

# 非線形 MEMS 共振器の共存解切り替えに関する一検討

八尾 惇<sup>†</sup> ナイク スケト<sup>†</sup> 引原 隆士<sup>††</sup>

<sup>††</sup> 京都大学大学院 工学研究科 電気工学専攻

〒 615-8510 京都市西京区京都大学桂

E-mail: <sup>†</sup>{yao,naik}@dove.kuee.kyoto-u.ac.jp, <sup>††</sup>hikihara@kuee.kyoto-u.ac.jp

あらまし 近年注目を集めている MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) デバイスのひとつとして, MEMS 共振器がある. Unterreithmeier らは, 応答曲線にヒステリシス特性を有する両持ち梁の MEMS 共振器において, 駆動周波数を一定に保ったまま共存解を切り替えることが可能であることを示した. 本報告では, この結果を受け, 共振器における共存解の切り替えに時間遅れ入力を用いたフィードバック制御を適用することを検討する. まず, 数値計算によりその制御の可能性について確認する. さらに, 実験において検証するために, ヒステリシス特性を有する MEMS 共振器を作製し, その特性を得た. これらについてまとめる.

キーワード MEMS; 共振器; 切り替え; ヒステリシス特性; 時間遅れ入力を用いたフィードバック制御

## A Study on Switching Method for Coexisting Solutions in a Nonlinear MEMS Resonator

Atsushi YAO<sup>†</sup>, Suketu NAIK<sup>†</sup>, and Takashi HIKIHARA<sup>††</sup>

<sup>††</sup> Kyoto University, Department of Electrical Engineering

Katsura, Nishikyo, Kyoto, 615-8510 Japan

E-mail: <sup>†</sup>{yao,naik}@dove.kuee.kyoto-u.ac.jp, <sup>††</sup>hikihara@kuee.kyoto-u.ac.jp

**Abstract** Recently, MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) resonator has been extensively studied. Unterreithmeier *et al.* has suggested switching method for coexisting solutions in a MEMS resonator of doubly fixed beam with hysteresis at a single frequency. In this report, we apply the time-delayed feedback control to switch coexisting solutions. The availability of the control is numerically confirmed. In addition, MEMS resonators were designed and fabricated to obtain hysteretic characteristics.

**Key words** MEMS; resonator; switching; hysteretic characteristics; time-delayed feedback control

### 1. はじめに

MEMS (Micro Electro Mechanical Systems) デバイスは可動機械要素と電気要素を半導体微細加工技術によって一体化した微小デバイスのことで, 現在研究・開発が盛んに行われている [1]. 近年注目を集めている MEMS デバイスのひとつとして, MEMS 共振器がある. 両持ち梁の MEMS 共振器は, 通常応答曲線の線形領域で使用される. しかしながら, この共振器は, 両端が固定されているため, 梁を外から駆動すると梁の屈曲によって梁内に張力を生じ, 中程度の大振幅のときには非線形スティフネスが現れる [1]~[4]. このような非線形強制振動系では, 応答曲線にヒステリシス特性を有し, 2 種類の安定な定常状態の解と 1 種類の不安定な定常状態の解が存在する [4]. こ

の非線形強制振動系において, 周波数を準静的に変化させると, ヒステリシス特性が存在する領域の境界で, 分岐により振幅のジャンプが見られる [4]. このようなヒステリシス特性を有する MEMS 共振器において, 例えば 2 つの振動状態 (2 種類の安定な共存解) をメモリとして使用する提案がなされており [5], 共存解を切り替える制御ができると, メモリの状態の加除ができるなどの可能性が拓がる.

