

Imaginary Lagrangean が現われる場合の
Fourier 変換

名大理 柏原 正樹

京大数研 佐藤 幹夫

〃 三輪 哲二

京大理 室 政和

§1 問題の説明

鈴木氏の講演で、概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換のほとんどが、micro local calculus によって決定されることが示された。その計算は、 $f(x)^S$ あるいはその満たす holonomic system は micro local に考えると α_i^S とその満たす holonomic system にすぎない事に着目し、 α_i^S の Fourier 変換という簡単な手続きを、 T^*M 上で fiber 方向に総計する事によって求めたのであった。

その際、 α_i^S を標準形とするのだから、計算に現われる Lagrangean が real であることが当然必要である。そうはならない最も簡単な例として $(x_1^2 + \dots + x_n^2)^S$ がある。しかし言うまでもなく、この場合は直接計算して

答は得られる。実は、もっと複雑な例においても, microlocal な標準形として, $(x_1^2 + \dots + x_n^2)^S$ を持ってくれば 前と同様な手続きで 計算が遂行できる。その原理といくつかの例を与えてみたい。

§2 標準形と接続行列

$V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}^*$ の一点を x_0^* とする。 x_0^* を通る三つの Lagrangean $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2 \subset V \times V^*$ があり $\mathcal{M} = \bigotimes f^S$ を x_0^* の近くで考えた時 その support が $\Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ にあるとしよう。

(仮定1) 実接触変換で $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ は次の標準形に変換される。

$$\Lambda_2 : \quad \xi_1 = \dots = \xi_\ell = x_{\ell+1} = \dots = x_n = 0$$

$$\Lambda_1 : \quad x_1^2 + \dots + x_\ell^2 = 0 \text{ の conormal}$$

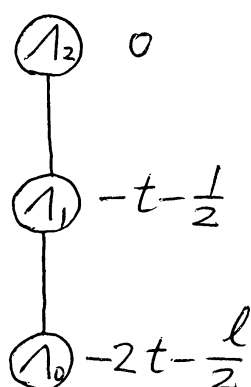
$$\Lambda_0 : \quad x_1 = \dots = x_\ell = x_{\ell+1} = \dots = x_n = 0$$

(仮定2) $\mathcal{M}$ は $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ で "simple" また交わりの generic point で "symbol ideal" が reduced とする。

$$\begin{aligned}
 (\text{仮定3}) \quad t &= \text{ord}_{\lambda_2} f^S - \text{ord}_{\lambda_1} f^S - \frac{1}{2} \\
 &= \text{ord}_{\lambda_1} f^S - \text{ord}_{\lambda_0} f^S - \frac{\ell-1}{2}
 \end{aligned}$$

この時, holonomic system $\mathcal{M}$ は x_0^* の近くで $g_\ell^t = (x_1^2 + \dots + x_\ell^2)^t$ の満たす holonomic system と一致する。

実際, g_ℓ^t の満たす方程式の support が (仮定1) の $\lambda_0 \cup \lambda_1 \cup \lambda_2$ になり, (仮定2) (仮定3) が満たされる事は明らかである。holonomy diagram で言えば



逆に, 仮定を満たす $\mathcal{Q}f^S$ に対しては, 適当な分数階の楕円型擬微分作用素 $\mathcal{Q}$ で generator を取り換える事によ

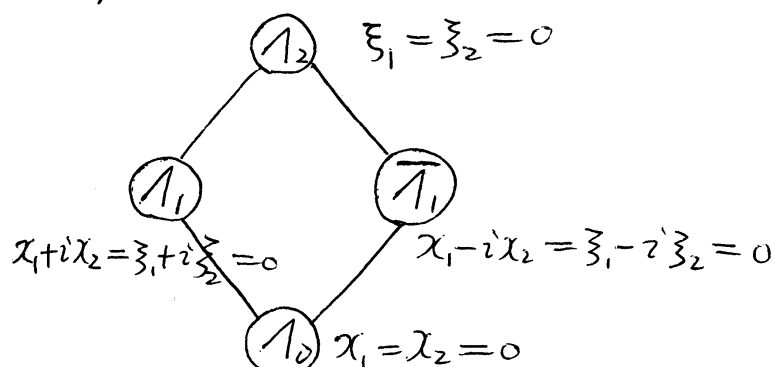
り $\text{ord}_{\lambda_2} \mathcal{Q}f^S = 0$ とする事ができ, この時

$$\begin{aligned}
 (\text{仮定3}) \quad \text{ord}_{\lambda_1} \mathcal{Q}f^S &= -t - \frac{1}{2} \\
 \text{ord}_{\lambda_0} \mathcal{Q}f^S &= -2t - \frac{\ell}{2}
 \end{aligned}$$

となる。(仮定2) と order についての情報から,
 $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ の generic point 及び $\Lambda_0 \cap \Lambda_1$,
 $\Lambda_1 \cap \Lambda_2$ の generic point での holonomic system
 の構造が決まってしまう。残る所は, $\dim \leq n-2$ であ
 るから 次の定理により 至る所決まってしまう。

定理(柏原) $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ が点 $x_0^* \in T^*X$ の
 近くで定義された holonomic system で $\dim S \leq n-2$
 なる 集合 $S \subset T^*X$ を除いて $\mathcal{M}_1|_{T^*X-S} \cong \mathcal{M}_2|_{T^*X-S}$
 ならば 実は至る所で $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$ である。

厳密に言うと $\ell=2$ は様子が異なる。holonomy
 diagram は



となる。この場合は, (仮定1) と (仮定2) だけから,
 方程式の標準形が $(x_1 + ix_2)^{S_1} (x_1 - ix_2)^{S_2}$ になる
 事がわかる。特に $S_1 \equiv S_2 \pmod{\mathbb{Z}}$ なる場合は,

鈴木氏が取り扱った概均質ベクトル空間で、そこにおける係数体 $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R} + i\mathbb{R}$ と思ってそれを複素化した時の相対不変式が $f^S \bar{f}^{S+l}$ ($S \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{Z}$) の場合の標準形であり、その場合の Fourier 変換は f^S についての結果から自動的に計算される事を注意しておく。 $S_1 = S_2$ となるのが、我々の今扱っている場合である。

次に、接続行列を求める。その方法は、数研研講究録として刊行された “Microlocal calculus と概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換 (柏原 - 三輪)” (以下 [K-M] と略称する。) に modify すればよい。以下それを述べるが細かな点は上記を参照してほしい。

$$u = 2^{\frac{n-l}{2}} (x_1^2 + \dots + x_l^2)^{-\frac{\lambda+l}{2}} \delta(x_{l+1}) \dots \delta(x_n).$$

の Principal symbol を計算すると、

$$\sigma_{1,2}(u) = (x_1^2 + \dots + x_l^2)^{-\frac{\lambda+l}{2}} \sqrt{\frac{dx_1 \dots dx_l d\beta_{l+1} \dots d\beta_n}{dx_1 \dots dx_n}}$$

$$\sigma_{1,0}(u) = 2^{-\lambda-\frac{l}{2}} \frac{\Gamma(-\frac{\lambda}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda+l}{2})} \times$$

$$(\xi_1^2 + \dots + \xi_\ell^2)^{\frac{\lambda}{2}} \sqrt{\frac{d\xi_1 \dots d\xi_n}{dx_1 \dots dx_n}}$$

となる。これは、 $(x_1^2 + \dots + x_\ell^2)^{-\frac{\lambda+\ell}{2}}$ の Fourier 変換を計算すればよい。(Gel'fand - Shilov; Generalized functions Vol.1 などにある)

さて標準型に直す前の Λ_0, Λ_2 において、そこで与えられた microfunction solution $u_{\Lambda_0}, u_{\Lambda_2}$ が、ひと続きの solution となるための条件を求めてみる。

$\Lambda_0 \cap \Lambda_2 = S$ とし、 S の generic pt. S_1 の neighborhood で考える。以下単に Λ_0, Λ_2, S と書くとき、それは、 S_1 の nbd と Λ_0, Λ_2, S の intersection の意味であるとして了解される。

$\dim S = n - \ell$ である。 Λ_0 上の函数 g_0 で、次の条件を共にするものを作る。

i) $g_0|_S = 0$ かつ $dg_0|_S = 0$.

ii) g_0^{loc} を $g_0(\lambda + \varepsilon t) = \varepsilon^2 g_0^{loc}(\lambda, t) + O(\varepsilon^3)$

$(\lambda, t) \in T_S \Lambda_0$ により $T_S \Lambda_0$ の函数として定義することが出来る。そして $Og_0(\ell)$ は自然にこの normal bundle に作用している。すると g_0^{loc} は λ についての 2 次式で $Og_0(\ell)$ 相対不変。

同様に Λ_2 上に φ_2 をつくる事ができる。

すると $\varphi_0^{loc}, \varphi_2^{loc}$ が S の座標に関する, non-zero analytic function 係 ξ のでいて一意に定まることは, $\varphi_0(l)$ 相対不変性より明らかである。

$(T_S \Lambda_0) \times_S (T_S \Lambda_2)$ は $T_S \Lambda_0$ の座標 $\xi, \{(\xi, \xi)\}$, $T_S \Lambda_2$ の座標 $\xi, \{(\xi, \xi)\}$ ととり, ξ と ξ は 2次元の symplectic vector space と ($\xi \in S$ を fix したとき) なるようにとることが出来る。

$\varphi_0^{loc}, \varphi_2^{loc}$ は $T_S \Lambda_0, T_S \Lambda_2$ 上の函数であるが,

$$(T_S \Lambda_2) \times_S (T_S \Lambda_0) = (TS)^\perp$$

$\swarrow$
 $T_S \Lambda_2$

$\searrow$
 $T_S \Lambda_0$

の projection により, $(TS)^\perp$ 上に落ちる。この事をいふことが出来る。

$$\xi_2 = 2^{-\frac{l}{2}} \frac{d\{x_1, \varphi_2^{loc}\} \wedge \dots \wedge d\{x_l, \varphi_2^{loc}\}}{(\det \{x_i, \varphi_2^{loc}\})^{\frac{1}{2}}}$$

$$\xi_0 = 2^{-\frac{l}{2}} \frac{d\{\xi_1, \varphi_0^{loc}\} \wedge \dots \wedge d\{\xi_l, \varphi_0^{loc}\}}{(\det \{\xi_i, \varphi_0^{loc}\})^{\frac{1}{2}}}$$

