

時変な下限を持つ金利期間構造モデル*

滋賀大学経済学部 菊池健太郎

Kentaro Kikuchi

Faculty of Economics, Shiga University

1 はじめに

金利のデータは時系列方向と横断面方向のパネル状のデータと捉えることができる。このパネル状の金利データから金利期間構造モデルに基づく推定によって、債券市場参加者のリスク認識に関する情報を抽出したり、マクロ経済環境が金利動向に及ぼす影響などを分析する研究は数多く存在する。世界的な金融危機が発生した2008年以前は、「標準型アフィン・ガウシアン金利期間構造モデル（以下、SAGモデル）」と呼ばれるモデルが広く実証分析に用いられていた。しかし、日米欧の中央銀行の2008年以降の緩和的な金融政策によって、これらの国の短期金利はゼロ近傍まで低下し、以下に述べる理由によりSAGモデルは分析に適さなくなってしまった。

SAGモデルは、[8]によって研究されたアフィン・ガウシアン金利期間構造モデルの特殊形である。同モデルでは、時刻 t での短期金利 r_t が、ファクター X_t を用いて以下の式で与えられると仮定する。

$$r_t = a + b'X_t \quad (1)$$

ファクター X_t は、実確率測度、リスク中立確率測度の双方で、分散共分散行列が時間に対して一定のガウシアン過程に従うと仮定される。ここで、式(1)と無裁定条件を仮定すると、債券の価格表現が導出される。SAGモデルでは、債券価格から定義されるゼロクーポン金利は、短期金利の仮定と同様、ファクター X_t の線形関数となる。ファクター X_t が市場で観測不能な潜在変数であっても、カルマン・フィルタを通じて推定可能であることもあり、[2]や[13]他、多くの研究に用いられてきた。しかし、SAGモデルでは、実確率測度の下での先行きの金利は正規分布に従うことになる。このため、超低金利局面では、SAGモデルから計算される先行きの金利が負の値をとる確率が、市場参加者の想定よりも過大になりやすいという問題がある。

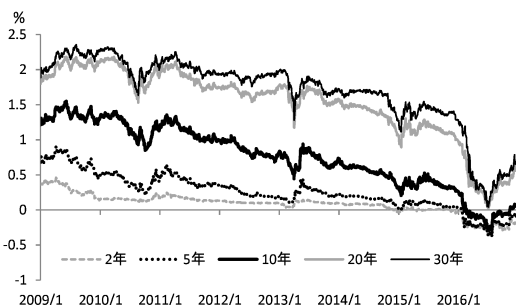
上述の2008年の金融危機以降の日米欧の低金利局面は、以上のような理由で、それまでのSAGモデルによる金利の実証分析の変更を迫ることになった。代わりに、名目金利の非負性を保証する「影の金利モデル（以下、SRモデル）」と「2次ガウシアン期間構造モデル（以下、QGモデル）」が実証分析に用いられるようになった。

SRモデルやQGモデルは、短期金利がゼロ近傍の低金利環境下の金利分析に貢献したが、モデルの有用性を取り巻く市場環境が変化してきた。具体的には、日欧の中央銀行が導入した「マイナス金利政策」により、短期金利のみならず長期金利も負の値をとるようになった点である。例えば、日本銀行は、2016年1月の金融政策決定会合で「マイナス金利付き量的・質的金融緩和政策（以下、

*本稿は他所に投稿予定の論文（英語で執筆）の簡約版である。本稿は、公益財団法人石井記念証券研究振興財団からの研究助成の成果の一部である。ここに記して感謝する。

マイナス金利政策と呼ぶ)」の導入を決定したが、これを受け、日本国債 10 年金利は大幅に低下し、ついにはゼロを下回った (図 1)。これは、SR モデルや QG モデルなどの名目金利の非負性を保証するモデルでは、現状のマイナス化したイールドカーブを適切に捉えることができなくなっていることを意味する。

図 1: 日本国債金利 (複利最終利回り) の推移



(出所) 財務省。

もちろん、SR モデルや QG モデルの金利の下限が一定の負値となるように修正を施すことは可能である (このような修正モデルを「修正 SR モデル」、「修正 QG モデル」と呼ぶ)。しかし、そのような修正を施したとしても問題は解決しない。例えば、あるサンプル期間について、修正 SR モデル (もしくは修正 QG モデル) のパラメータの推定を行い、金利の下限値が c と推定されたとする。これは、将来の金利が c 以上の値をとることを意味する。しかし、サンプル期間外で「マイナス金利政策の深掘り」のような、金利がより一層負の方向に低下する状況が生じた場合、モデルの推定結果から得られる「将来の金利は c より小さくならない」という点に抵触するおそれが生じる。すなわち、モデルの予測力が疑われる状況が生じる可能性がある (この点については次節でも触れる)。

そこで本研究では、金利の下限値が時間変動する金利期間構造モデルを提案する。具体的には、QG モデルに確率変動する金利の下限値を導入し、一定の設定と仮定の下、債券価格と長期金利の表現を導出する。また、日本の金利データを用いて本研究で提案するモデルのパラメータ推定を行い、モデルの精度を検証する。さらに、モデルの推定結果の応用例として、金融政策の変更が期間プレミアムに与える影響を試算する。また、先行きの長期金利の実確率分布を計算する。

以下に本稿の構成を示す。2 節では、SR モデルや QG モデルといった金利に時間不変な下限が設定された金利期間構造モデルの問題点を示す。3 節では、本研究で提案するモデルを説明する。4 節では、実証分析の結果ならびに応用例を示す。5 節はまとめと今後の課題を記す。