近年, Unterreithmeier らは, 応答曲線にヒステリシス特性を有する両持ち梁の MEMS 共振器において, 駆動周波数を一定に保ったまま安定な共存解を切り替えることが可能であることを示した [2]. 彼らは, 安定な共存解を切り替えるために, 外部より大きな余弦波を制御信号として加えている. しかしながらその結果, 梁に強い応力が加わり, 繰り返しの切り替えにおい

て耐久性が問題になる可能性がある。また、与えられている制御信号は、梁の振動にノイズなどが発生し偏差が存在する場合、共存解が適切に切り替わらないなどの動作について不確定な要因がある。

さて、時間遅れ入力を用いたフィードバック制御 [6] は連続系のカオス制御 [7] の一手法として Pyragas により提案された。この制御法はシステムの正確なモデルを必要とせず、カオスアトラクタに内在する特定の不安定周期解を安定化できるという特性を持つ [6]。本報告では、両持ち梁の共振器における共存解の切り替えに、この時間遅れ入力を用いたフィードバック制御を適用する。時間遅れ入力を用いたフィードバック制御は以下の理由で、両持ち梁の共振器における共存解の切り替えに適した制御法と考えられる。まず、本制御法は連続時間型の制御である。そのため、ノイズに強い [8] などの利点があり MEMS デバイスの制御にも有効であると考えられる。また、これまでも実システムにも適用され、その有効性が実証されている [9], [10]。次に、本制御法は制御対象の厳密なモデルを必要とせず、目標とする解の周期が明らかであれば、現在の出力と目標とする周期分だけ過去の出力の偏差を用いてフィードバック制御することにより適用ができる。

以下では、両持ち梁の共振器における共存解の切り替えに、時間遅れ入力を用いたフィードバック制御を適用し、その切り替えの可能性を数値計算により検討する。また、製作した共振器の特性を示し、本制御法の適用の可能性を検討する。まず、2 節で MEMS 共振器とその定常状態について述べ、3 節で共存解を切り替える方法を提案し、その有効性を数値計算により検討する。4 節では、製作した共振器の特性を示し、議論する。最後に、5 節で結果をまとめる。

## 2. MEMS 共振器とその定常状態

本節では、図 1 に示す両持ち梁の MEMS 共振器 [11] を検討する。同図における両持ち梁は、材質が窒化ケイ素、長さ  $35\mu\text{m}$ 、幅  $0.2\mu\text{m}$ 、厚さ  $0.1\mu\text{m}$  である。同 MEMS 共振器において、両持ち梁の振動を表す偏微分方程式に関して、一次モードの振動振幅のみに着目すると、以下の式に記述できる [2]。

$$\frac{d^2 x^*}{d\tau^2} + \frac{\omega_0^*}{Q} \frac{dx^*}{d\tau} + (\omega_0^*)^2 x^* + \alpha_3^* (x^*)^3 = k \cos \omega^* \tau \quad (1)$$

ここで左辺の、第一項は慣性項、第二項は減衰項、残りの項  $x^* + \alpha_3^* (x^*)^3$  は非線形復元項、右辺は強制外力項である。また、文献 [2] に従い、 $x^*$  は変位、 $\omega_0^* (= 8.03075 \text{ MHz})$  は固有周波数、 $Q (= 1.2 \times 10^5)$  は Q 値、 $\alpha_3^* (= 9 \times 10^{26} (\text{ms})^{-2})$  は非線形復元係数、 $k (= 1500 \text{ ms}^{-2})$  は駆動振幅、 $\omega^*$  は駆動周波数とする。式 (1) を  $x^* = a_c x$ 、 $\omega_0^* \tau = t$ 、 $\omega^* = \omega \omega_0^*$  により無次元化すると以下の式が得られる。

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{Q} \frac{dx}{dt} + x + \alpha_3 x^3 = k_e \cos \omega t \quad (2)$$

$a_c (= 6.0 \text{ nm})$  を臨界変位 [2]、 $\alpha_3 (= 1.273 \times 10^{-5})$  を非線形復元係数、 $k_e (= 9.818 \times 10^{-5})$  を駆動振幅としている。この MEMS 共振器の周波数応答曲線は図 2 のように得られる。同図におい