ここで $\{, \}$ は (x, ξ) space の Poisson Bracket

と定義すれば、これは $\{(x, \xi)\}$ という symplectic 座標のとり方にはよらない。

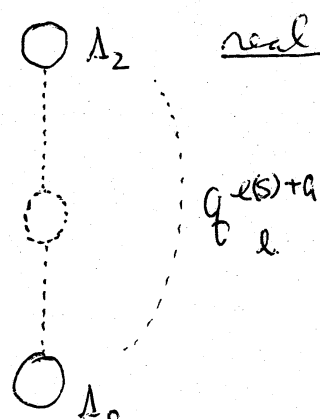
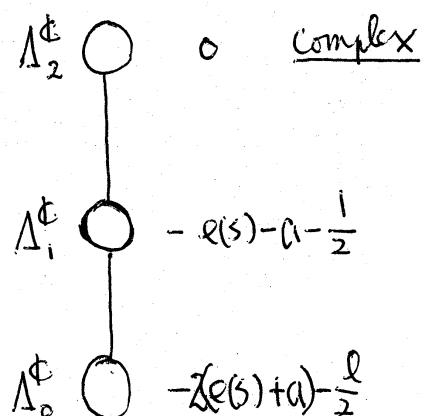
$$\psi: T_S \Lambda_2 \times_S T_S \Lambda_0 \hookrightarrow V_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}}^*$$

を $s \in S$ にうつし、 $T_S \Lambda_2 \ni \Lambda_2 \hookrightarrow T_S \Lambda_0 \ni \Lambda_0$ へうつす $(TS)^s$ の s の nbd で定義された、両方の space の symplectic structure が、Compatible な埋め込み写像であるとする。実際、これは仮定により存在する。

概均質ベクトル空間にあてはめて接触変換で不変な比をつくろう。

(G, V, ω) を正則な概均質ベクトル空間で、相対不変式は一般には多数あるとする。記号は [K-M] にあわせる。

$\mathcal{F}^s$ のための holonomic system $\mathcal{O}_{\mathcal{F}^s} \in T^*V$ にちあげた $\mathbb{C}$ -Module を $\mathcal{M}$ とし、その局所化として、次のような holonomy diagram を持つ 2 次型式があらわれたとする。



さて η を、 S 上の $(n-1)$ form とし、次の比を考えると、
これは有限の意味を持ち、接触変換や $\varphi_0, \varphi_2, \alpha, \xi, \eta$,
などのとり方には、depend しない。

$$\begin{aligned} & \sigma_{\Lambda_0}(\mu_{\Lambda_0}) |\varphi_0|^{(2(s)+a)+\frac{\rho}{2}} \exp \frac{\pi}{4} [\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_0}, \mu) + \tau(\lambda_{\Lambda_0}, \lambda_{\Lambda_2}, \mu)] \\ & \times \sqrt{\frac{dx}{\psi_*(\xi_0) \wedge \eta}} \Big|_S \\ & \therefore \sigma_{\Lambda_2}(\mu_{\Lambda_2}) |\varphi_2|^{-(2(s)+a)} \left[\frac{|\{\varphi_0, \varphi_2\}|}{2 \cdot 2(s)} \right]^{-(2(s)+a+\frac{\rho}{4})} \exp \frac{\pi}{4} \tau[\lambda, \lambda_{\Lambda_2}, \mu] \\ & \times \sqrt{\frac{dx}{\psi_*(\xi_2) \wedge \eta}} \Big|_S \end{aligned}$$

ただし、ここに $[\quad]$ 内の分母の $2 \cdot 2(s)$ は、

$$S_i = \langle A_i x, y \rangle / \delta x_i(A) \quad \delta x_i(A_j) = 0 \quad i \neq j \\ \neq 0 \quad i = j$$

で定義された、 W 上の函数である。また $V \times V^*$ の座標を (x, y) であらわして置く。

$\therefore$ $\varphi_0^{loc}, \varphi_2^{loc}$ は S 上の non-zero analytic function のぞいてきまる。 $\varphi_2^{loc} = f \varphi_2^{loc} \quad f \in \mathcal{O}_S$ とするとき、 $\varphi_2' = f \varphi_2 + \varphi_2''$ として $\varphi_2'' = 0$ するわけ $\varphi_2' = f \varphi_2 (1 + \varphi_2'')$ 。 φ_2'' は S 上 0 ととるこがとができる。 φ_2 のかわ

りに、 φ_2' とおけば、比の右側 は $f^{-(\ell(s)+a)} f^{\ell(s)+a+\frac{\rho}{4}} \left(f^{-\frac{\rho}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ 倍されて、変化なし。 φ_2 のとり方によらぬことも同様の考察で、わかる。

標準型の場合に、この比の値を計算してみよう。5 ページの principal symbols において、 $\lambda = -2(\ell(s)+a) - \ell$ を代入すればよい。Maslov index はすべてきえる。そして

$$\varphi_0 = \xi_1^2 + \dots + \xi_\ell^2 = y_1^2 + \dots + y_\ell^2.$$

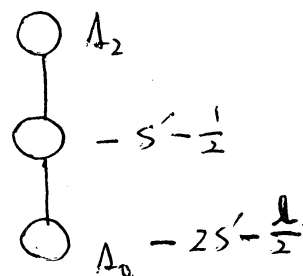
$$\varphi_2 = x_1^2 + \dots + x_\ell^2 = \quad \ell(s) = \langle x, \xi \rangle / 2$$

とおけばよい。いずれも、標準型の場合 holonomic system 及び、holonomy diagram は、

$$\langle Ax, D_x \rangle - S' \delta \chi(A) f^{S'} = 0$$

$$A \in \text{exo}(\ell)$$

$$S' = \ell(s) + a$$



となることによ、てわかる。したが、て、求める比は

$$\frac{\Gamma(\ell(s)+a+\frac{\rho}{2})}{\Gamma(-\ell(s)-a)} \quad \cdot \quad 1$$

となる。

さて再び、もとにもどし、 $\mathcal{W}$ の solution の Λ_2 における base として、 $\sigma_{\Lambda_2}(u_{\Lambda_2}) = f_{\Lambda_2}^S \sqrt{\omega_{\Lambda_2}} / \sqrt{dx}$
 Λ_0 における base として、 $\sigma_{\Lambda_0}(u_{\Lambda_0}) = f_{\Lambda_0}^S \sqrt{\omega_{\Lambda_0}} / \sqrt{dx}$
 とするものとする。

C_2 ; C_0 をどう取れば、 $C_2 u_{\Lambda_2}$ と、 $C_0 u_{\Lambda_0}$ とが、ひとつの solution となるかを知らたい。

$$\varphi_0 = (f_{\Lambda_0}^X)^{-\frac{1}{e(x)}}$$

$$\varphi_2 = (f_{\Lambda_2}^X)^{\frac{1}{e(x)}}$$

$$f_{\Lambda_0}^X = f^X / a_{\Lambda_0}^X(s)$$

$$f_{\Lambda_2}^X = f^X / a_{\Lambda_2}^X(s)$$

と、とるこがこえる。 $a_{\Lambda_0}^X(s) = e(s)^2 e(x) a_{\Lambda_2}^X(s)$ に注意

して、

$$\{\varphi_0, \varphi_2\} = \left\{ e(s)^2 \left(f^X / a_{\Lambda_2}^X(s) \right)^{-\frac{1}{e(x)}}, \left(f^X / a_{\Lambda_2}^X(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\}$$

$$= \left(f^X / a_{\Lambda_2}^X(s) \right)^{-\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s)^2, \left(f^X / a_{\Lambda_2}^X(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\}$$

$$= 2 e(s) \left(f^X / a_{\Lambda_2}^X(s) \right)^{-\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s), \left(f^X / a_{\Lambda_2}^X(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\}$$

ここで、 $e(s) = \sum_{i=1}^g a_i S_i$ とおき、 $\mathcal{W}$ に入るものとすると、

$$\left\{ e(s), \left(f^X / a_{\Lambda_2}^X(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{a_{\Lambda_2}^x(s)} \right)^{\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s), (f^x)^{\frac{1}{e(x)}} \right\} \\
&= \left(\frac{1}{a_{\Lambda_2}^x(s)} \right)^{\frac{1}{e(x)}} \sum_{i=1}^k a_i \{ s_i, f^x \}^{\frac{1}{e(x)}} (f^x)^{\frac{1}{e(x)}-1} \\
&= \sum_{i=1}^k a_i \left\{ \frac{\langle A_{i3} y \rangle}{\delta x_i(A)}, f^x \right\}^{\frac{1}{e(x)}} (f^x)^{-1} \left(f^x / a_{\Lambda_2}^x(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^k a_i f_i^x \right) \cdot \left(\frac{1}{e(x) f^x} \right) \left(f^x / a_{\Lambda_2}^x(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}}
\end{aligned}$$

$$|T^{\mu}\rangle. \quad \{\varphi_0, \varphi_2\}|_S = 2 e(s).$$

以上の計算は、すべし、 S 上に制限して行つたものである。

次に

$$\begin{aligned}
& f_{\Lambda_0}^S \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_0}}{dx}} \left| (f_{\Lambda_0}^x)^{-\frac{1}{e(x)}} \right|^{(e(s)+a)+\frac{\theta}{2}} \sqrt{\frac{dx}{\varphi_*(s_0)\wedge\eta}} \Big|_S \\
& \cdot f_{\Lambda_2}^S \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_2}}{dx}} \left| (f_{\Lambda_2}^x)^{\frac{1}{e(x)}} \right|^{-(e(s)+a)} \sqrt{\frac{dx}{\varphi_*(s_2)\wedge\eta}} \Big|_S.
\end{aligned}$$

