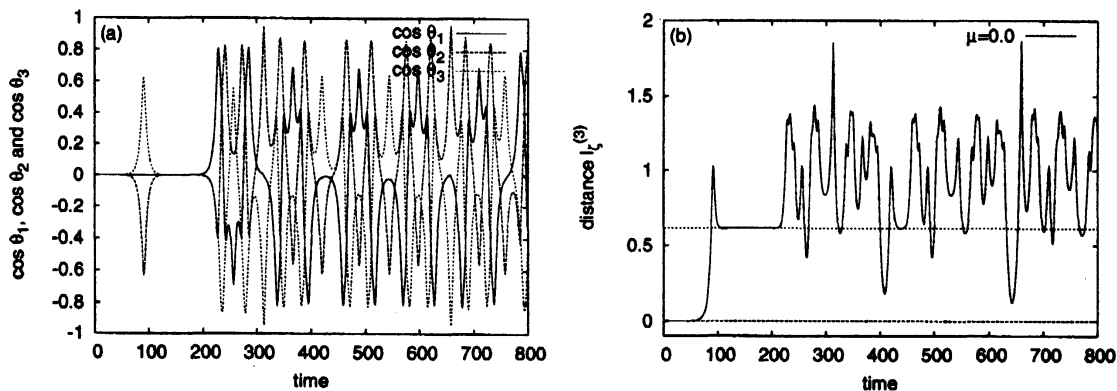


Figure 5: (a) 極渦の強さが $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.2\pi$ で赤道にある三点渦糸 $\cos \theta_1$, $\cos \theta_2$, $\cos \theta_3$ の時間発展の様子. 初期摂動の方向は $\mu = 0.0$ である. (b) 三点渦糸環配置との距離を表す $l_\zeta^{(3)}$. 三点渦糸環配置と極対称な三点渦糸環配置に相当する $l_\zeta^{(3)} = 0$ と $\frac{\sqrt{6}}{4}$ のところには点線を引いている.

テロクリニック軌道の存在を示唆するものであるが, その存在を示すことは現在のところできていない. ただ, 射影条件 (16) に基づいてハミルトニアン の等値面を射影した図 4(b) の構造を見ると, こちらもヘテロクリニックな接続断面を持っているので, こうしたハミルトニアン の等値面の構造がこうした再帰的運動に何らかの影響を及ぼしていると考えられる.

次に, 初期摂動を縮約系と横断的な方向 $\mu = 1.0$ に沿って加えた時の運動と, その時の $l_\zeta^{(3)}$ の時間発展を図 6 に示す. この場合は, 縮約系から離れていく方向に初期摂動をとっているため, 解軌道は複雑になるはずだが, この場合も $\mu = 0.0$ の時と同様, $\phi_1^\pm$ -縮約系に再帰してくる運動を含むパターンの繰り返し運動が観察される.

最後に, 二つの初期値に対する解軌道の例を示す. 図 7 と図 8 はそれぞれ初期摂動方向を $\mu = 0.4$, $\mu = 0.7$ に取った時の解軌道の様子である. この二つは非常によい対照をなしており, 前者は周期的な運動を示し, 後者は乱雑な運動をしている. 前者の場合は, 周期的に三点渦糸環配置の近傍に周期的もどってくる軌道を表している. このように初期摂動のとりかたに応じて様々な複雑な運動を見せる.

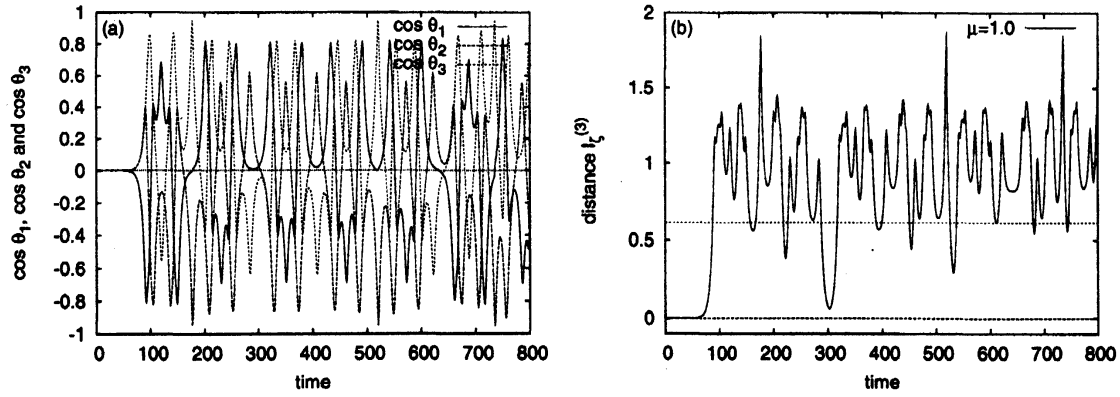


Figure 6: (a) 極渦の強さが $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.2\pi$ で赤道にある三点渦糸 $\cos \theta_1$, $\cos \theta_2$, $\cos \theta_3$ の時間発展の様子. 初期摂動の方向は縮約系の方に横断的な方向 $\mu = 1.0$ である. (b) 三点渦糸環配置との距離を表す $l_\zeta^{(3)}$. 三点渦糸環配置と極対称な三点渦糸環配置に相当する $l_\zeta^{(3)} = 0$ と $\frac{\sqrt{6}}{4}$ のところには点線を引いている.