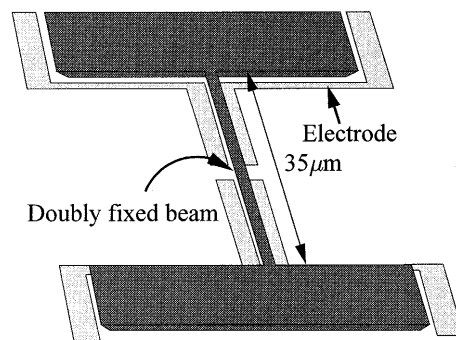


図 1 MEMS 共振器の概略図

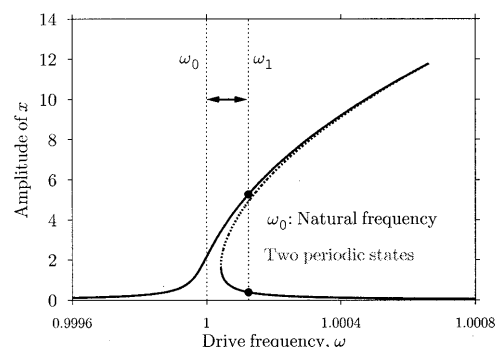


図 2 周波数応答曲線

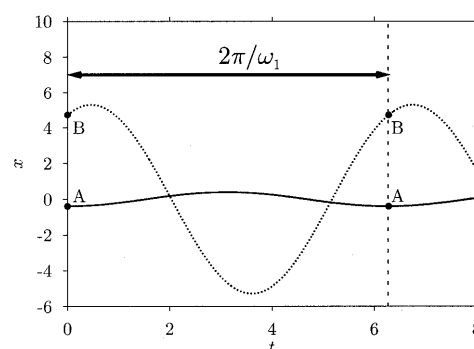
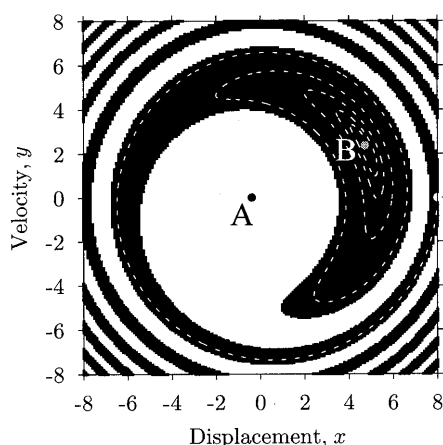


図 3 2 種類の安定な共存解の時間波形

て実線は安定な周期解を、破線は不安定な周期解をそれぞれ示す。つまり、この MEMS 共振器はある周波数領域において、2 種類の安定な周期解と 1 種類の不安定な周期解を有す。本報告では、この 2 種類の安定な共存解の間の滑らかな切り替えを検討する。以下の計算において本節及び 3.1 節では、駆動周波数を同図の  $\omega_1 (= 1.0001245210)$  に設定する。これは、制御法の検討において一般性を失わない。図 3 に  $\omega_1$  における 2 種類の安定な振動状態の時間波形を示す。同図の実線は定常非共振解、破線は定常共振解を表す。A、B は共存解における  $2\pi/\omega_1$  ごとのストロボ画像で、定常共振解のストロボ点を A、定常非共振解のストロボ点を B と呼ぶ。

図 4 に  $\omega = \omega_1$  のときの初期値空間の位相面図を示す。同図の A、B は、図 3 の A、B にそれぞれ対応する。同図は白色領域と黒色領域がそれぞれ A と B に収束する初期値空間の引力圏を示す [12]。例えば、図 4 の破線で示されるように初期値を

図 4 駆動周波数  $\omega = 1.0001245210$  における位相面図

$(x, y) = (8, 0)$  とすると、初期値が黒色領域に含まれるため定常解のストロボ点が B に収束する。2 種類の安定な共存解の収束が初期値に依存していることがわかる。次節では、本節で説明した共存解の切り替えについて検討する。

### 3. 時間遅れフィードバックを用いた切り替え

#### 3.1 時間遅れフィードバックを用いた切り替えの適用

本項では、2 種類の安定な共存解の切り替えにおいて、時間遅れ入力を用いたフィードバック制御の適用を試みる。本制御法を切り替えに応用したブロック線図を図 5 に示す。式 (2) に制御信号  $u(t)$  を加えると次式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{y}{Q} - x - \alpha_3 x^3 + k_e \cos \omega t + u(t) \\ u(t) = K\{x(t) - \text{sgn}(x(nT)) \cdot x(t-T)\} \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $y$  は変位速度、 $K$  はフィードバックゲイン、 $n$  は自然数、 $T (= 2\pi/\omega_1)$  は強制外力の 1 周期である。ただし、 $t \in [nT, (n+1)T)$  とする。以下で、 $K = -0.0001$ 、 $\omega = \omega_1$  と与える。また、 $\text{sgn}(x(nT))$  は、A から B への切り替え時には、

$$\text{sgn}(x(nT)) \equiv \begin{cases} +1 & (x(nT) \geq 0) \\ -1 & (x(nT) < 0) \end{cases} \quad (4)$$