2 時間不変の下限値を持つ金利期間構造モデルの問題点

SR モデルは、[4] が提案し、[10] が債券価格の導出など理論面の整備に貢献した。同モデルを用いた実証分析として [12]、[5]、[16]、[3] などが挙げられる。このモデルでは、短期金利 r_t は以下の式で与えられると仮定する。

$$r_t = \max(a + b'X_t, 0) \quad (2)$$

ここで、 X_t はガウシアン過程に従うとする。

QG モデルは、[6] による「CIR モデル」を拡張したモデルといえる。[1] や [14] は、理論面の整備に留まらず実証分析も行った。近年、同モデルに基づき実証分析を行った例として [12] が挙げられる。このモデルでは、短期金利 r_t は以下の式で与えられると仮定する。

$$r_t = X_t' \Phi X_t \quad (3)$$

ここで、 X_t はガウシアン過程に従うとする。また、 Φ は半正定値行列とする。これにより金利はゼロ以上の値をとることになる。

SR モデルも QG モデルも名目金利の非負性を保証するモデルであり、ゼロ近傍の超低金利環境における金利分析に威力を発揮した。しかし、日本やドイツの金利が「マイナス金利政策」により負値をとるようになったため、そのままではこれらの国のイールドカーブを分析することはできなくなった。これに対処するため、金利の下限をゼロに固定しない修正を施すことは可能である。例えば、SR モデルの短期金利を次のように定義する。

$$r_t = \max(a + b'X_t, c) \quad (4)$$

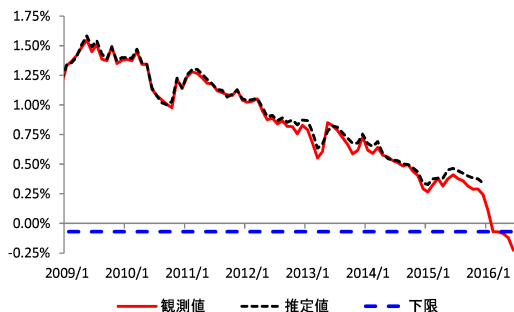
QG モデルの短期金利については以下のように定義する。

$$r_t = X_t' \Phi X_t + c \quad (5)$$

式 (4), (5) に基づくモデルをそれぞれ修正 SR モデル、修正 QG モデルと呼ぶ。これらの修正モデルにより負値の金利を持つ国のイールドカーブを表現できるのかという点、未だ問題が残る。試みとして、日本の 1996 年 1 月から 2015 年 12 月までの月末データを用いて修正 QG モデルを推定し、10 年金利の観測値および推定値、さらには、式 (5) の c の推定値を図にプロットした (図 2)。なお、10 年金利の観測値については、推定に用いたサンプル期間外の 2016 年 1 月から 7 月までの値も図にプロットしている¹。また、推定結果は 2009 年 1 月からの値を示している。

10 年金利の観測値と推定値は高い精度でフィットしていることが図から分かる。しかし、推定に用いたサンプル期間外の 2016 年 3 月末に 10 年金利の推定値が -0.0720% となり、 c の推定値 -0.0711% を下回ることとなった。この結果は、金利の下限値を時間不変とするモデルに基づく実確率分布を、金利リスク管理などに用いることの危険性を示唆している。そこで本研究では、確率変動する金利下限値を導入する。モデルの説明は次節で行う。

図 2: 10 年国債金利と修正 QG モデルによる推定値



¹ここでは、モデルの設定やパラメータの推定値など本推定に係る詳細には立ち入らない。

3 モデル

3.1 セットアップ

はじめに, $(\Omega, \mathbb{P})$ という完備な確率空間を考える. 以下, $\mathbb{P}$ を実確率と呼ぶ. さらに本研究では, 金融市場に裁定機会が存在せず完備であると仮定する. この仮定により, リスク中立確率測度は一意に定まる. 当該測度を $\mathbb{Q}$ と置く.

時刻 t における短期金利 r_t を以下のように定義する.

$$r_t = X_t' \Phi X_t + lb_t \quad (6)$$

ここで, X_t は $N \times 1$ ベクトル, Φ は $N \times N$ の半正定値行列, lb_t はスカラーとする. また, 行列 (ベクトル) の右肩に付されている記号「'」は元の行列 (ベクトル) の転置を表すとする. 以上の設定より, 短期金利は必ず lb_t 以上の値をとることになる. すなわち, lb_t は短期金利の時刻 t における下限となる.

X_t と lb_t は, 離散時間の設定の下, 以下の確率過程に従うと仮定する.

$$X_{t+1} = \mu^{\mathbb{Q}} + K^{\mathbb{Q}} X_t + \Sigma \varepsilon_{X,t+1}^{\mathbb{Q}} \quad (7)$$

$$lb_{t+1} = lb_t + \sigma \varepsilon_{lb,t+1}^{\mathbb{Q}} \quad (8)$$

ここで, $\varepsilon_{X,t}^{\mathbb{Q}} \sim i.i.d. N(0, I_N)$, $\varepsilon_{lb,t}^{\mathbb{Q}} \sim i.i.d. N(0, 1)$ と仮定する (I_N は $N \times N$ の単位行列). また, 任意の t と t' に対して, $\varepsilon_{X,t}^{\mathbb{Q}}$ の各要素と $\varepsilon_{lb,t'}^{\mathbb{Q}}$ の共分散はゼロとする.

3.2 割引債価格とゼロクーポン金利の表現

満期までの期間が τ の割引債の時刻 t での価格を P_t^{τ} とする. 無裁定条件より下式が成り立つ.

$$\begin{aligned} P_t^{\tau} &= E_t^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \sum_{i=0}^{\tau-1} r_{t+i} \right) \right] = E_t^{\mathbb{Q}} \left[\exp(-r_t) \exp \left(- \sum_{i=1}^{\tau-1} r_{t+i} \right) \right] \\ &= E_t^{\mathbb{Q}} \left[\exp(-r_t) E_{t+1}^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \sum_{i=1}^{\tau-1} r_{t+i} \right) \right] \right] = E_t^{\mathbb{Q}} [\exp(-r_t) P_{t+1}^{\tau-1}] \end{aligned} \quad (9)$$

ここで, $E_t^{\mathbb{Q}}[\cdot]$ は時刻 t までに入手された観測値情報の下での条件付期待値オペレータである.