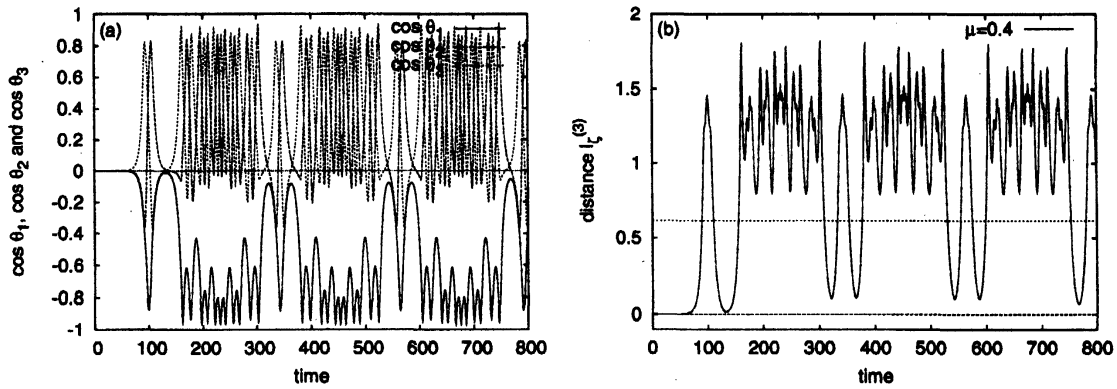


Figure 7: (a) 極渦の強さが $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.2\pi$ で赤道にある三点渦糸 $\cos \theta_1$, $\cos \theta_2$, $\cos \theta_3$ の時間発展の様子. 初期摂動の方向は縮約系の方に横断的な方向 $\mu = 0.4$ である. (b) 三点渦糸環配置との距離を表す $l_\zeta^{(3)}$. 三点渦糸環配置と極対称な三点渦糸環配置に相当する $l_\zeta^{(3)} = 0$ と $\frac{\sqrt{6}}{4}$ のところには点線を引いている.

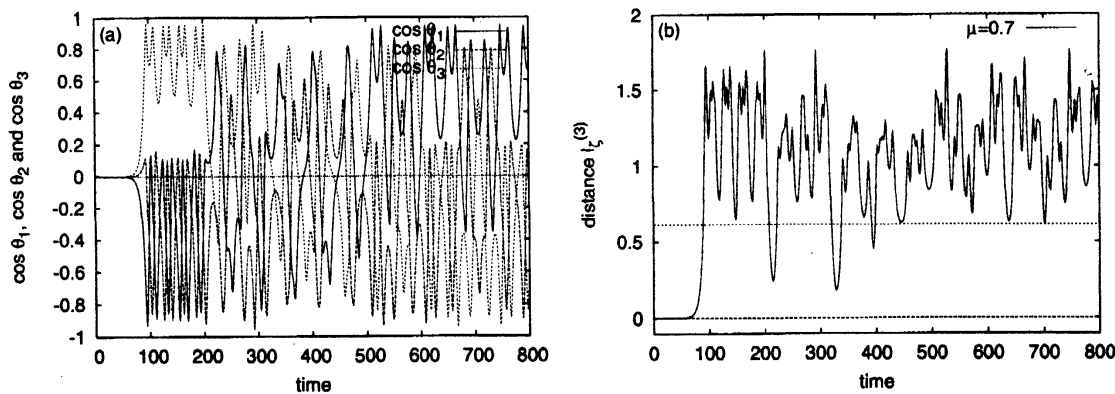


Figure 8: (a) 極渦の強さが $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0.2\pi$ で赤道にある三点渦系 $\cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3$ の時間発展の様子. 初期摂動の方向は縮約系の方向に横断的な方向 $\mu = 0.7$ である. (b) 三点渦系環配置との距離を表す $l_\zeta^{(3)}$. 三点渦系環配置と極対称な三点渦系環配置に相当する $l_\zeta^{(3)} = 0$ と $\frac{\sqrt{6}}{4}$ のところには点線を引いている.