と与える。一方、B から A への切り替え時には、

$$\text{sgn}(x(nT)) \equiv \begin{cases} +1 & (x(nT) \leq 0) \\ -1 & (x(nT) > 0) \end{cases} \quad (5)$$

と与える。このような方向性を与えることは、これまでの時間遅れフィードバックの適用例では用いられていない。

図 6 に上述の時間遅れ入力を用いたフィードバック制御により、2 種類の安定な共存解の切り替えを試みた結果を示す。同図の実線が A から B への切り替え、破線が B から A への切り替えにおける 1 周期ごとのストロボ点の変化を示している。制御信号入力後の過渡状態は長い、周期解の滑らかな切り替えが達成される。本制御法の切り替えは、1 周期ごとの変位  $x$  の

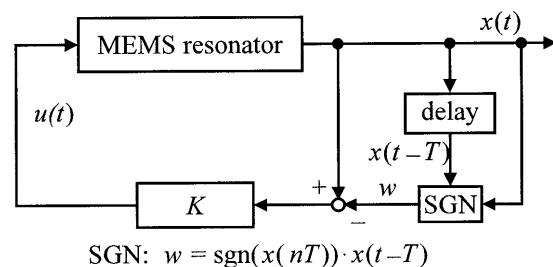


図 5 時間遅れ入力を用いたフィードバック制御のブロック線図

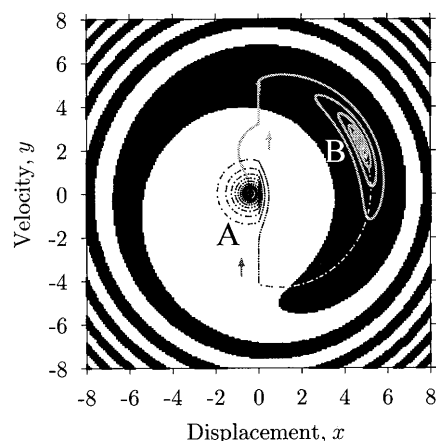


図 6 時間遅れ入力を用いたフィードバック制御による安定な共存解の切り替え

ストロボ点が同図において 0 以上か、0 以下かを判断している。そのため、変位  $x$  のストロボ点が 0 付近を振動し、その後周期解の切り替えが達成される。

図 7 に制御信号  $u$  の変化を示す。周期解の滑らかな切り替えが達成された後に制御信号がほぼ 0 となることが確認できる。切り替えが達成された際に、制御入力である  $K(x(t) - x(t-T))$  は、 $x(t)$  が周期  $T$  の周期解となるためゼロとなる。

図 8 に、本制御法の A から B への切り替えにおける初期値依存性を示す。同図において、点列がある範囲が制御を適用した際に、B へ収束する領域を示している。つまり、同図領域においては、すべての初期値より B への切り替えの達成が可能であることを確認できる。同様に、図 9 は本制御法の B から A への切り替えにおける初期値依存性を示している。B から A への切り替えの際には、必ずしもすべての初期値領域で A への切り替えが可能ではないことを示している。

#### 3.2 駆動周波数の変更

本項では、本制御法が駆動周波数を変更されても、有効に機能することを数値計算により確認する。目標とする解の周期を 1 周期に固定すると、本制御法は現在の出力と 1 周期分過去の出力の偏差を用いてフィードバック制御するため、駆動周波数に依存せずに機能する。例えば、図 10 に駆動周波数  $\omega = 1.000083441$ 、フィードバックゲインは前項と同じ  $K = -0.0001$  とし同制御法により、2 種類の安定な共存解の切り替えを試みた結果を示す。同図は図 6 と同様に実線が A から B への切り替え、破線が B から A への切り替えにおける 1 周期ごとのストロボ点の