が、 $|:|$ になることを示そう。

$$\text{今 } \varphi_0 = (f_{\Lambda_0}^x)^{-\frac{1}{e(x)}} \quad \varphi_2 = (f_{\Lambda_2}^x)^{\frac{1}{e(x)}} \quad \text{とおく。}$$

$$\text{すると } f_{\Lambda_0}^S = f_{\Lambda_0}^{xS} = ((\varphi_0)^{-e(x)})^S = \varphi_0^{-e(s)}$$

$$f_{12} = f_{\Delta_2}^{\chi_S} = ((f_2)^{\text{etm}})^S = \varphi_2^{-e(s)}$$

したがって、上の比は、

$$\frac{\sqrt{\omega_{\Delta_0}} |\varphi_0|^{a+\frac{p}{2}} (\sqrt{\varphi_*(\zeta_0) \wedge \eta})^{-1} \Big|_S}{\sqrt{\omega_{\Delta_2}} |\varphi_2|^{-a} (\sqrt{\varphi_*(\zeta_2) \wedge \eta})^{-1} \Big|_S}.$$

これは、正則函数(の絶対値)の比であるから、2乗して、 φ^{-1} でひきかえし、また φ_0, φ_2 は S 上の2次以上で、よえる項は cut して比には影響しない。

したがって、以下 $T_S \Delta_2 \times_S T_S \Delta_2 / T_S = (T_S)^+$ 上に、正準座標 $(x_1, \dots, x_l, y_1, \dots, y_l, s)$ (ただし s は S 上の座標である。) を入れて考える。

$\mathcal{G}_2 = ((f_{\Delta_2}^{\chi_S})^{\frac{1}{2\omega}})^{\text{loc}}$ としてとると、これはつまり、正準座標をとりにおき、かつ S 上の non zero analytic fcn. をかければ、 $\mathcal{G}_2 = x_1^2 + \dots + x_l^2$ ととることが出来る。なぜなら $\mathcal{G}_2$ は $\text{Cyc}(l)$ 相対不変であるから。

また $\widetilde{W} = \overline{\{x, \text{grad log } \varphi_2^{S'}\}; S' \in \mathcal{A} \ x \in T_S \Delta_2\}$ と定義し、 $\pi \in \widetilde{W} \rightarrow T_S \Delta_2$ の projection map と

あるとき、 $\varphi_0^{-1} = \varphi_2 \circ \pi / (c(s)^2) |_{T_S \Lambda_0}$ とおくことができることは φ_{Λ_0} , φ_{Λ_2} の定義より明らかである。そしてこれは、 $\varphi_0(l)$ の $T_S \Lambda_0$ の反傾表現の、 φ との表現と同じ。character をもつ 相対不変式であるから、 φ_0 は $\varphi'_0 = \xi_1 + \dots + \xi_l^2$ の constant 倍である。その constant term は $[k-H]$ と同じやり方で、

$$\varphi_2(x) \varphi'_0(\text{grad log } \varphi_2(x)) = 4$$

として計算することができる。

$$\text{よって } \varphi_2 = x_1^2 + \dots + x_l^2.$$

$$\varphi_2 = 4\varphi'_0 = 4(x_1^2 + \dots + x_l^2)$$

を代入して、比を書きかえよう。

$$\omega_{\Lambda_0} \cdot 4^{2(a+\frac{p}{4})} |\varphi'_0|^{2(a+\frac{p}{2})} (d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_l \wedge \eta)^{-1} |_S$$

$$: \omega_{\Lambda_2} |\varphi_2|^{-2a} (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l \wedge \eta)^{-1} |_S.$$

$$\text{一方 } \omega_{\Lambda_2} |\varphi_2|^{-2a} = \text{const} \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l \wedge \eta.$$

$$\omega_{\Lambda_0} |\varphi'_0|^{2(a+\frac{p}{2})} = \text{const} \cdot d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_l \wedge \eta.$$

と書くことができ、両 constant term は $\omega_{\Lambda_0} = \frac{\pi^*(\omega_{\Lambda_2}) ds}{C(s)}$ によって関連している。

さて上の比を δ と書くから、

$$\widetilde{W} = \overline{\{(s' \operatorname{grad} \log \varphi_0'(\xi), \xi), \xi \in T_s \Lambda_0\}}$$

と書けることに注意する。

$\widehat{C}$ はある constant > 12 .

$$\omega_{\Lambda_2} = \widehat{C} |\varphi_2|^{2a} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_l \wedge \eta$$

$$\omega_{\Lambda_1} = \frac{\pi_* (\omega_{\Lambda_2}) ds'}{C(s')} / ds'$$

ここで、 $C(s')$ とは、 Λ_0 と Λ_2 の間の C 函数の factor で、 $C(s') = s'^{(4a+l)}$ である。

$$|\varphi_0'|^{2(a+\frac{l}{2})} \omega_{\Lambda_0}$$

$$= |\varphi_0'|^{2(a+\frac{l}{2})} \frac{\pi_* (\omega_{\Lambda_2}) \wedge ds'}{C(s')} / ds'$$

$$= \widehat{C} \varphi_0'^{2a} \varphi_2^{2a} (s' \operatorname{grad} \log \varphi_0') \varphi_0'^l \operatorname{Hess}(s' \log \varphi_0'(\xi)) \\ d\xi \wedge \eta \wedge ds' / C(s') ds$$

$$= \widehat{C} \varphi_0'^{2a} \varphi_2^{2a} (\operatorname{grad} \log \varphi_0') \varphi_0'^l \operatorname{Hess} \log \varphi_0' d\xi \wedge \eta$$

$$= \widehat{C} 4^{2a} 2^l d\xi \wedge \eta.$$

$$\text{したがって、この比は } \widehat{C} : \widetilde{C} = 1 : 1$$

ただし以上の計算において、 $\varphi_0'^{s'}$ のみは holomorphic

nonic system が $(\langle A_3, D_3 \rangle - S' \delta X(A)) \varphi_0^{S'} = 0 \quad A \in \text{cyl}(l)$
 であることから $S' = \frac{\langle 3, X \rangle}{2}$ として復す。 S_1 の
 nbd では W と $\widetilde{W}$ は同じものである。

以上により $C_0 : C_2$ は求まり。

すなわち

$$C_0 : C_2 = \frac{\Gamma(\varrho(S) + a + \frac{l}{2})}{\Gamma(-\varrho(S) - a)} \exp \frac{\pi}{4} [-\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_0}, \mu) - \tau(\lambda_{\Lambda_0}, \lambda_{\Lambda_2}, \mu) + \tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_2}, \mu)]: 1$$

ここに $\exp \frac{\pi}{4} (\tau(\lambda, \lambda_{\Lambda_2}, \mu) + \tau(\lambda_{\Lambda_2}, \lambda_{\Lambda_0}, \mu) + \tau(\lambda_{\Lambda_0}, \lambda, \mu))$
 は [K-M] p83 にあるのと全く同じ方法によつて

$$\exp \frac{\pi}{4} (\tau(\Lambda_2) - \tau(\Lambda_2 \cap \Lambda_0))$$

と表す。ただし

$$\tau(\Lambda_2) = \sqrt{-1} \sum_{A \in \text{cyl}} \text{sgn}(Ax_2, -Ay_2)$$

$$\tau(\Lambda_0 \cap \Lambda_2) = \sqrt{-1} \sum_{A \in \text{cyl}} \text{sgn}(Ax_0, -Ay_2)$$

$(x_2, y_2) \cdots \Lambda_2$ の generic pt

$(x_0, y_2) \cdots \widetilde{\Lambda_0}$ の generic pt.

結局我々は、次のような公式を得る。

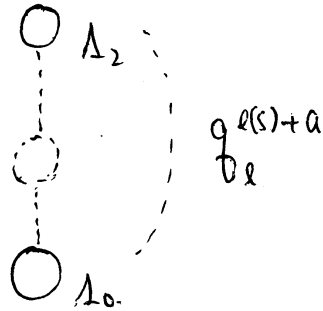
公式

$$\Lambda_2^c \bigcirc \quad 0$$

$$\Lambda_1^c \bigcirc \quad -\ell(s) - a - \frac{1}{2}$$

$$\Lambda_0^c \bigcirc \quad -2(\ell(s) + a) - \frac{1}{2}$$

complex holonomy diagram



real holonomy diagram

右のような 2 次型式の holonomy diagram を τ とし、その同伴数之比 $C_0 : C_2$ は

$$C_0 : C_2 = \left(- \frac{\sin \pi(\ell(s) + a)}{(\ell(s) + a)} \right) \Gamma(\ell(s) + a + 1) \Gamma(\ell(s) + a + \frac{p}{2})$$

$$\exp \frac{\pi}{4} (\tau(\Lambda_2) - \tau(\Lambda_2 \cap \Lambda_0)) : 1$$

§3 局所化の補題

§2の(仮定1)を判定しやすい条件で置き換えよう。

以下、概均質ベクトル空間の場合に話を限る事として、
 (G, V) を固定する。簡単のため相対不変式は1個の場合とする。それを $f(x)$ $x \in V$ とする。

$f(x)$ に対する holonomy diagram の一部分がより簡単な多項式の複素中に対する holonomy diagram になっている事がある。§2では、それが2次形式になる場合を扱ったわけだが、ここでは一般の形で扱う。

$x_0 \in V$ x_0 の G -orbit の α -normal bundle を Λ_0 としよう。 x_0 において Gx_0 に transversal な切り口を考え、 $f(x)$ をその切り口に制限したものを $f(x)$ の Λ_0 における localization といひ(あるいは x_0 における localization) $f_{x_0}^{\text{loc}}$ と書く。

$$(例) \quad G = GL(2) \times SO(3, 1)$$

$$V = \{ \text{2行4列の行列} \}$$

$$\text{作用} \quad G \ni (g_1, g_2)$$

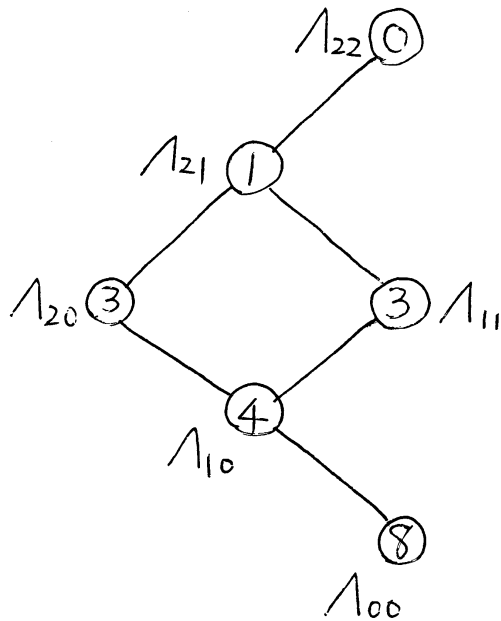
$$V \ni x$$

$$\longmapsto g_1 x g_2^{-1}$$

$$\text{相対不変式} \quad f(x) = \det x J^t x \quad J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$V \text{ の内積 } \langle x, y \rangle = \text{tr } x J^t y$$

holonomy diagram は次のようになる。



$\Lambda_{\mu\nu}$ は G orbit $\{x \in V / \text{rank } x = \mu, \text{rank } x J^t x = \nu\}$ の conormal である。 Λ_{10} における localization は次のように計算される。