式 (9) の解は以下のような形式を持つと予想される.

$$P_t^{\tau} = P_t^{1,\tau} P_t^{2,\tau} \quad (10)$$

ここで, $P_t^{1,\tau} = \exp(X_t' A_{\tau} X_t + b'_{\tau} X_t + c_{\tau})$, $P_t^{2,\tau} = \exp(-\tau lb_t + d_{\tau})$ とする.

式 (7), (8), (10) を式 (9) に代入し, X_t の次数に関して係数比較を行うと, 以下の差分方程式が得られる (導出は補論 A を参照).

$$\begin{aligned}
A_\tau &= -\Phi + K^Q A_{\tau-1} K^Q + 0.5 K^Q (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) G^{-1} (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) K^Q \\
b'_\tau &= (\mu^Q (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) + b'_{\tau-1}) K^Q \\
&\quad + 0.5 \left(\mu^Q (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) + b'_{\tau-1} \right) (G^{-1} + G'^{-1}) (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) K^Q \\
c_\tau &= c_{\tau-1} + b'_{\tau-1} \mu^Q + \mu^Q A_{\tau-1} \mu^Q \\
&\quad + 0.5 \left((\mu^Q (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) + b'_{\tau-1}) G^{-1} ((A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) \mu^Q + b_{\tau-1}) \right. \\
&\quad \left. + \log |\Sigma \Sigma'|^{-0.5} + \log |G|^{-0.5} \right) \\
d_\tau &= d_{\tau-1} + 0.5 \tau^2 \sigma^2
\end{aligned} \tag{11}$$

ここで, $G = (\Sigma \Sigma')^{-1} - 2A_{\tau-1}$ と置いている. また, 上記の差分方程式の境界条件は, $A_0 = 0_{N \times N}, b_0 = 0_{N \times 1}, c_0 = 0, d_0 = 0$ である. d_τ については, 式 (11) から,

$$d_\tau = 0.5 \sigma^2 \sum_{j=1}^{\tau} j^2 = \frac{1}{12} \sigma^2 \tau(\tau+1)(2\tau+1) \tag{12}$$

と計算できる.

時刻 t における満期までの期間が τ のゼロクーポン金利 y_t^τ は, 上述の割引債の価格表現から以下のように与えられる.

$$y_t^\tau = -\frac{1}{\tau} \log(P_t^{1,\tau} P_t^{2,\tau}) = -\frac{1}{\tau} (X_t' A_\tau X_t + b'_\tau X_t + c_\tau + d_\tau) + lb_t \tag{13}$$

証明は省くが, 式 (13) より y_t^τ の下限は,

$$-\frac{1}{\tau} \left(-\frac{1}{4} b'_\tau A_\tau^{-1} b_\tau + c_\tau + d_\tau \right) + lb_t \tag{14}$$

となる.

3.3 実確率測度下での状態変数の確率過程

ここでは, 実確率 $\mathbb{P}$ の下での金利の振る舞いをモデル化する. すなわち, 上で導入した状態変数 X_t と lb_t の $\mathbb{P}$ 上での確率過程を定める. まず, X_t の確率過程を,

$$X_{t+1} = \mu^\mathbb{P} + K^\mathbb{P} X_t + \varepsilon_{X,t+1}^\mathbb{P} \tag{15}$$

と定める. ここで, $\varepsilon_{X,t}^\mathbb{P} \sim i.i.d. N(0, I_N)$ とする.

lb_t の $\mathbb{P}$ での確率過程については, 以下の2つのタイプを考える.

$$lb_{t+1} = lb_t + \sigma \lambda + \sigma \varepsilon_{lb,t+1}^\mathbb{P} \tag{16}$$

$$lb_{t+1} = lb_t + \sigma \lambda + \sigma \Lambda X_t + \sigma \varepsilon_{lb,t+1}^\mathbb{P} \tag{17}$$

式 (16), (17) に現れる $\varepsilon_{lb,t}^\mathbb{P}$ は独立同分布な標準正規分布に従うとする. また, $\varepsilon_{lb,t}^\mathbb{P}$ と $\varepsilon_{X,t'}^\mathbb{P}$ の各要素の共分散は任意の t と t' でゼロと仮定する. これ以降, 式 (16) に従うモデルを「タイプ I」と呼び, 式 (17) に従うモデルを「タイプ II」と呼ぶことにする. タイプ I はドリフト項が定数で, タイプ II はドリフト項が X に依存するモデルとなっている.

3.4 期間プレミアム

期間プレミアムは、長期金利が変動するリスクに対する債券市場参加者の見返りを表すもので、以下の式で定義される。

$$TP_t^T = y_t^T - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} E_t^{\mathbb{P}}[r_{t+i-1}] \quad (18)$$

式 (18) の右辺第 2 項は以下のように計算される。

$$\begin{aligned} E_t^{\mathbb{P}}[r_{t+i}] &= E_t^{\mathbb{P}}[X'_{t+i} \Phi X_{t+i} + lb_{t+i}] \\ &= (\tilde{K}_t^i)' \Phi \tilde{K}_t^i + \text{Tr} \left(\sum_{j=1}^i (K^{\mathbb{P}})^{j-1} \Sigma \Sigma' (K^{\mathbb{P}})^{j-1} \Phi \right) + E_t^{\mathbb{P}}[lb_{t+i}] \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 $\tilde{K}_t^i = (K^{\mathbb{P}})^i X_t + (I_N - (K^{\mathbb{P}})^i)(I_N - K^{\mathbb{P}})^{-1} \mu^{\mathbb{P}}$ と置いている。また、式 (19) の $E_t^{\mathbb{P}}[lb_{t+i}]$ は、タイプ I とタイプ II のそれぞれについて以下のように計算される。

$$\begin{aligned} E_t^{\mathbb{P}}[lb_{t+i}] &= lb_t + i\sigma\lambda \\ E_t^{\mathbb{P}}[lb_{t+i}] &= lb_t + i\sigma\lambda + \sigma\Lambda \tilde{K}_t^i \end{aligned} \quad (20)$$