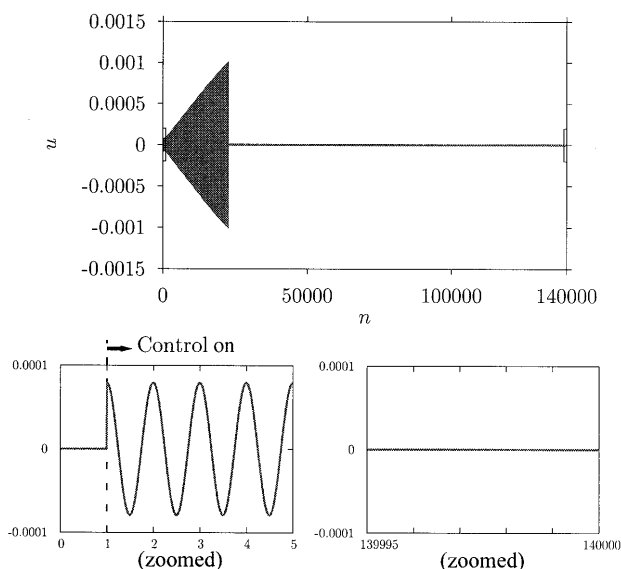


図7 非共振解から共振解への時間遅れ入力を用いたフィードバック制御における制御入力

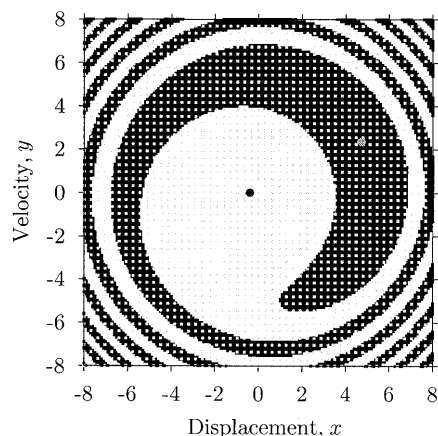


図8 共振の定常解に収束する初期値

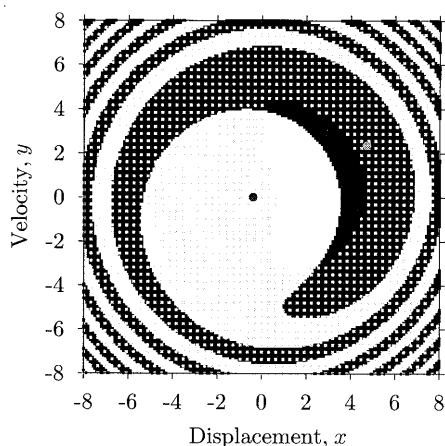


図9 非共振の定常解に収束する初期値

変化を示している。 $\omega = \omega_1$ と同様に本制御法が適切に機能している。

本節の数値計算結果より、時間遅れ入力を用いたフィードバック制御に方向性を与えることにより、両持ち梁の共振器におけ

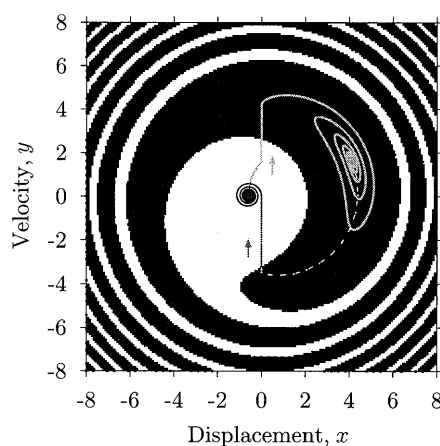


図10 駆動周波数 $\omega = 1.000083441$ の場合における、時間遅れ入力を用いたフィードバック制御による安定共存解の切り替え

る共存解の切り替えの可能性が示され、切り替え達成後に制御信号がほぼ0となることがわかった。また、本制御法の初期値依存性を確認した。さらに、本制御法は共振器の駆動周波数が変わっても、有効に機能することを明らかにした。