代表点として $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を取る。

$$\mathfrak{gl}(2) \ni A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \quad \mathfrak{so}(3,1) \ni B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_5 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & b_6 \\ b_3 & b_5 & b_6 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると tangent vector は $Ax_0 + x_0B$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & a_2 \\ -b_2 + b_3 & -b_4 + b_5 & a_4 + b_6 & a_4 + b_6 \end{pmatrix}$$

よって conormal vector は $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_3 \\ 0 & 0 & y_4 & y_4 \end{pmatrix}$

よって切り口として

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1+x_4 \end{pmatrix}$$

が取れて, $f_{x_0}^{\text{loc}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \det \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & x_3 \\ x_3 & -2x_4 - x_4^2 \end{pmatrix}$

となる。あるいは, $-2x_4 - x_4^2$ を新しく x_4 とおけば

$$f_{x_0}^{\text{loc}} = x_4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - x_3^2$$

さらに $\sqrt{x_4 - 1} x_3$ を新しく x_3 とおけば, 簡単になって

$$f_{x_0}^{\text{loc}} = x_3^2 + x_4(x_1^2 + x_2^2)$$

となる。

⊛ Λ を diagram の中のいっつの holonomic set とする時, Λ を親とする sub-diagram とは Λ から codim 1 の交わりを伝っていける holonomic set の全体からなる diagram のことをいう。但し, ここで, codim が真に小さい向きにだけ伝っていく事が許されるとする。上の例でいえば Λ_{10} を親とする sub-diagram は $\Lambda_{20}, \Lambda_{11}, \Lambda_{21}, \Lambda_{22}$ からなる。

⊛ Lagrangean の改名

次の事が成り立つ。

命題1. Λ における $f(x)$ の localization に対する holonomic diagram は Λ を親とする aut diagram と一致する。

$\therefore \Lambda = T_{Gx_0}^* V \quad \dim Gx_0 = r$ とする。

この時 $\exists A_1, \dots, A_r \in \mathcal{O}$ があって vector field $X_i = \langle A_i x, \text{grad}_x \rangle \quad (i=1, \dots, r)$ は

x_0 で独立であり, $f(x)$ を不変にする。 $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ という座標を取る。この時 $f(x) = c(x) f(0, x_2, \dots, x_n)$

また $X_2 = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ となった時 $\neq 0$

$\widetilde{X}_2 = \sum_{i=2}^n a_i(0, x') \frac{\partial}{\partial x_i}$ は $\widetilde{f}(x') = f(0, x_2, \dots, x_n)$ を不変にする。よって r についての induction で証明される。

一般には, f^{loc} は, 適当な概均質ベクトル空間の相対不変式になるとは限らない。例えば, 上の例の多項式は, 本質的に非脊次である。しかし, 特別な場合には, f^{loc} がより簡単な概均質ベクトル空間の相対不変式 (の nonzero 冪数倍) になる事があり, その時には いろいろの計算が簡略化される。その事を, もう少し一般の形で次に述べる。*

(*) P26の注意3)を見て下さい。

holonomy diagram中の二つのholonomic set Λ_0, Λ_2 の交わりを S とする。 S の generic point $p \in T^*V$ で考える。 p を通る diagram の Λ_0, Λ_2 以外の holonomic set の全体を Λ_1 , $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ とする。

(条件1) Λ_0, Λ_2 は p で non singular であり, $T_p S = T_p \Lambda_0 \cap T_p \Lambda_2$

以下 $p = (x_0, \xi_0)$ は $\xi_0 \neq 0$ とする。

$J_1^{(1)} = \{f(x, \xi) \in \mathcal{O}_{T^*X}(1) / f|_{\Lambda} = 0\}$
 とする。 $\mathcal{O}_{T^*X}(1)$ は ξ について斉次1次の関数を表わす。
 f の Hamilton field を H_f と書く。

$$H_f = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right)$$

$H_{J_1^{(1)}} = \{H_f / f \in J_1^{(1)}\}$ は Lie algebra になる。

(条件2) $H_{J_1^{(1)}}$ は S に推移的に働く。

すなわち, S は $H_{J_1^{(1)}}$ 不変であり $\dim S = r$

とすると, $\dim \{ df(p) / f \in J_1^{(1)} \} = r$

$T_p(T^*V)$ は symplectic vector space としての自然な内積を持つ。 $T_p S \subset T_p(T^*V)$ の直交補空間を $(T_p S)^\perp$ とする。条件により,

$(T_p S)^\perp = (T_p \Lambda_0) + (T_p \Lambda_2)$ であり, $(T_p S)^\perp / T_p S$ という symplectic vector space において $T_p \Lambda_0 / T_p S, T_p \Lambda_2 / T_p S$ は互いに dual な holonomic subspace となる。

一般に manifold X 上の vector field v が点 $p \in X$ で消えていけば (すなわち $v = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ で, $a_i(p) = 0 \quad i=1, \dots, n$) v は $T_p X$ に次のように作用する。

$$\begin{array}{ccc}
 T_p X & \xrightarrow{\quad} & T_p X \\
 \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\
 \frac{\partial}{\partial x_j} & \longmapsto & \sum \frac{\partial a_i(p)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} \\
 \parallel & & \parallel \\
 w & & [w, v](p)
 \end{array}$$

今の場合 $J_{1,p}^{(1)} = \{ f \in J_1^{(1)} / df(p) = 0 \}$
 とすると $f \in J_{1,p}^{(1)}$ の時

H_f は $T_p(T^*X)$ に働く。さらに H_f は $T_p\Lambda_0$, $T_p\Lambda_2$, T_pS を不変にする。そこで

$$H: J_{\Lambda, p}^{(1)} \longrightarrow \text{End}((T_pS)^\perp / T_pS)$$

の image を $\mathcal{Q}$ とする。

$(T_pS)^\perp / T_pS = T_p\Lambda_0 / T_pS + T_p\Lambda_2 / T_pS$
 に対応する正準座標で $\mathcal{Q}$ を表現すると

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^tA \end{pmatrix}$$

となる。よって $\mathcal{Q} \subset \text{End}(T_p\Lambda_0 / T_pS)$ と考えてよい。

(条件3) $\text{End}(T_p\Lambda_0 / T_pS)$ と考えて $\mathcal{Q} \ni I$

$f \in J_{\Lambda}^{(1)}$ を $df(p) = \omega(p)$ なるものとする。
 $\omega = \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$ である。

$$H_f + \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$$

を考えれば、これは p で消えるので $T_p(T^*V)$ に作用するが、 $T_p\Lambda_0$, $T_p\Lambda_2$, T_pS を不変にするので $(T_pS)^\perp / T_pS$ に働く。

(条件4) $\exists f \in J_{\Lambda}^{(1)}$ $df(p) = \omega(p)$ で

$$H_f + \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A+I \end{pmatrix} \text{ in } \text{End}((T_p S)^\perp / T_p S) \\ \text{for some } A \in \mathfrak{g}$$

以上の条件のもとで, 適当な斉次正準変換によって

$$X = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{\tau-1} \times Y \\ \quad \quad \quad \downarrow \psi \\ T^*X = \{(t, w, x; \tau, \zeta, \xi)\}$$

$$P = (0, 0, 0; 1, 0, 0)$$

$$\Lambda_0 = \{t = w = x = 0\}$$

$$\Lambda_2 = \{t = w = \xi = 0\}$$

$$\Lambda \subset \{t = w = 0 \mid \langle Ax, \xi \rangle = 0 \text{ for } A \in \mathfrak{g}\}$$

となる。(以上において $\mathbb{C}$ をすべて $\mathbb{R}$ で置き換えてもよい)

概均質ベクトル空間の場合に, Lie algebra の言葉で
以上の条件を述べてみよう。*

$\pi(\Lambda_0)$ の generic point を x_0 とする。

$\Lambda_0 = T_{Gx_0}^* V$ である。 x_0 における Gx_0 の
tangent space は $\mathfrak{g}x_0$ であるから $(T_{Gx_0}^* V)_{x_0} =$
 $(\mathfrak{g}x_0)^\perp$ である。これを $V_{x_0}^*$ と書く。

$\mathfrak{g}_{x_0} = \{A \in \mathfrak{g} \mid Ax_0 = 0\}$ とすると,

* 数研講究録 225 の木村論文を参照して下さい。

$\mathcal{G}_{x_0}$ は $V_{x_0}^*$ に作用している。 $(\mathcal{G}_{x_0}, V_{x_0}^*)$ が概均質としよう。この時 $V_{x_0}^*$ の generic point を y_0 , $\Lambda_2 \cap V_{x_0}^*$ の generic point を y_2 とする。