4 モデルの推定と応用

4.1 推定方法

本研究のモデルは、状態空間モデルとみなすことができる。遷移方程式は、 X については式 (15) となり、 lb についてはタイプ I では式 (16)、タイプ II では式 (17) に則ったものとなる。観測方程式は、

$$\begin{pmatrix} y_t^{T_1} \\ y_t^{T_2} \\ \vdots \\ y_t^{T_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\text{model}}^{T_1}(X_t, lb_t; \Theta^{\mathbb{Q}}) \\ g_{\text{model}}^{T_2}(X_t, lb_t; \Theta^{\mathbb{Q}}) \\ \vdots \\ g_{\text{model}}^{T_n}(X_t, lb_t; \Theta^{\mathbb{Q}}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nu_t^1 \\ \nu_t^2 \\ \vdots \\ \nu_t^n \end{pmatrix}$$

となる。ここで、 $\Theta^{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ 下での X と lb の確率過程を定めるパラメータ（モデルパラメータ）を表す。また、 g_{model}^T は式 (13) 右辺の X と lb を変数とする関数である。さらに、 ν_t^i は観測誤差を表す確率変数であり、正規分布 $N(0, \eta^2)$ に従うとする。全ての $i = 1, \dots, n$ について、 ν_t^i の分散を同一の値と置いているのは、推定の簡単化を図るためである。

遷移方程式は、状態変数のアフィン型関数でガウシアン拡散項を持つが、観測方程式は g_{model}^T が非線形関数であることから、潜在変数である X と lb の推定をカルマンフィルタを用いて行うことができない。そこで本研究では、[11] により提案された「無香料カルマンフィルタ」を X と lb の推定に用いる。状態空間モデルが非線形性を有する場合の対処法として、非線形方程式を線形近似する「拡張カルマンフィルタ」が知られているが、尤度関数のヤコビアンを求める必要がある。しかし、関数形が複雑である場合、ヤコビアンの計算が難しい場合がある。このような場合、関数のヤコビアンを計算することなく、「シグマポイント」と呼ばれる複数の点を用いて、状態変数の 2 次までのモーメントを近似計算する無香料カルマンフィルタが有効となる。計算過程は本稿では記さない。[11] を参照されたい。なお、モデルパラメータ $\Theta^{\mathbb{Q}}$ と $\Theta^{\mathbb{P}}$ の推定には疑似最尤法を用いる。

4.2 パラメータの設定

推定されるイールドカーブが十分な表現力を持つように、状態変数 X の次元 N を 3 とする。本研究の状態変数は観測することができない潜在変数であるため、潜在変数の識別可能性を維持するようなパラメータの設定が必要となる。[1] は QG モデルの推定時に不変変換によるパラメータの十分条件を導出した²。本研究のモデルにおいて [1] の十分条件を援用すると、式 (8) の X のボラティリティ Σ は $\Sigma = 0.1I_3$ 、 K^Q は下三角行列としてよい。式 (15) の K^P については下三角行列と仮定する。さらに、 X の確率測度 Q と P の下での定常性を維持するため、 K^Q 、 K^P の対角成分の絶対値は 0 より大きく 1 未満と仮定する。

4.3 データ

本研究の実証分析において使用するデータについて記しておく。観測値は、無担保オーバーナイトコール金利と、年限が 3 か月、6 か月、2 年、5 年、10 年、20 年のゼロクーポン金利とする。無担保オーバーナイトコール金利は日本銀行のホームページから取得する。ゼロクーポン金利は、日経 NEEDS FinancialQuest から日本国債の価格を取得し、[15] で提案された方法に基づき推定したものを使用する。推定に用いるデータは、2009 年 1 月 9 日から 2016 年 8 月 19 日までの週次データ（原則金曜日のデータ。但し、金曜日が営業日ではない場合、翌営業日のデータを使用）とする。単位時間は 1 週間となる。また、簡単化のため、無担保オーバーナイトコール金利は、期間 1 週間のゼロクーポン金利に等しい（但し、観測誤差を含む）と仮定して推定を実施する。

4.4 推定結果

4.4.1 モデルのフィット

タイプ I とタイプ II のモデルパラメータの推定値とタイプ II の状態変数 x_t の推定値は補論 B に記している。

表 1: モデルのフィット（平均二乗誤差平方根、対数尤度、ベイズ情報量基準）

	O/N コール	3 か月	6 か月	2 年	5 年	10 年	20 年	対数尤度	BIC
タイプ I	1.89	1.72	1.96	1.80	2.95	2.04	1.94	26716	-53254
タイプ II	1.98	1.97	1.94	1.86	2.73	1.92	1.89	26752	-53308

平均二乗誤差平方根の単位はベシスポイント。また、BIC はベイズ情報量基準。

表 1 はタイプ I とタイプ II における金利の推定値と観測値の年限毎の平均二乗誤差平方根、対数尤度、ベイズ情報量基準 (BIC) を示したものである。タイプ I、タイプ II ともにどの年限でも平均二乗誤差平方根は 3 ベシスポイント以下となっており、いずれも推定値が観測値への高いフィットを示していることが分かる。2 つのモデルの BIC を比べると、タイプ II の方が小さな値を示している。したがって、これ以降は、タイプ II に基づく結果のみを示すことにする。