#### 4. MEMS 共振器の製作

前節では、図1における時間遅れ入力を用いたフィードバック制御の有効性を数値計算により示した。本節では、実際に製作したMEMS共振器の試作例を2つ示し、その特性について述べる。図11に作製した両持ち梁のMEMS共振器の一例を示す。本共振器は、材質がケイ素、長さ $300\mu\text{m}$ 、幅 $3\mu\text{m}$ 、厚さ $25\mu\text{m}$ である。図11の共振器では、共振周波数が $396\text{kHz}$ と高く、また駆動電圧が高くデータの取得が困難であった。図12に異なる共振器の製作例を示す。本MEMS共振器の詳細は文献[13]にある。同文献において示されているように、このMEMS共振器は $x$ 軸方向にのみ振動する。また、この文献の数値計算より、本MEMS共振器は強制外力が大きくなると、サドルノード分岐が生じ2種類の安定な周期解と1種類の不安定な周期解を示すことが確認できる。

$50\text{Pa}$ の真空容器内でインピーダンス・アナライザ (Agilent Technologies 製、型番 4294A) を用いて特性測定を行った。本MEMS共振器の左右一方の電極にインピーダンス・アナライザのハイポートを、アンカーの電極にローポートを接続する。図13に直流電圧 $V_d$ を $5\text{V}$ とし、交流電圧 $V_{ac}$ を $100\text{mV}$ とし、周波数を $8.70\text{kHz}$ と $8.73\text{kHz}$ 間で単調にスweepした際の、抵抗の測定結果を示す。同図は周波数のスweep方向をアップスweepとダウンスweepの2種類とした測定結果である。同図の実線がスweep方向をアップスweep、破線がスweep方向をダウンスweepとした結果に対応する。また、周波数のスweep方向により共存解が存在しない周波数領域において測定結果に誤差がある理由としては、測定中に容器内の真空度が変化したこと及び、測定値にノイズが乗っていることなどが考えられる。本実験結果から、図12のMEMS共振器はヒステリシス特性を有し、2種類の安定な共存解を有す