$\Lambda_0 = T_{\mathcal{G}y_0}^* V^*$ である。 $\Lambda_2 = T_{\mathcal{G}y_2}^* V^*$ と仮定する。 $(T_{\mathcal{G}y_0}^* V^*)_{y_2} = (\mathcal{G}y_2)^\perp$ の generic point を x_2 とする。 $p = (x_0, y_2)$ である。

$$T_{(x_0, y_2)} S = \mathcal{G}(x_0, y_2)$$

$$T_{(x_0, y_2)} \Lambda_0 = \lim_{y_0 \rightarrow y_2} \mathcal{G}(x_0, y_0)$$

$$T_{(x_0, y_2)} \Lambda_2 = \lim_{x_2 \rightarrow x_0} \mathcal{G}(x_2, y_2)$$

であるから(条件1)は確かめられる。(条件2)は, この場合は満たされている。

$\Pi \cap \Gamma$ における $(\mathcal{G}, (T_p S)^\perp / T_p S)$ を求めてみよう。

$$\mathcal{G}_{x_0 y_2} = \{ A \in \mathcal{G} / Ax_0 = 0, Ay_2 = 0 \}$$

が $J_{\Lambda, p}^{(1)}$ に相当する。 $\otimes$ $T_p \Lambda_0 / T_p S$ を考えよう。

x_0 の orbit の方向に動いても, 物事はすべて推移的だから, x_0 を止めて考えてよい。よって

$\otimes$ $J_{\Lambda}^{(1)}$ は $\{ \langle Ax, y \rangle, A \in \mathcal{G} \}$ から生成される。

$$(\overline{\mathcal{O}_{x_0 y_2}}, T_p \Lambda_0 / T_p S) \cong (\overline{\mathcal{O}_{x_0 y_2}}, \mathcal{O}_{x_0 y_0} / \mathcal{O}_{x_0 y_2})$$

である。ここで上の棒線は、右側の空間に作用させた時の image を意味する。これから p17 の $\mathcal{O}_f$ がわかり、条件3も確かめられる。

条件4は次のようにする。 $A_1 \in \mathcal{O}_f$ を $A_1 x_0 = 0$, $-{}^t A_1 y_2 = -y_2$ なるものとし、

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & -{}^t A_1 + I \end{pmatrix} \in \text{End}(V \times V^*)$$

を $(T_p \Lambda_0 / T_p S) + (T_p \Lambda_2 / T_p S)$ に作用させた時 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -{}^t A + I \end{pmatrix}$ $A \in \mathcal{O}_{x_0 y_2}$

の形をしている事を確かめればよい。

さっきの例で以上の条件を確かめてみよう。

$$\mathcal{O}_f = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right\} \times \left\{ B = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_5 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & b_6 \\ b_3 & b_5 & b_6 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_{X_0} \ni AX_0 + X_0B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & a_2 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & a_4+a_6 & a_4+a_6 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } G_{X_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \right\} \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_2 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_4 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & -a_4 \\ b_2 & b_4 & -a_4 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$G_{X_0}Y_0 = -{}^tAY_0 + Y_0B = \begin{pmatrix} -a_1 & b_1 & b_2-a_3 & b_2-a_3 \\ 0 & 0 & -2a_4 & -2a_4 \end{pmatrix}$$

$$G_{X_0}Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 & -a_3 \\ 0 & 0 & -2a_4 & -2a_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって } G_{X_0Y_2} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} \right\} \times \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_2 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_4 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & 0 \\ b_2 & b_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(\overline{G_{X_0Y_2}}, G_{X_0Y_0}/G_{X_0Y_2})$ は

$$\begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix} \cong \mathfrak{so}(2)$$

となる。よって条件3はよい。

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_2 \\ -b_1 & 0 & b_4 & b_4 \\ -b_2 & -b_4 & 0 & \frac{1}{2} \\ b_2 & b_4 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、 $-{}^tA_1$ の $G_{X_0Y_0}/G_{X_0Y_2}$ への作用は

$$\begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 \\ b_1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$\sigma_{y_2} x_2 / \sigma_{y_2} x_0$ への A_1 の作用は

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

となるから、条件4もよい。条件1を見てみよう。

$$\sigma(x_0, y_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & a_2 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & a_4+b_6 & a_4+b_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 & -a_3 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & -a_4+b_6 & -a_4+b_6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lim_{y_0 \rightarrow y_2} \sigma(x_0, y_0)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_2 & a_2 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & a_4+b_6 & a_4+b_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_1 t & b_1 t & b_2 t - a_3 & b_3 t - a_3 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & -a_4+b_6 & -a_4+b_6 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_0} \sigma(x_2, y_2)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \begin{pmatrix} a_1 t & b_1 t & b_2 t + a_2 & b_3 t + a_2 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & a_4+b_6 & a_4+b_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_3 & -a_3 \\ -b_2+b_3 & -b_4+b_5 & -a_4+b_6 & -a_4+b_6 \end{pmatrix} \right\}$$

これから明らかに成り立つ。

さて証明にはいろいろ。 Γ についての induction による。

$\Gamma \geq 2$ の時は, $f \in J_1^{(1)}$ で $df(p) \neq \omega(p)$ なるものがある。今 $p = (0, \dots, 0; 0, \dots, 1)$ とする。 $\frac{f}{\xi_n}$ を考えると, これは 0 次 homogeneous で, 新しい正準座標系に移って

$$y_1 = \frac{f}{\xi_n}, y_2, \dots, y_n; \eta_1, \dots, \eta_n$$

とできる。この時 A, S は $H_{y_1} = -\frac{\partial}{\partial \eta_1}$ で不変である。よって (y_1, η_1) と $(y_2, \dots, y_n; \eta_2, \dots, \eta_n)$ に分解でき, 条件 1~4 は $T^*Y = \{(y_2, \dots, y_n; \eta_2, \dots, \eta_n)\}$ で成り立っている。

$\Gamma = 1$ の時は, $f \in J_1^{(1)}$ で $df(p) \neq 0$ なるものは $df(p) = \text{const } \omega(p)$ しかない。 $df(p) = \omega(p)$ とする。条件 4 から, $g \in J_{1p}^{(1)}$ があって

$$H_{f-g} + \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} : \subset (T_p S)^\perp / T_p S$$

は $\oplus$ である。正準座標を $(x_1, \dots, x_n; \xi_1, \dots, \xi_n)$

とし $p = (0, \dots, 0; 0, \dots, 1)$ としよう。

$S = \{(0, \dots, 0; 0, \dots, \xi_n)\}$ である。

よって $(T_p S)^\perp / T_p S = \{(x_1, \dots, x_{n-1}; \xi_1, \dots, \xi_{n-1})\}$

$$\oplus ({}^0 I)$$

接触多様体として考える事にし, $n-1$ を改めて n とし
座標を $(x_1, \dots, x_n, t, p_1, \dots, p_n)$ とする
 $\omega = dt - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ である。

$f - g$ を改めて (さらに0次齊次にして) $f(x, t, p)$
とする。この時上の条件から

$f(x, t, p) = (1 + \text{高次}) \times (t + 3\text{次以上})$
となる。よって $t + 3\text{次以上}$ を改めて f とする。

条件3から $\exists g \in J_{1,p}^{(1)} \quad g = \sum_{i=1}^n x_i p_i + \text{高次}$
今 $\alpha \in \mathbb{R}$ を generic とすると

大島: Singularities in contact geometry and
degenerate pseudo-differential equations

J. Fac. Sci. Uni. Tokyo Sec. IA, Vol. 21,
No. 1, pp. 43-83 の Theorem 2.16 により

適当な接触変換により

$f + \alpha g = t + \alpha \sum_{i=1}^n x_i p_i$
とできる。再び, 正準座標にもとづいて t の dual を τ と書く。

$(t, x; \tau, \xi)$ を使うわけである。

$t\tau - \alpha \sum_{i=1}^n x_i \xi_i \in J_{1,p}^{(1)}$
がいえた。条件3から $\exists g_1 \in J_{1,p}^{(1)}$

g_1 は x, ξ, τ の函数で, (ξ, τ) につき1次齊次で

$g_1 = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i + x$ につき2次以上
 となる。 $J_1^{(1)}$ は Poisson bracket で閉じているから
 $t \in -\alpha \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ との Poisson bracket を考えると,
 t を1次 τ を-1次 x_i を $-\alpha^{-1}$ 次 ξ_i を
 α^{-1} 次と考えて g_1 の各同次成分が $J_1^{(1)}$ にはいる。よっ
 て特にその0次同次成分 $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ が $J_1^{(1)}$ にはいる。
 これから $t \in J_1^{(1)}$ がいえた。また同時に
 $\sum_{i=1}^n x_i \xi_i \in J_{1,p}^{(1)}$ でもある。従って $J_{1,p}^{(1)}$ が
 Poisson bracket で閉じている事から, $J_{1,p}^{(1)}$ は
 $\langle Ax, \xi \rangle$ の形の元から生成されている事もわかつ
 た。また, 正準座標をうまく取って Λ_0, Λ_2 が求める形
 にできる事も明らかである。

いくつか注意をしておく。

1) p 25 の9行目で $\Lambda \subset \{ \dots \}$ となつて, 等号でないのは
 f^S type を考えても, S の値が θ -函数の根と関連した
 特別な値においては, 方程式の support のあるものが消え
 る事が起こり得るのでこうなる。その場合 $J_1^{(1)}$ は大きくな
 るが, g はそのままになっている事もあり得るからである。

2) 条件3の代わりに, $Q \ni$ 対角行列 $\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-r} \end{pmatrix}$
 $(a_i > 0)$ となる場合がある。

局所化した多項式が, *weighted homogeneous* の時がそれに当たる。この場合でも, 同様に議論が進められる。但し, $J_{\lambda, p}^{(i)}$ は今度は $\langle Ax, \xi \rangle$ の形の元とはならず, x, ξ に関し 斉重なかつ ξ について1次のものからなる。そこで Q_f としてそれらに対応する *vector field* からできる *Lie alg.* を取れば, それが標準形として取れる。しかしそれは $Q_{x_0 y_2}$ とは異なるから, 何らかの方法でもとの Q_f から構成しなければならないが, その方法は知られていない。

3) λ_2 が *zero section* の場合は, 座標変換だけで話がすむ。 $Q_{x_0 y_2} = Q_{x_0}$ の中に $Q_{x_0 y_0} / Q_{x_0 y_2} = Q_{x_0 y_2}$ に作用させた時, I が含まれるという事は, *localization* を不変にする *vector field* で

$$X = (x_1 + \text{高次}) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n + \text{高次}) \frac{\partial}{\partial x_n}$$

のものが含まれるという事だから 大島論文 (前に引用したもの) の定理 1.4 (但し 条件 A.1.6. はミス・プリント $\sum_{i=1}^l \alpha_i p_i - \alpha_j \neq 0$ ではなく $\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i - p_j \neq 0$) により,