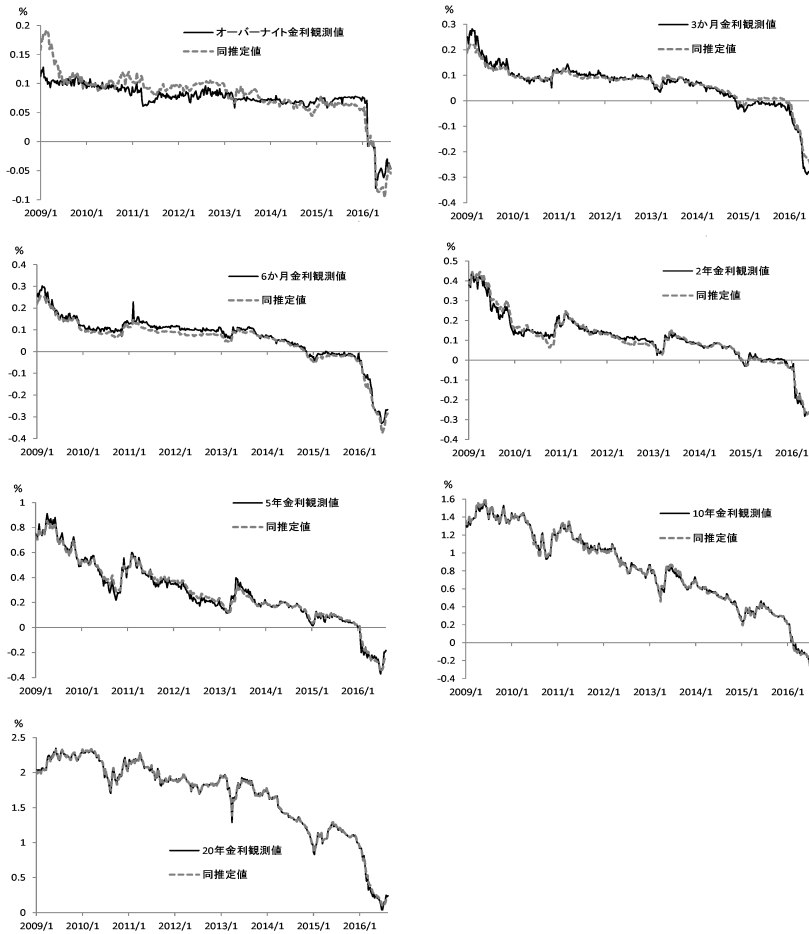
図 3 は時系列方向の観測値とタイプ II の推定値を示したものである。無担保オーバーナイトコール金利で若干乖離がある時期がみられるが、それ以外の年限では概ね良好なフィットを示している。

以上のように、タイプ II の推定値は観測値に高い精度でフィットしていることが分かる。しかし、図 3 のオーバーナイト金利、6 か月金利、5 年金利などの結果からも分かるように、推定誤差の自己

²不変変換の考え方は、[7] がアフィンガウシアン金利期間構造モデルに対して初めて導入した。

相関はゼロではない³。このように、本稿の結果に関して、統計的頑健性の確認が未だ不十分な段階にあり「キャリブレーション」の域を出ていない。したがって、以降に示す実証分析の結果の解釈は一定の幅を持って捉える必要がある点、留意されたい。

図 3: 観測値と推定値の時系列方向のフィット



4.4.2 金利の下限の推定値

短期金利の下限值 lb は潜在変数であり、推定の対象であった。図 4 は、時刻 t までの観測値の情報を所与とする lb_t の条件付き期待値 $E_t^p[lb_t]$ を示したものである。式 (14) でも記したように、時刻 t での残存期間 τ 週間のゼロクーポン金利 y_t^τ は $(\tau$ に依存する定数) $+ lb_t$ の下限を有する。したがって、 lb_t の変動に伴い短期金利の下限だけにとどまらず長期金利の下限も変動する。

³また、補論 B ではモデルパラメータの推定値を示しているが、その標準誤差は計算できていない。標準誤差の計算も今後の課題である。

図 4: 短期金利下限の推定値

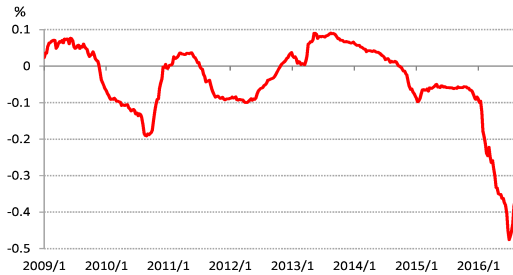


図 4 から、2016 年 1 月末以降、推定値が大幅に低下していることが確認できる。2016 年 1 月末から 7 月初にかけて約 40 ベーシスポイント低下した。マイナス金利政策の導入が、短期金利だけでなく長期金利にも大きな低下圧力となったことがこの点から推察される。

4.5 推定結果の応用

4.5.1 金融政策の変更が期間プレミアムに及ぼす影響

モデルの推定結果の応用として、式 (18), (19) に基づき期間プレミアムを計算する。特に、2013 年 4 月に導入が決まった「量的・質的金融緩和 (QQE)」と 2016 年 1 月に導入が決まった「マイナス金利政策 (NIRP)」が、債券市場参加者のリスク認識にどのような変化を与えたのかをみるために、政策決定前後での期間プレミアムの変化を計測する。短期的な影響と長期的な影響を捉えるために、政策変更の前後 4 週間と 1 年間 (但し、NIRP については 1 年間ではなく 30 週間) の期間プレミアムの変化幅を年限毎に計測する。

表 2 は、政策変更の前後 4 週間における期間プレミアム (年限は 2, 5, 10, 20 年) の変化幅を示したものである。QQE はどの年限でも期間プレミアムが上昇している。同政策は、短期的には債券市場動向の不確実性を高めたことが示唆される。一方、マイナス金利政策は全年限で期間プレミアムが低下している。同政策は量的緩和の拡大という方向性とは異なる新機軸であり、それが先行きの金融政策に対する不確実性を低下させたことが、期間プレミアム低下の一因となっている可能性がある。

表 2: 金融政策変更に伴う期間プレミアムの短期的な変化

	2 年	5 年	10 年	20 年
QQE (2013/4/4 決定) 2013/3/29 → 2013/4/26	4.25	13.1	21.1	32.0
NIRP (2016/1/29 決定) 2016/1/22 → 2016/2/19	-13.7	-18.7	-19.1	-14.9

単位はベーシスポイント。

表 3: 金融政策変更に伴う期間プレミアムの長期的な変化

	2 年	5 年	10 年	20 年
QQE (2013/4/4 決定) 2013/3/29 → 2014/3/28	-9.75	-14.9	-8.96	3.41
NIRP (2016/1/29 決定) 2016/1/22 → 2016/8/19	9.30	24.3	18.7	-50.9