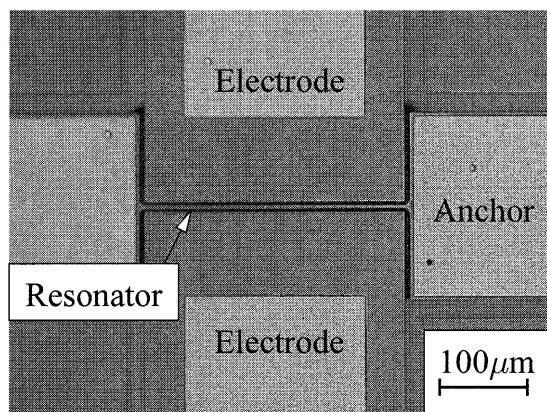


図 11 製作した両持ち梁の MEMS 共振器

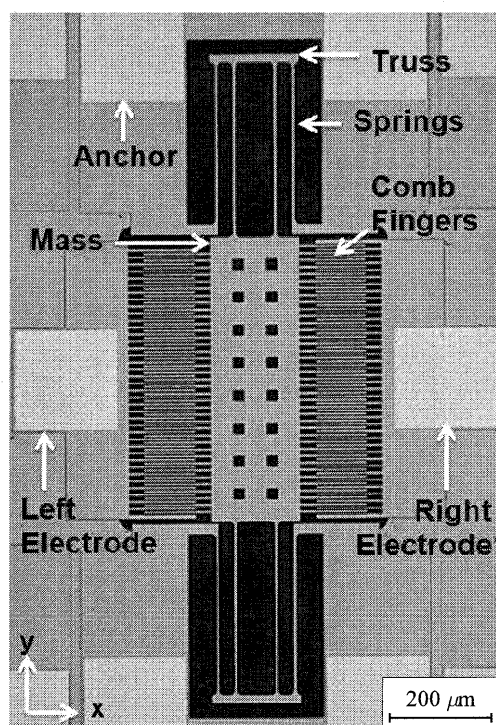


図 12 製作した MEMS 共振器

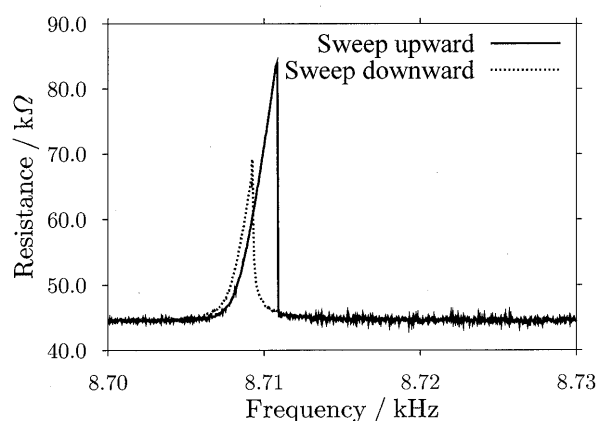


図 13 図 12 の MEMS 共振器における周波数応答曲線

ことがわかる。よって、このデバイスを用いて、安定な共存解の切り替え制御の実験が可能と考えられる。

## 5. おわりに

本報告では、両持ち梁の共振器における共存解の切り替えに時間遅れ入力を用いたフィードバック制御を適用し、その可能性を数値計算によって検討した。その結果、本制御法が共存解を切り替えることが可能であることを示した。また、本制御法は定常共振解へ、いかなる初期値からでも収束することを確認した。しかしながら、定常非共振解へは必ずしもすべての初期値から収束するわけではない。さらに、駆動周波数を変更しても、本制御法が有効に機能することを明らかにした。最後に、実験における本制御法の有効性の検証に向けて、MEMS 共振器を製作し、その一つの共振器においてヒステリシス特性を得た。今後、実験的に共存解の切り替えを検証していくことを考えており、順次報告する予定である。

## 謝 辞

本研究を遂行するにあたり著者の一人(八尾)は、時間遅れ入力を用いたフィードバック制御に関して有益な御教示を頂いた京都大学 横井裕一氏及び、本研究に関して貴重な御討論を頂いた同 南政孝氏に深く感謝の意を表します。

最後に、本研究の一部は京都大学グローバル COE プログラム「光・電子理工学の教育研究拠点形成」及び、文部科学省地域イノベーションクラスター事業の支援を受けたことを記し、謝意を表します。

## 文 献

- [1] V. Kaajakari, Practical MEMS, (Small Gear Publishing, 2009) chap. 1.
- [2] Q. P. Unterreithmeier, T. Faust, and J. P. Kotthaus, Non-linear Switching Dynamics in a Nanomechanical Resonator, *Physical Review B*, **81** (24), 241405 (2010).
- [3] I. Kozinsky, H. W. Ch. Postama, O. Kogan, A. Husain, and M. L. Roukes, Basin of Attraction of a Nonlinear Nanomechanical Resonator, *Physical Review Letters*, **99** (20), 207201 (2007).
- [4] J. M. T. Thompson, and H. B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (John Wiley & Sons, 1986).
- [5] 山口浩司, ナノメカニカル素子の物理と応用, パリティ 2010 年 07 月号, **25** (07), 28-35 (2010).
- [6] K. Pyragas, Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Physics Letters A*, **170** (6), 421-428 (1992).
- [7] E. Ott, C. Grebogi, and A. Yorke, Controlling Chaos, *Physical Review Letters*, **64** (11), 1196-1199 (1990).
- [8] 潮俊光, カオス制御 (朝倉書店, 1996) pp. 26-36.
- [9] T. Hikiyara, and T. Kawagoshi, An experiment study on stabilization of unstable periodic motion in magneto-elastic chaos, *Physics Letters A*, **211** (1), 29-36 (1996).
- [10] K. Yamasue, K. Kobayashi, H. Yamada, K. Matsushige, and T. Hikiyara, Controlling chaos in dynamic-mode atomic force microscope, *Physics Letters A*, **373** (35), 3140-3144 (2009).
- [11] Q. P. Unterreithmeier, E. M. Weig, and J. P. Kotthaus, Universal transduction scheme for nanomechanical systems based on dielectric forces, *Nature*, **458**, 1001-1004 (2009).
- [12] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, (Springer-Verlag, 1983) p. 34.
- [13] S. Naik, and T. Hikiyara, Numerical Study on the Quasi-periodic Behavior in Coupled MEMS Resonators, 信学技報 **110** (255), (2010) NLP2010-10.