座標変換で $X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ に直るから, localization は同次多項式に取れ, それは $(\mathcal{O}_{x_0}, \mathcal{O}_{x_0} \eta_c)$ の相対不変式である。

4) 条件1は落とせる。まず, H_f が $(T_p S)^\perp$ を不変にする事がわかる。それには, S が H_f 不変な事, $f|_S = 0$ な事から, 例えば S を標準形 $\{x_1 = \cdots = x_n = \xi_1 = \cdots = \xi_r = 0\}$ に変換して考えればよい。 $(T_p S)^\perp / T_p S$ と $T_p \Lambda_0 / T_p S$ だけを使って $T_p \Lambda_2 / T_p S$ を使わずに話を進める事ができて $t \in -\alpha \sum_{i=1}^n x_i \xi_i \in J_1^{(1)}$ と言える。よってこれに対応する斉重な部分を見ると,

$$A \in \mathcal{O} \subset \text{End}(T_p \Lambda_0 / T_p S)$$

ならば $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -tA \end{pmatrix} \in \mathcal{O} \subset \text{End}((T_p S)^\perp / T_p S)$

である事がわかる。よって

$$\Lambda_0 = \{t = w = x = 0\}$$

$$\Lambda \subset \{t = w = 0, \langle Ax, \xi \rangle = 0 \text{ for } A \in \mathcal{O}\}$$

とできる事は正しい。

§4 例

1) $\mathbb{H}$ 上の n 次の skew hermitian 行列

$GL(2n, \mathbb{C})$ を考える。実形として次に説明するよう
 $\square$

なものを取る。 $\mathbb{H}$ を四元数とする。

$$\mathbb{H} = \mathbb{C} + \mathbb{C}j = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$$

$$(k = ij)$$

である。

$\mathbb{H} \ni \alpha + \beta j \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}) \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{C})$
 と表現する事ができる。さらに

$$\iota : M(n, \mathbb{H}) \longrightarrow M(2n, \mathbb{C})$$

が明らかなやり方で定義され, $M(n, \mathbb{H})^{\mathbb{C}}$ を考えれば
 同型になる。 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}} = M(n, \mathbb{H})$ とする。

$$V_{\mathbb{R}} = M(n, \mathbb{H} ; X = -{}^t\overline{X}) \text{ とする。}$$

$$\begin{array}{ccc} \iota : V_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & M(2n, \mathbb{C} ; X = {}^tX) \\ \downarrow \psi & & \downarrow \psi \\ X & \longmapsto & \iota(Xj) \end{array}$$

が "well defined" で, $(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ に移れば "同型" である。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & V_{\mathbb{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (A, X) & \longmapsto & AX + X^t \bar{A} \end{array}$$

という作用で, $(\mathcal{Q}_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}})$ は pre homogeneous space になる。その複素化は $GL(2n, \mathbb{C})$ である。
□

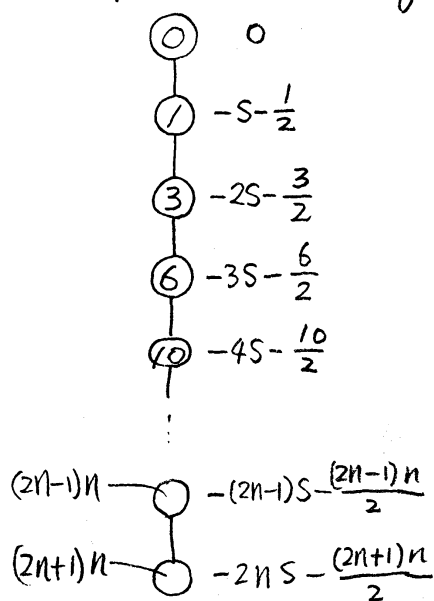
$V_{\mathbb{R}}$ の相対不変式は $f(X) = \det L(X_j)$

degree $f = 2n$

$V_{\mathbb{R}}$ の内積を $\langle X, Y \rangle = \text{Re Tr } X^t \bar{Y} = -\text{Re Tr } XY$ とする。 $(V_{\mathbb{R}})^*$ の相対不変式は, $f^*(Y) = \det L(Y_j)$ で同じである。

$$|C_0| = 4^n \quad |C_1| = 2^{2n^2+n} \quad \deg f = 2n, \dim V_{\mathbb{R}} = 2n^2+n$$

complex holonomy diagram は 左図。



real な diagram は, ひとつおきに real locus が現われ, それは連結である。よって 次の頁の図のようになる。そこで g は P^3 で定義した記号で, 三つ組の標準形がどんな 2 次形式になるかを表わす。

右側に書いたのは, $\Lambda_{\text{奇数}}$ 及び $\Lambda_{\text{奇数}} \cap \Lambda_{\text{奇数}-2}$ の generic point である。

Λ_{2n+1} Λ_{2n} Λ_{2n-1} Λ_{2n-2} Λ_{2n-3}

$q_{b_3}^s$ $q_{b_3}^{s+1}$

$(x, y) = \begin{pmatrix} i & & \\ & \ddots & \\ & & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} i & & \\ & \ddots & \\ & & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} i & & \\ & \ddots & \\ & & i_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} i & & \\ & \ddots & \\ & & i_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} i & & \\ & \ddots & \\ & & i_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

Λ_2 Λ_1 Λ_0

$q_{b_3}^{s+(n-1)l}$

$\begin{pmatrix} i_0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & i \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & & \\ & \ddots & \\ & & i \end{pmatrix}$

Maslov index は計算すると消えてしまう。

よって $U(s) = |f(x)|^s$

$$U^*(s) = \int_{V^*} |f^*(Y)|^{-s} e^{-2\pi \sqrt{-1} \operatorname{Re} T_n X Y} dY$$

但し $dY = \prod_{l=1, \dots, n} dy_l^{(i)} dy_l^{(j)} dy_l^{(k)} \prod_{l>l'} dy_{ll'}^{(i)} dy_{ll'}^{(j)} dy_{ll'}^{(k)}$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1^{(i)} i + y_1^{(j)} j + y_1^{(k)} k & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{21}^{(i)} i + y_{21}^{(j)} j + y_{21}^{(k)} k & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

とすれば、鈴木氏の講演における公式に当てはめて

$$\begin{aligned}
u(s) &= (2\pi)^{-2nS - \frac{2n^2+4}{2}} 2^{2nS} 2^{\frac{2n^2+4}{2}} \\
&\quad \times \frac{\Gamma(s + \frac{3}{2})}{\Gamma(-s)} \cdot \frac{\Gamma(s + \frac{5}{2})}{\Gamma(-s-1)} \cdots \frac{\Gamma(s + \frac{2n+1}{2})}{\Gamma(-s-n+1)} u^*(s + \frac{2n+1}{2}) \\
&= \pi^{-2nS - \frac{2n^2+4}{2}} \frac{\Gamma(s + \frac{3}{2})}{\Gamma(-s)} \cdot \frac{\Gamma(s + \frac{5}{2})}{\Gamma(-s-1)} \cdots \frac{\Gamma(s + \frac{2n+1}{2})}{\Gamma(-s-n+1)} u^*(s + \frac{2n+1}{2})
\end{aligned}$$

すなわち、左らんと書くと次のようになる。

$$|f(x)|^s = \pi^{-2nS - \frac{2n^2+4}{2}} \prod_{j=1}^{2n} \Gamma(s + \frac{j+1}{2}) \prod_{i=1}^n \left(\frac{\sin \pi(s+i)}{\pi} \right)$$

$$\int |f^*(y)|^{-s} e^{-2\pi \sqrt{-1} \operatorname{Re} T_n X y} dy$$

2) 演習問題

$$Q_{\mathbb{R}} = M(n, \mathbb{H}) \times M(n, \mathbb{H})$$

$$V_{\mathbb{R}} = M(n, \mathbb{H})$$

$$Q_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$$(A, B, X) \longmapsto AX^t B$$

で "pre homogeneous" である。相対不変式は $\det L(X)$ 。この場合も一直線のグラフとなるからやさしい。

$$3) G_{\mathbb{R}} = GL(n, \mathbb{R}) \times SO(p, q)_0$$

$SO(p, q)_0$ は $SO(p, q)$ の連結成分。 $p+q=m$ とし, $n < m$ と仮定する。(そうでないと相対不変式が既約でない。)

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{so}(p, q)$$

$$V_{\mathbb{R}} = \{ n \times m \text{ 実行列} \}$$

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \times V_{\mathbb{R}} \longrightarrow V_{\mathbb{R}}$$

$$(A, B, X) \longmapsto AX - XB$$

で "pre homogeneous" となる。

$$\text{相対不変式は } f(X) = \det X J^t X$$

$$\text{但し } J = \begin{pmatrix} \underbrace{1 \dots 1}_{p \text{ 個}} & & \\ & \underbrace{1 \dots 1}_{q \text{ 個}} & \\ & & -1 \dots -1 \end{pmatrix}$$