単位はベーシスポイント。

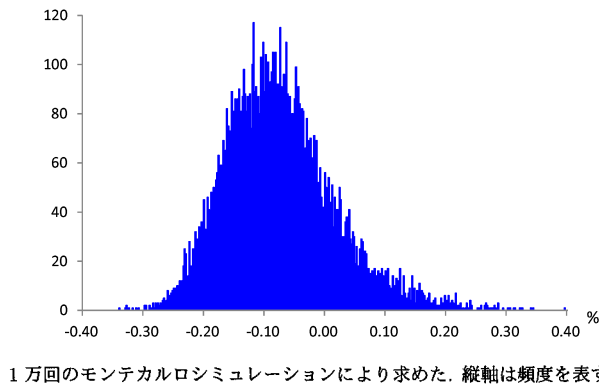
表3は、政策変更の前後1年間における期間プレミアムの変化幅を示したものである。QQEについては、20年を除く年限で低下している。20年の期間プレミアムについても、表2で示した短期的な変動幅からは低下している⁴。QQEは短期的には市場の不確実性を高めたが、長期的には不確実性が低下した可能性がある。一方、マイナス金利政策では、20年の期間プレミアムは大幅に低下したが、その他の年限の期間プレミアムは上昇する結果となっている。2016年半ば頃から「マイナス金利の深掘り」や「ヘリコプターマネー」導入が市場で話題になるなど、先行きの金融政策に対する不透明感が高まった。このことが10年以下の年限の期間プレミアムの上昇につながっている可能性が考えられる。20年の期間プレミアムが大幅に低下したことの1つの解釈として、新しい金融政策の導入が相対的に利回りの高い20年ゾーンの国債の需給環境に追い風になるとの見方が広がった可能性が考えられる。

4.5.2 先行きの長期金利の実確率分布

将来の長期金利の実確率分布を求めることは、投資家の金利リスク管理において重要である。本研究の推定結果を用いてこれが可能となる。例えば、6か月先の10年金利の実確率分布を計算することを考えよう。時刻 t における潜在変数の推定値、 $E_t^P[X_t]$ と $E_t^P[lb_t]$ から、式(15)、(17)に基づき24週間(=6か月)先の状態変数をシミュレーションする。すなわち、 i 番目のシミュレーションに関して X_{t+24}^i と lb_{t+24}^i を求める。これらから、式(13)により、 i 番目のシミュレーションに対する6か月先の10年金利 $y_{t+24}^{480,i}$ を求めることができる。このようなプロセスにより時刻 t における6か月先の10年金利の実確率分布 $P_t(y_{t+24}^{480})$ を得ることができる。

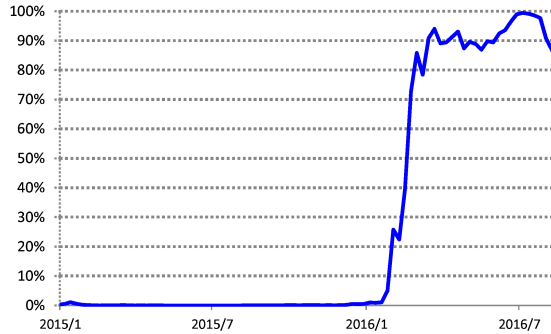
図5は、2016年8月19日における6か月先の10年金利の実確率分布を1万回のモンテカルロシミュレーションにより求めたものである。このような実確率分布からVaRなどのリスク量や先行きの長期金利がある一定値を下回る(上回る)確率など、金利リスク管理に有効な指標を計算することができる。図6は、6か月先の10年金利が負値となる実確率 $P_t(y_{t+24}^{480} < 0)$ の推移を示したものである。2016年1月に導入されたマイナス金利政策が当該確率を大きく上昇させたことがみてとれる。

図5: 6か月先の10年金利の実確率分布 (2016年8月19日)



⁴[9]は、QQE導入決定を挟む2013年1月から2014年9月の間の10年国債金利の期間プレミアムの低下幅が27.0ベースポイントと推定されたとしている。一方、本研究のタイプIIに基づく同期間の10年金利の期間プレミアムの低下幅は13.5ベースポイントだった。

図 6: 6 か月先の 10 年金利が負値となる確率



1 万回のモンテカルロシミュレーションにより求めた。

5 まとめと今後の課題

本研究では、2 次ガウシアン期間構造モデルに確率変動する金利下限を組み込んだ新しい金利期間構造モデルを提案した。これにより、負の値をとるイールドカーブを捉えることができるようになっただけでなく、将来、イールドカーブが負の水準の度合いを深めるような状況も捉えることができるようになった。これは、従来の金利期間構造モデルでは難しかったことである。

また、日本国債のゼロクーポン金利のデータを使ってモデルパラメータと状態変数の推定を行った。推定の結果、市場データに高い精度でフィットするモデルパラメータを得た。さらに、短期金利の下限の推定値が 2016 年初のマイナス金利政策導入決定とともに大幅に低下する妥当な結果を得た。これに加え、モデルの推定結果の応用として、金融政策の変更(量的・質的金融緩和とマイナス金利政策)が期間プレミアムに与える短期的・長期的影響を試算した。また、金利リスク管理に有効と考えられる、先行きの長期金利の実確率分布をモンテカルロシミュレーションにより求めた。

今後の課題として、推定結果の統計的な頑健性検証を行うことが挙げられる。具体的には、誤差解析とモデルパラメータ推定値の標準誤差の計算を通じてこれを行いたい。また、推定結果のアップデートも課題である。2016 年 9 月、日本銀行は「長短金利操作付き量的質的金融緩和」の導入を決定した。この政策は、イールドカーブ、特に 10 年金利の水準を金融市場調節によりゼロ%程度に維持するというものである。このような金融政策の下では、従来以上に先行きの長期金利の実確率分布を推定することの重要性が高まっているといえる。2016 年 9 月以降のデータを加え、本研究で提案するモデルのパラメータ推定を行い、この新しい政策の動向を期間プレミアムや金利の実確率分布の観点から捉えることが今後の課題である。

参考文献

- [1] AHN, D.-H., R. DITTMAR, AND A. GALLANT (2002): “Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence,” *The Review of Financial Studies*, 15(1), 243–288.
- [2] ANG, A., AND M. PIAZZESI (2003): “A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables,” *Journal of Monetary Economics*, 50(4), 745–787.

