

周期境界値問題に対する特異および特異に近い差分行列の SOR 法

大阪女子大学 石原 和夫 (Kazuo Ishihara)

大阪女子大学 山本 慎 (Makoto Yamamoto)

1. SOR 法. $Av = b$, $A = D - L - U = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ とし, $D, -L, -U$ は A の対角, 狭義の下三角, 狭義の上三角成分, $a_{ii} \neq 0$, $1 \leq i \leq n$, $J = D^{-1}(L + U)$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を J の固有値, ω を加速係数, $H_\omega = (D - \omega L)^{-1}[(1 - \omega)D + \omega U]$, $v_{k+1} = H_\omega v_k + \omega(D - \omega L)^{-1}b$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $\rho(J) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$, $\gamma(J) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|; \lambda_i \neq 1\}$, $\delta(J) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|; |\lambda_i| \neq 1\}$, とする.

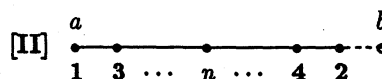
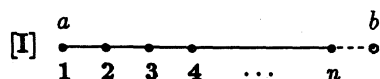
補題 1 [1, 4]. (i) A が convergent ($\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = O$) $\iff \rho(A) < 1$.

(ii) $\rho(A) = 1$ とする. A が semiconvergent ($\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ が存在) $\iff \gamma(A) < 1$ かつ A の固有値 1 に関するすべての elementary divisor が linear.

2. 差分方程式. 次のような周期境界条件の問題を考える.

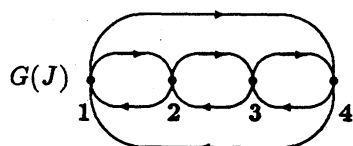
$$(1) \quad \begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), & a \leq x \leq b \\ y(a) = y(b), & y'(a) = y'(b), \end{cases}$$

ここで $p(x), q(x), r(x)$ は周期 $b - a$ の連続関数で, $q(x) \geq 0$ とする. $[a, b]$ を n 等分し, $h = \frac{b-a}{n}$ とし, 次のような 2 つのタイプの分点 x_i を考える.

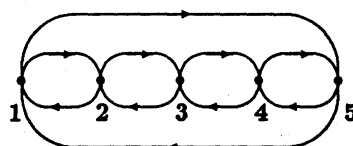


(1) を中心差分近似し, $y(x_i)$ の近似解を v_i とすれば (1) の差分方程式は $Av = b$ となる.

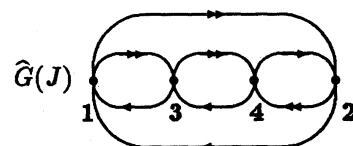
補題 2. $h \cdot \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 2$ とする. n が偶数のとき, J は cyclic of index 2, n が奇数のとき, J は primitive となる. また, n が偶数, 分割タイプ [II] ならば A は 2-cyclic, consistently ordered となる.



$n = 4$, cyclic of index 2



$n = 5$, primitive



consistently ordered

定理1. $p(x) \equiv 0, q(x) \equiv 0, n$ が偶数, 分割タイプ [II], $b \in \text{Im}A \Rightarrow A$ は特異. SOR 法は semi-convergent ($0 < \omega < 2$) で, $Av = b$ の解に収束し, $\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \delta(J)^2}} = \frac{2}{1 + \sin \frac{2\pi}{n}}, \gamma(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0 < \omega < 2} \gamma(H_{\omega})$.

定理2. $q(x) > 0, h \cdot \max_{a \leq x \leq b} |p(x)| < 2, n$ が偶数, 分割タイプ [II], とする.

$$(2) \quad \prod_{i=1}^n \left\{ 1 + \frac{1}{2} p(x_i) h \right\} = \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - \frac{1}{2} p(x_i) h \right\}$$

$\Rightarrow A$ は正則で, SOR 法は convergent ($\rho(H_{\omega}) < 1, 0 < \omega < 2$),

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - (\rho(J)^2)}}, \quad \rho(H_{\omega_{\text{opt}}}) = \min_{0 < \omega < 2} \rho(H_{\omega}),$$

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{2 + q_{\max} h^2} \right)^2}} \leq \omega_{\text{opt}} \leq \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{2 + q_{\min} h^2} \right)^2}}, \quad q_{\max} = \max_{a \leq x \leq b} q(x), \quad q_{\min} = \min_{a \leq x \leq b} q(x).$$

さらに, $h = \frac{b-a}{n}$ が十分小ならば, $\omega_{\text{opt}} \approx \frac{2}{1 + \sin \frac{2\pi}{n}}$.

注意. 誤差評価 $|y(x_i) - v_i| = O(h^2)$ は得られる. 定理2の条件を満たさない時, SOR 法は種々の挙動をする. 数値例は講演時に示す. Neumann 型 2 点境界値問題の SOR 法については [3] 参照.

参考文献

- [1] Bermann, A. and Plemmons, R. J., Nonnegative matrices in the mathematical sciences, Academic Press, 1979.
- [2] Hadjidimos, A., On the optimization of the classical iterative schemes for the solution of complex singular linear systems, SIAM J. Alg. Disc. Math., 6 (1985), 555 - 566.
- [3] Ishihara, K. and Yamamoto, M., Optimum relaxation parameter of SOR iterations for discrete Neumann type arising from two-point boundary value problems, Math. Japon., 39 (1994), to appear.
- [4] Varga, R. S., Matrix iterative analysis, Prentice-Hall, 1962.
- [5] Young, D., Iterative solution of large linear systems, Academic Press, 1971.