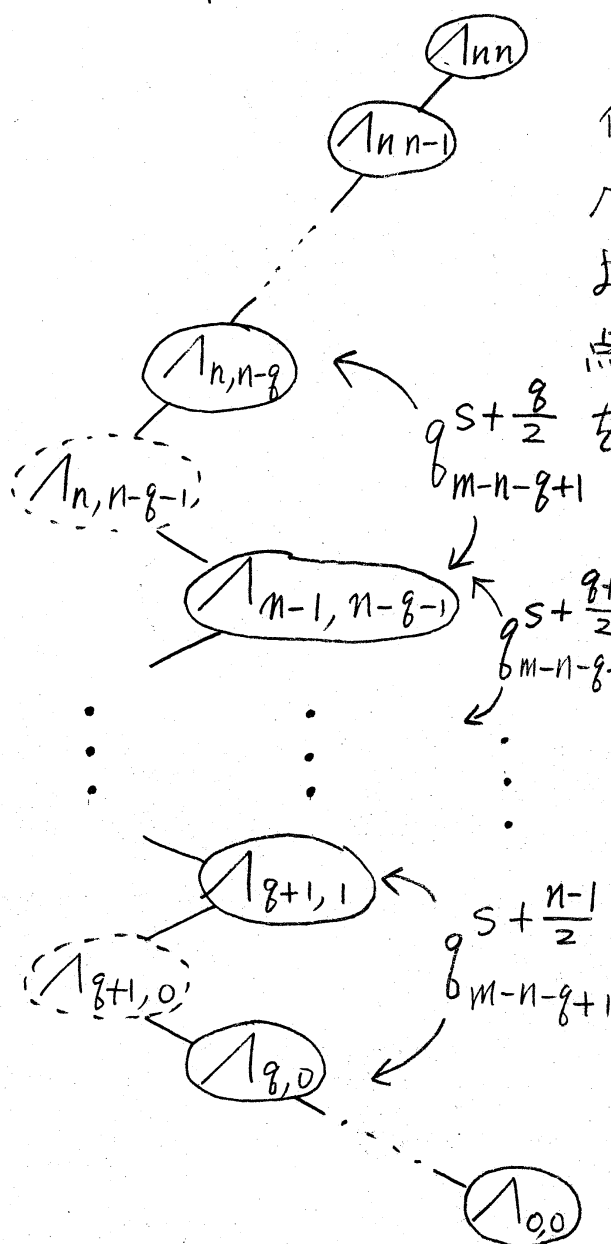
内積を $\langle X, Y \rangle = \text{tr } X^t Y$ とする。

$$V^* \text{ の相対不変式は } f^*(Y) = \det(Y J^t Y)$$

$$|C_0| = 4^n \quad |C_1| = 2^{mn} \quad \text{である。}$$

$P, q \geq n$ の時は, real locus が 計算を可能にするだけ充分あり, 鈴木氏によって計算された。ここでは $q=0, p>n$ の場合と $q=1, p>n$ の場合を扱う。($n \geq 2$ とする。)

一般に $p>n$ とすると, 次のような部分グラフがある。

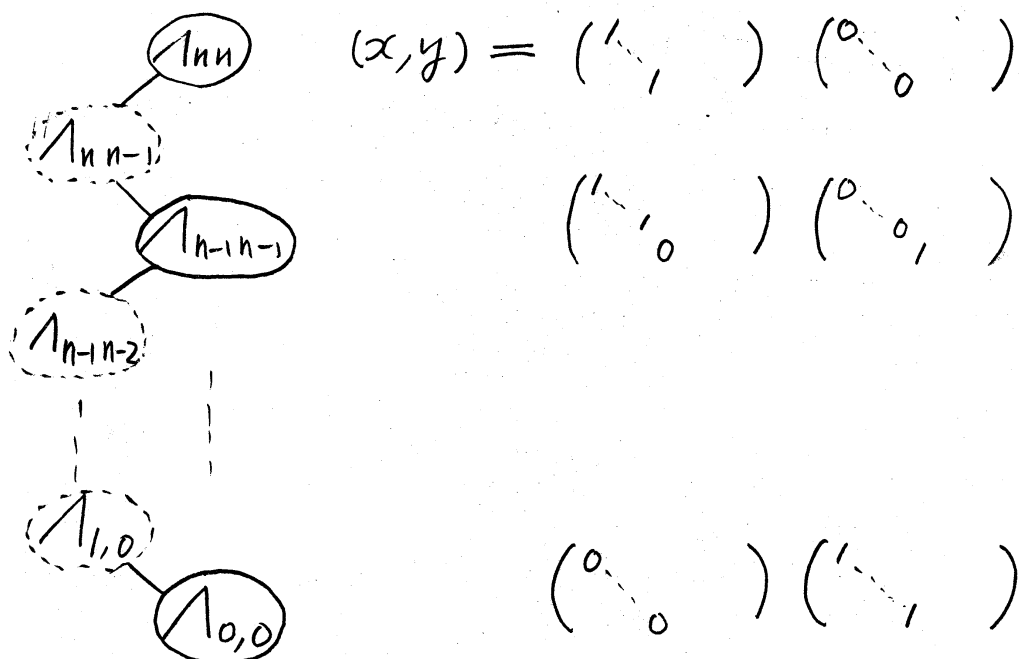


但し $\lambda_{\nu,\mu}$ は $\text{rank } X = \nu$
 $\text{rank } X J^t X = \mu$ である
 ような G orbit の conormal
 点線のものは real locus

$q^{S+\frac{q}{2}}_{m-n-q+1}$ を持たない。その三つ組は
 やはり2次形式になる。こ

$q^{S+\frac{q+1}{2}}_{m-n-q+1}$ これは complex の図で real
 locus はもっと複雑にな
 っている。

i) $q=0$ の時 この時は real locus は連結成分がひとつ
 であって例 1) や例 2) と同じで 簡単である。 Λ の
 generic point のみ記して, あとは 演習問題 とする。
 答合わせは 佐藤-新谷 概均質ベクトル空間の理論
 数学の歩み 5-1 P155 例 9 を見て下さい。



ii) $q=1$ の時

これの一番簡単な場合が p11 で紹介した例である。その
 場合について, real holonomy diagram を書いてみ
 よう。まず各 $\Lambda_{\nu\mu}$ の連結成分を示す。

$$\Lambda_{22} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\oplus \text{-----} \ominus$

$$\Lambda_{21} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

⊕ ————— ⊖

$$\Lambda_{11} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ⓐ ————— Ⓑ ————— Ⓒ

$$\Lambda_{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⊕ ————— ⊖

$$\Lambda_{00} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

⊕ ————— ⊖

次に二つずつの交わりを書こう。

Λ_{22} と Λ_{21}

$$\Lambda_{21} \ominus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

⊖ ————— ⊕

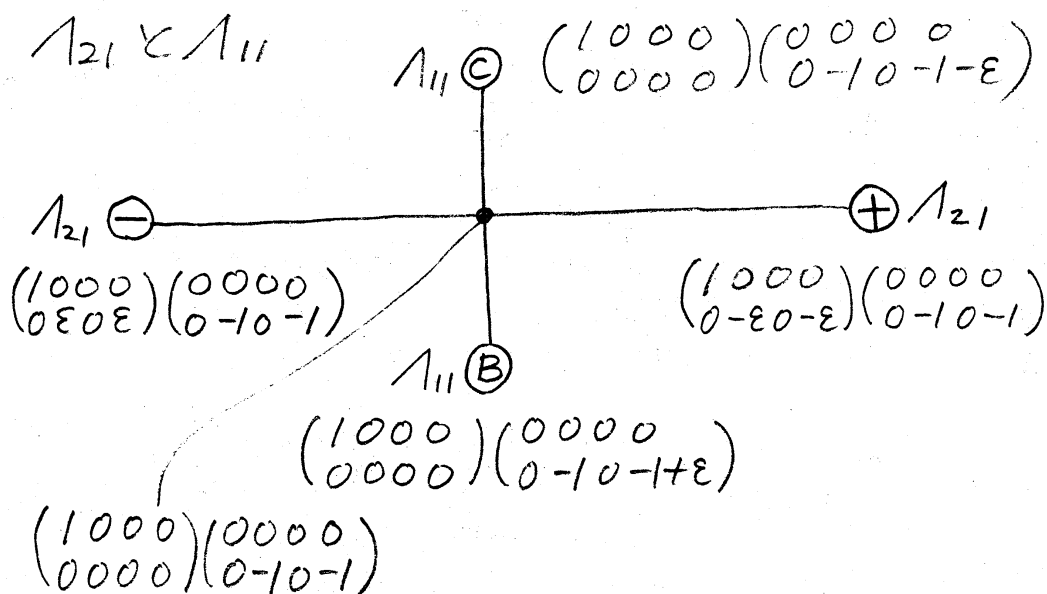
Λ_{22} Λ_{22}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 + \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 - \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

⊕ ————— ⊕

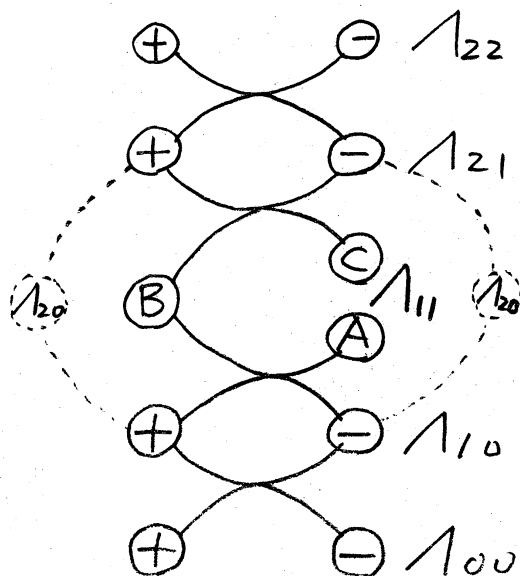
$\Lambda_{21} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