- [3] BAUER, M. D., AND G. D. RUDEBUSCH (2016): "Monetary Policy Expectations at the Zero Lower Bound," *Journal of Money, Credit and Banking*, 48(7), 1439–1465.
- [4] BLACK, F. (1995): "Interest Rates as Options," *The Journal of Finance*, 50(5), 1371–1376.
- [5] CHRISTENSEN, J. H., AND G. D. RUDEBUSCH (2015): "Estimating Shadow-Rate Term Structure Models with Near-Zero Yields," *Journal of Financial Econometrics*, 13(2), 226–259.
- [6] COX, J. C., J. E. INGERSOLL, AND S. A. ROSS (1985): "A Theory of the Term Structure of Interest Rates," *Econometrica*, 53(2), 385–407.
- [7] DAI, Q., AND K. J. SINGLETON (2000): "Specification Analysis of Affine Term Structure Models," *The Journal of Finance*, 55(5), 1943–1978.
- [8] DUFFIE, D., AND R. KAN (1996): "A Yield-factor Model of Interest Rates," *Mathematical Finance*, 6(4), 379–406.
- [9] FUKUNAGA, I., N. KATO, AND J. KOEDA (2015): "Maturity Structure and Supply Factors in Japanese Government Markets," *Monetary and Economic Studies*, 33, 45–95.
- [10] GOROVOI, V., AND V. LINETSKY (2004): "Black's Model of Interest Rates as Options, Eigenfunction Expansions and Japanese Interest Rates," *Mathematical Finance*, 14(1), 49–78.
- [11] JULIER, S., AND J. UHLMANN (1997): "A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems," *Proceedings of Aero Sense: 11th Int. Symp. Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls*, pp. 182–193.
- [12] KIM, D. H., AND K. J. SINGLETON (2012): "Term Structure Models and the Zero Lower Bound: An Empirical Investigation of Japanese Yields," *Journal of Econometrics*, 170(1), 32–49.
- [13] KIM, D. H., AND J. H. WRIGHT (2005): "An Arbitrage-Free Three-Factor Term Structure Model and the Recent Behavior of Long-Term Yields and Distant-Horizon Forward Rates," Finance and Economics Discussion Series, Washington: Board of Governors of the Federal Reserve System.
- [14] LEIPPOLD, M., AND L. WU (2002): "Asset Pricing under the Quadratic Class," *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 37(2), 271–295.
- [15] MCCULLOCH, J. H. (1975): "The Tax-Adjusted Yield Curve," *The Journal of Finance*, 30(3), 811–830.
- [16] WU, J. C., AND F. D. XIA (2016): "Measuring the Macroeconomic Impact of Monetary Policy at the Zero Lower Bound," *Journal of Money, Credit and Banking*, 48(2-3), 253–291.

補論 A 債券価格式の導出

本補論では債券価格式の導出を行う。式 (9) と (10) より,

$$\begin{aligned}
 P_t^\tau &= P_t^{1,\tau} P_t^{2,\tau} = \exp(X_t A_\tau X_t + b'_\tau X_t + c_\tau - \tau l b_t + d_\tau) \\
 &= E_t^Q[\exp(-r_t) P_{t+1}^{1,\tau-1} P_{t+1}^{2,\tau-1}] \\
 &= E_t^Q[\exp(-X'_t \Phi X_t) P_{t+1}^{1,\tau-1} \exp(-l b_t) P_{t+1}^{2,\tau-1}] \\
 &= E_t^Q[\exp(-X'_t \Phi X_t + X_{t+1} A_{\tau-1} X_{t+1} + b'_{\tau-1} X_{t+1} + c_{\tau-1}) \exp(-(\tau-1+1) l b_{t+1} + d_{\tau-1})] \\
 &= E_t^Q[\exp(-X'_t \Phi X_t + X_{t+1} A_{\tau-1} X_{t+1} + b'_{\tau-1} X_{t+1} + c_{\tau-1})] E_t^Q[\exp(-\tau l b_{t+1} + d_{\tau-1})]
 \end{aligned}$$

となる。上式の最後の等号は, $\varepsilon_{X,t+1}^Q$ と $\varepsilon_{lb,t+1}^Q$ が独立であることを用いている。

この等式は以下の 2 つの等式に分離できる。

$$\exp(X_t A_\tau X_t + b'_\tau X_t + c_\tau) = E_t^Q[\exp(-X'_t \Phi X_t + X_{t+1} A_{\tau-1} X_{t+1} + b'_{\tau-1} X_{t+1} + c_{\tau-1})] \quad (\text{A.1})$$

$$\exp(-\tau l b_t + d_\tau) = E_t^Q[\exp(-\tau l b_{t+1} + d_{\tau-1})] \quad (\text{A.2})$$