6 まとめ

極渦のある N 点渦系環配置の安定性と不安定な解の長時間発展について調べた. 系が持つ対称性のおかげで安定性解析において固有ベクトルや固有値がすべて陽的に求められたため. 一部の場について不安定解の性質を明らかにすることが可能になった. 基本的なアイデアは解軌道の一次独立な固有ベクトル展開に基づく射影条件より導き出した縮約条件によって, 系を低次元の力学系に帰着させることである. 一般的にすべての射影条件は力学系の縮約条件になるわけではないが, 偶数の場合はかなりのことを示すことができ, 三体問題については赤道上にある問題について部分的に理解をすることができるようになった. 逆に思い付く疑問はこうしたハミルトニアンに基づく系の不変な力学系への縮約がいつ可能であるかという問題である. これは球面の N 点渦系の配置とその固有ベクトルの持つ様々な変換不変性に基づくと考えられる. すなわち, 偶数の場合は N 点渦系を二つずつペアにして回転させる置換不変性に, 極渦の強さの等しい赤道三体問題については, 両極入れ替えるように球を反転させる変換に対する不変性によって, 系が縮約可能になっているものと思われる. このような系の固有ベクトルの変換対称性と系の縮約可能性についての議論は現在研究を進めており, その成果は近日発表する予定である.

References

- [1] G.K. Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1967).
- [2] S. Boatto and H.E. Cabral, *Nonlinear stability of a latitudinal ring of point-vortices on a nonrotating sphere*, SIAM J. Appl. Math. **64**, pp. 216–230 (2003).
- [3] H.E. Cabral and D.S. Schmidt, *Stability of relative equilibria in the problem of $N+1$ vortices*, SIAM J. Math. Anal. **31**, pp. 231–250 (1999).
- [4] R.E. Caflisch and J. Lowengrub, *Convergence of the vortex method for vortex sheets*, SIAM J. Numer. Anal. **26**, pp. 1060–1080 (1989).
- [5] A.J. Chorin and P.S. Bernard, *Discretization of a vortex sheet with an examples of roll-up*, J. Comput. Phys. **13**, pp. 423–429 (1973).
- [6] Y. Kaneda, *A representation of the motion of a vortex sheet in a three-dimensional flow*, Phys. Fluids A **1**, pp. 261–266 (1990).

- [7] Y. Kimura and H. Okamoto, *Vortex motion on a sphere*, J. Phys. Soc. Japan **56**, pp. 3203–4206 (1987).
- [8] R. Kidambi and P.K. Newton, *Motion of three point vortices on a sphere*, Physica D **116**, pp. 95–134 (1998).
- [9] R. Kidambi and P.K. Newton, *Collapse of three vortices on a sphere*, Nuovo Cimento **22C**, pp. 779–791 (1999).
- [10] R. Kidambi and P.K. Newton, *Streamline topologies for integrable vortex motion on a sphere*, Physica D **140**, pp. 95–125 (2000).
- [11] F. Kirwan, *The topology of reduced phase space of the motion of vortices on a sphere*, Physica D **30**, pp. 99–123 (1998).
- [12] R. Krasny, *Desingularization of periodic vortex sheet roll-up*, J. Comput. Phys. **69**, pp. 292–313 (1986).
- [13] F. Laurent-Polz, *Point vortices on the sphere : A case with opposite vortices*, Nonlinearity **15**, pp. 143–171 (2003).
- [14] C. Lim, *Relative equilibria of symmetric n-body problems on a sphere: inverse and direct results*, Comm. Pure. Appl. Math. **51**, pp. 341–371 (1998).
- [15] C. Lim, J. Montaldi, and M. Roberts, *Relative equilibria of point vortices on the sphere*, Physics D **148**, pp. 97–135 (2001).
- [16] J. Liu and Z. Xin, *Convergence of vortex methods for weak solutions to the 2-D Euler equation with vortex sheet data*, Comm. Pure Appl. Math. **48**, pp. 611–628 (1995).
- [17] A.J. Majda, *Remarks on weak solutions for vortex sheets with a distinguished sign*, Indiana Univ. Math. Journal **42**, pp. 921–939 (1993).
- [18] P.K. Newton, *The N-vortex problem, Analytical techniques*, (Springer-Verlag, New York, 2001.)
- [19] M. Nitsche and R. Krasny, *A numerical study of vortex ring formation at the edge of a circular tube*, J. Fluid Mech. **276**, pp. 139–161 (1994).
- [20] S. Pekarsky and J.E. Marsden, *Point vortices on a sphere: Stability of relative equilibria*, J. Math. Phys. **39**, pp. 5894–5907 (1998).
- [21] L.M. Polvani and D.G. Dritschel, *Wave and vortex dynamics on the surface of a sphere*, J. Fluid Mech. **255**, pp. 35–64 (1993).
- [22] P.G. Saffman, *Vortex dynamics*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992).
- [23] T. Sakajo, *Motion of a vortex sheet on a sphere with pole vortices*, Phys. Fluids **16**, pp. 717–727 (2004).
- [24] T. Sakajo, *The motion of three point vortices on a sphere*, Japan J. Indust. Appl. Math. **16**, pp. 321–347 (1999).
- [25] T. Sakajo, *Transition of global dynamics of a polygonal vortex ring on a sphere with pole vortices*, to appear in Physica D (2004).
- [26] 坂上貴之 渦層の時間発展と特異点 ～それでも渦層は巻き上がる～?, 物性研究 **82** No.1, pp. 1–44 (2004).
- [27] T. Sakajo, *High-dimensional heteroclinic and homoclinic connections in odd point-vortex ring on a sphere*, submitted to Nonlinearity.