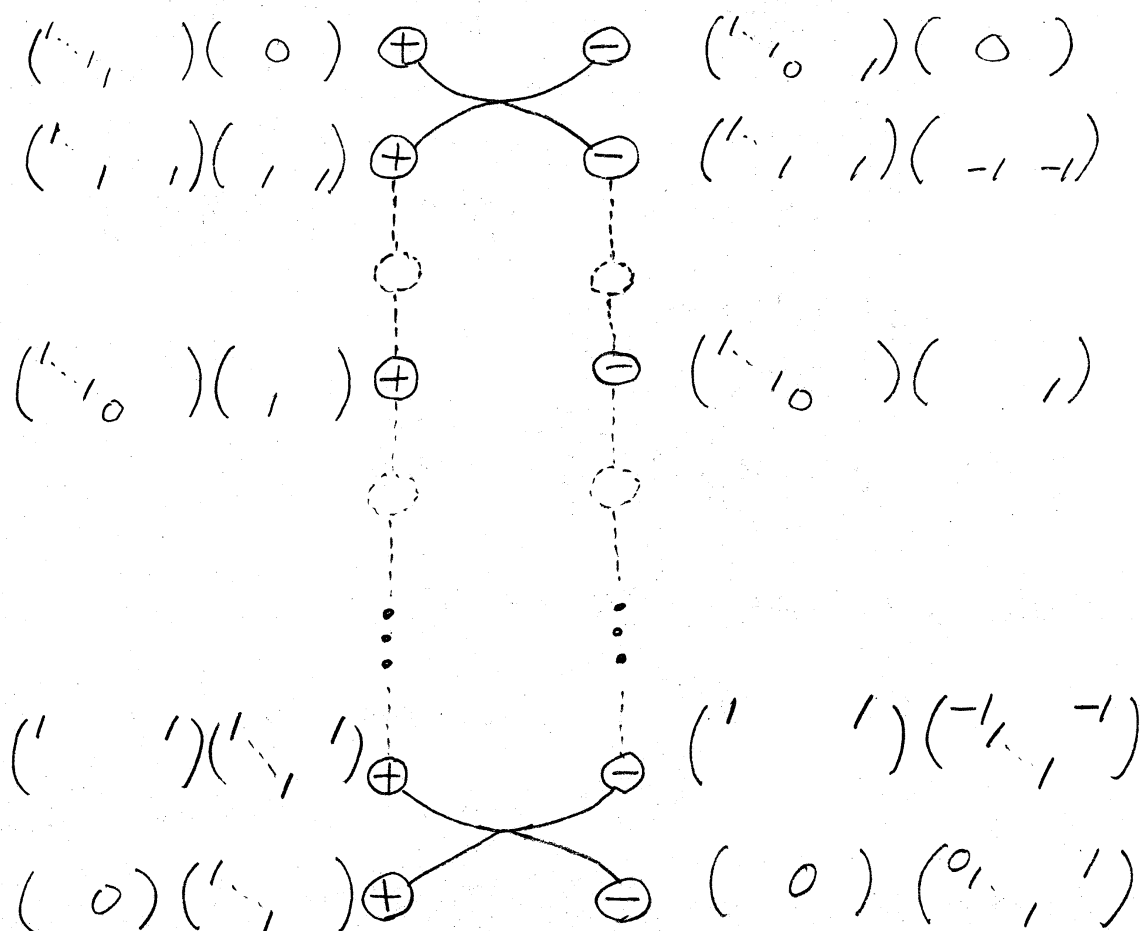
Λ_{11} と Λ_{10} , Λ_{10} と Λ_{00} は上記と同じ (xとyが逆になるだけ) なので省く。

全体の図は次のようになる。



よ、てこの道筋で Fourier 変換を計算する事はできない。
 しかし図の点線で示したものは, 2次形式の三つ組 となる

ので, Λ_{21} から Λ_{10} へ by-pass する事によって
計算が実行できる。2行4列に限らず, 一般の場合にも
次の道筋で計算される。



結果は次の通り

$$u_{\pm}(s) = \begin{cases} |f(x)|^s & x \in \Lambda_{nn\pm} \\ 0 & x \in \Lambda_{nn\mp} \end{cases}$$

$$u_{\pm}^*(s) = \int_{\Lambda_{00\pm}} |f^*(\gamma)|^{-s} e^{\sqrt{-1} \operatorname{Tr} X^t \gamma} d\gamma$$

$$\begin{bmatrix} u_+(s) \\ u_-(s) \end{bmatrix} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (4^n)^s \sqrt{2^{nm}} \times \prod_{j=1}^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{m-n}{2} + s + j)}{\Gamma(-s - \frac{1}{2}j)} \\ \frac{\Gamma(s+1)}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(s+\frac{m}{2})}{\sqrt{2\pi}} (\sqrt{-1})^{l-n} (a^{-\frac{1}{4}} - a^{\frac{1}{4}})$$

$$\times \begin{bmatrix} (a^{-2} + (-1)^n a^2) & (\sqrt{-1})^m (1 + (-1)^{m+n}) \\ -(1 + (-1)^n) & -(\sqrt{-1})^m (a^2 + (-1)^{m+n} a^{-2}) \end{bmatrix} \\ \times \begin{bmatrix} u_+^*(s + \frac{m}{2}) \\ u_-^*(s + \frac{m}{2}) \end{bmatrix}$$

ここで $a = \exp \frac{\pi \sqrt{-1}}{2} s$ である。

Maslov index の修正を書いておこう。

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{k, k-1} & \begin{array}{c} \oplus \\ \vdots \\ \ominus \end{array} & \begin{array}{c} \ominus \\ \vdots \\ \oplus \end{array} \\ \Lambda_{k-1, k-2} & \begin{array}{c} \oplus \\ \vdots \\ \ominus \end{array} & \begin{array}{c} \ominus \\ \vdots \\ \oplus \end{array} \end{array}$$

左側の修正の term

$$= \tau(\Lambda_{k, k-1}^+) - \tau(\Lambda_{k, k-1}^+ \cap \Lambda_{k-1, k-2}^+)$$

$$= \exp \frac{\pi \sqrt{-1}}{4}$$

右側は $\exp -\frac{\pi \sqrt{-1}}{4}$

最初の余次元1のまわりでは 修正の term はでない。

最後の余次元1のまわりでは

$$\begin{bmatrix} \exp \frac{\pi \sqrt{-1}}{4} (m-n-1) \\ \exp -\frac{\pi \sqrt{-1}}{4} (m-n-1) \end{bmatrix}$$

C_0, C_1 の計算に関する Remark

(G, V, f) を Pseudo-homogeneous vector space とする。

V^* を V の dual space として 内積を $\langle x, y \rangle$ とする。

すると、この内積に関して、反傾表現がきまる。その表現に対する、相対不変式を f^* とする。すなわち、

$$f(gx) = \chi(g) f(x)$$

$$f^*(tg^{-1}y) = \chi^{-1}(g) f^*(y)$$

このとき f^* は constant 倍を除いて unique にきまる。

同じように、 G の Lie algebra $\mathfrak{g}$ の V^* への作用に対し

χ_V を character にとり V^* 上の volume element も、一

意にきまる。 C_0, C_1 の値は f, f^* の constant 倍、 V, V^*

上の相対不変 volume の constant 倍によつてきまるので

あり、内積のとり方にはよらない。

内積が $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ という通常の内積の場合は、

$$C_0 = f^*(y) f(\text{grad}_g f^*(y))$$

$$C_1 = f^*(y)^{\frac{2n}{n-1}} \text{Hess } \log f^*(y)$$

として求めることができる。

A は非退化行列 $(x, Y) = \langle x, AY \rangle$ として内積を定義する。通常の内積とするためには、 $y = AY$ と変数変換してやらねばならぬ。 $\langle x, y \rangle$ の内積に関する相対不変式を $f^*(y)$ とする。相対不変 volume element (tr_{V^*} に対する) は dy である。

(x, Y) の内積をとるときには、相対不変式は

$$\tilde{f}^*(Y) = f^*(AY)$$

相対不変 volume element は dY である。

$\tilde{f}^*$ によって C_0, C_1 を表わすことが出来る。

$$i) \quad C_0 = \tilde{f}^*(Y) f(\text{grad}_Y A^{-1} \log \tilde{f}^*(Y))$$

$$ii) \quad C_1 = \tilde{f}^*(Y)^{\frac{2n}{r}} \text{Hess}_Y \log \tilde{f}^*(Y) (\det A)^{-1}$$

として求めることが出来る。

$\therefore$) 求め方を反転すればよい。通常の内積では

$$W = \overline{\{ (\text{grad} \log f^*(y), y) : y \in V^* \text{ set} \}}$$

と書くことが出来る。 $y = AY$ とかえたとときには

$$W = \overline{\{ (\text{grad}_Y \log \tilde{f}^*(A^{-1}y), Y) \}}$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{\{ (\text{grad}_Y A^{-1} \widehat{f}^{*S}(A^{-1}Y), Y); Y \in V^* \}} \\
&= \overline{\{ (\text{grad}_Y A^{-1} \widehat{f}^{*S}(Y), Y); Y \in V^* \}}
\end{aligned}$$

17. 故, 2. $\Lambda = 0 \times V^*$ と 17. $f_\Lambda = c_0 \widehat{f}^{*-1}(Y)$.
 の c_0 を求める ので あるから.

$$\begin{aligned}
c_0 &= \widehat{f}(\text{grad}_Y A^{-1} \widehat{f}^{*S}(Y)) \widehat{f}^*(Y) / d_\Lambda(S). \\
&= \widehat{f}^*(Y) \widehat{f}(\text{grad}_Y A^{-1} \widehat{f}^*(Y)).
\end{aligned}$$

また $\omega_\Lambda = c_1 \widehat{f}^{*-2 \frac{n}{r}}(Y) dY$ の c_1 を求める ので
 あるから $\omega_\Lambda = \frac{\pi_*(dx) \wedge dS}{c_\Lambda(S)} / dS|_\Lambda$ に 注 意 し て.

$$\begin{aligned}
\pi_*(dx) \wedge dS &= d(\text{grad}_Y A^{-1} \log \widehat{f}^{*S}(Y)) \wedge dS. \\
&= \text{Hess}_Y \log \widehat{f}^{*S}(Y) \det A^{-1} dY \wedge dS
\end{aligned}$$

$$\text{すなわち } \omega_\Lambda = \text{Hess}_Y \log \widehat{f}^*(Y) (\det A)^{-1} dY = c_1 \widehat{f}^{*-2 \frac{n}{r}}(Y) dY.$$

$$\text{17. 故, 2. } c_1 = \widehat{f}^{*-2 \frac{n}{r}}(Y) \text{Hess}_Y \log \widehat{f}^*(Y) (\det A)^{-1}$$

なお [K-M] の P67 ~ P68 を 参 照 の こ と .

ひとつ Comment をしておく。

$\text{grad}_Y A^{-1}$ とは, $\text{grad}_Y A^{-1} \exp(x, Y) = t x \exp(x, Y)$ と
なるように定義される。一般に、内積 (x, y) が与えら
れたとき $G \text{grad}_y$ と。

$$G \text{grad}_y \exp(x, y) = t x \exp(x, y)$$

となる二階の y に関する微分作用素のベクトルとすると
き。

$$\overline{W} = \overline{\{ (S G \text{grad}_y f^*(y), y) ; y \in V^* \text{ set} \}}$$

と定義あることが出来る。

付記

ここに説明された方法によつて、完全な解決をみた。計算
、そのあと発見された計算の簡略化などは、このあと刊行
される“代数解析学の諸問題”の講究録中の、室政和：

“Prehomogeneous vector space の相対不変式の Fourier 変換に
ついて”に詳述してある。興味のある方は参照してくださ
い。