$G = (\Sigma \Sigma')^{-1} - 2A_{\tau-1}$ と置くと, 式 (A.1) は以下のように計算される。

$$\begin{aligned}
 &\exp(X_t A_\tau X_t + b'_\tau X_t + c_\tau) \\
 &= \exp \left(X'_t (-\Phi + K^Q A_{\tau-1} K^Q) X_t + (\mu^{Q'} (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) + b'_{\tau-1}) K^Q X_t + c_{\tau-1} \right) \\
 &\quad E_t^Q \left[(\varepsilon_{X,t+1}^Q)' \Sigma' A_{\tau-1} \Sigma \varepsilon_{X,t+1}^Q + \left((\mu^Q + K^Q X_t)' (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) + b'_{\tau-1} \right) \Sigma \varepsilon_{X,t+1}^Q \right] \\
 &= \exp \left(X'_t (-\Phi + K^Q A_{\tau-1} K^Q) X_t + (\mu^{Q'} (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) + b'_{\tau-1}) K^Q X_t + c_{\tau-1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} ((\mu^Q + K^Q X_t)' (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) + b'_{\tau-1}) G^{-1} ((A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) (\mu^Q + K^Q X_t) + b_{\tau-1}) \right) \\
 &\quad |\Sigma \Sigma'|^{-0.5} |G|^{-0.5} \\
 &= \exp \left(X'_t (-\Phi + K^Q A_{\tau-1} K^Q) X_t + (\mu^{Q'} (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) + b'_{\tau-1}) K^Q X_t + c_{\tau-1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} ((\mu^Q + K^Q X_t)' (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) + b'_{\tau-1}) G^{-1} ((A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) (\mu^Q + K^Q X_t) + b_{\tau-1}) \right) \\
 &\quad |\Sigma \Sigma'|^{-0.5} |G|^{-0.5}
 \end{aligned}$$

上式の X_t の各次数について両辺を比較すると, 以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 A_\tau &= -\Phi + K^Q A_{\tau-1} K^Q + 0.5 K^Q (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) G^{-1} (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) K^Q \\
 b'_\tau &= (\mu^{Q'} (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) + b'_{\tau-1}) K^Q \\
 &\quad + 0.5 \left(\mu^{Q'} (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) + b'_{\tau-1} \right) (G^{-1} + G'^{-1}) (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) K^Q \\
 c_\tau &= c_{\tau-1} + 0.5 \left(\mu^{Q'} (A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) + b'_{\tau-1} \right) G^{-1} \left((A_{\tau-1} + A'_{\tau-1}) \mu^Q + b_{\tau-1} \right)
 \end{aligned}$$

ここで, 境界条件は $A_0 = 0_{N \times N}$, $b_0 = 0_{N \times 1}$, $c_0 = 0$ である。

式 (A.2) の右辺は,

$$\begin{aligned}
 E_t^Q[\exp(-\tau l b_{t+1} + d_{\tau-1})] &= E_t^Q[\exp(-\tau (l b_t + \sigma \varepsilon_{lb,t+1}^Q) + d_{\tau-1})] \\
 &= \exp(-\tau l b_t + d_{\tau-1}) E_t^Q[\exp(-\tau \sigma \varepsilon_{lb,t+1}^Q)] \\
 &= \exp(-\tau l b_t + d_{\tau-1} + 0.5 \tau^2 \sigma^2)
 \end{aligned}$$

と計算できるので,

$$d_\tau = d_{\tau-1} + 0.5 \tau^2 \sigma^2$$

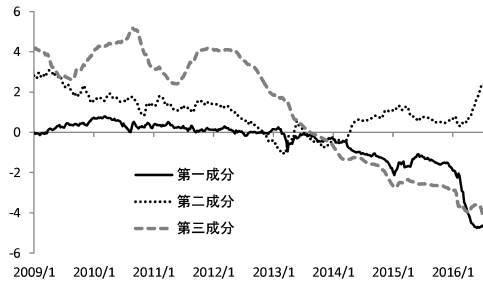
が成立する。この式と境界条件 $d_0 = 0$ から下式が成り立つ。

$$d_\tau = 0.5\sigma^2 \sum_{j=1}^{\tau} j^2 = \frac{1}{12}\sigma^2 \tau(\tau+1)(2\tau+1)$$

補論 B モデルパラメータと状態変数 X の推定値

タイプ I	タイプ II
$\Phi = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0.0545 & -0.0933 & 0.0066 \\ -0.0933 & 0.1835 & -0.242 \\ 0.0066 & -0.0242 & 0.0761 \end{pmatrix}$	$\Phi = 10^{-5} \begin{pmatrix} 0.0120 & 0.0168 & 0.0000 \\ 0.0168 & 0.0831 & -0.1355 \\ 0.0000 & -0.1355 & 0.3087 \end{pmatrix}$
$K^Q = \begin{pmatrix} 0.6474 & 0 & 0 \\ 0.7336 & 0.9969 & 0 \\ -1.254 & 0.0308 & 0.9971 \end{pmatrix}$	$K^Q = \begin{pmatrix} 0.9982 & 0 & 0 \\ 0.0119 & 0.9983 & 0.0007 \\ -0.0135 & 0.0494 & 0.9725 \end{pmatrix}$
$\mu^Q = \begin{pmatrix} -1.1037 \\ 2.2910 \\ -3.9604 \end{pmatrix}$	$\mu^Q = \begin{pmatrix} 0.038 \\ 0.0157 \\ 0.0396 \end{pmatrix}$
$K^P = \begin{pmatrix} 0.9763 & 0 & 0 \\ 0.0554 & 0.9998 & 0 \\ -1.8233 & -0.1010 & 0.8158 \end{pmatrix}$	$K^P = \begin{pmatrix} 0.9999 & 0 & 0 \\ -0.0057 & 0.9983 & 0 \\ -0.0029 & 0.0134 & 0.9985 \end{pmatrix}$
$\mu^P = \begin{pmatrix} -0.9675 \\ 2.0120 \\ -4.1986 \end{pmatrix}$	$\mu^P = \begin{pmatrix} -0.0002 \times 10^{-8} \\ 0.4812 \\ -3.1788 \end{pmatrix}$
$\lambda = -0.0021$	$\lambda = -6.582, \Lambda = \begin{pmatrix} 0.03845 \\ -0.1042 \\ 0.03353 \end{pmatrix}$
$\sigma = 2.16 \times 10^{-6}$	$\sigma = 1.79 \times 10^{-6}$

図 B.1: 状態変数 X の推定値



Faculty of Economics, Shiga University
Hikone, Shiga, 522-8522, Japan
E-mail address: kentaro-kikuchi@biwako.shiga-u.ac.jp

滋賀大学・経済学部 菊池 健太郎