

カオス・乱流への統計力学的アプローチ

九州大学名誉教授 森 肇

ブラウン運動の射影演算子法 (H.Mori, 1965) を拡張して、軌道不安定性によるカオス・乱流のランダムな揺らぎを記述する線形確率微分方程式を導出し、ランダムな運動へのエネルギー散逸や諸々の輸送現象などの統計力学的理論を構築できる。その理論的骨組を文献 1), 2) の論文に従って述べた。

1 カオス軌道に対する線形確率微分方程式

諸種の非線形力学系が、正の Liapunov 指数をもち、初期値敏感性や初期記憶の喪失、更に、エネルギー散逸や輸送現象など、軌道不安定性による諸々の性質を示す。これらを理論的に解明するため、カオス・乱流のランダムな揺らぎを記述する線形確率微分方程式 (一般に非マルコフ型) を、射影演算子法 [3] により力学系の非線形運動方程式から厳密に導出する。[1, 2]

系の相空間の状態変数を $X(t) = \{X_j(t)\}$ ($j = 1, 2, \dots, d$) とし、カオス・乱流における観測量 $A(t) = \{A_l(t)\}$ ($l = 1, 2, \dots, \delta$) ($\delta \leq d$) の揺らぎを考える。そのとき、 $A(t)$ の時間発展を与える運動方程式は

$$dA(t)/dt = \dot{A}(t) = \Lambda A(t), \quad (\Lambda \equiv \sum_{j=1}^d \dot{X}_j \frac{\partial}{\partial X_j}) \quad (1)$$

とかけ、 $A(t) = \exp[t\Lambda]A(0)$ と積分できる。いま、 $A_l(t)$ と $A_m(0)$ との時間相関を長時間平均

$$\langle A_l(t) A_m^\dagger(0) \rangle \equiv \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau ds A_l(t+s) A_m^\dagger(s) \quad (2)$$

で定義すれば、 $A(t)$ の時間発展の最確値は、緩和関数

$$\Xi(t) \equiv \langle A(t) A^\dagger \rangle \langle A A^\dagger \rangle^{-1} \quad (3)$$

を使って、 $\Xi(t)A$ によって与えられる。この最確値の時間発展を、運動方程式 (1) から陽に取り出すために、先にブラウン運動論で導入した射影演算子 [3]

$$\mathcal{P}G(X) = \langle G(X) A^\dagger \rangle \langle A A^\dagger \rangle^{-1} A \quad (4)$$

を使う。

ここでは2つのカオス系を例にとる。一つは、位置 q と運動量 p の一次元 Duffing 振動子

$$dp/dt = -\gamma^0 p + v(q) + b \cos(\omega_0 t + \phi_0), \quad (5)$$

$$v(q) \equiv -q^3 + q \quad (6)$$

である。ここで、 γ^0 は分子摩擦係数、 b は位相 $\phi = \omega_0 t + \phi_0$ の周期外力の振幅である。 $v(q)$ はポテンシャル力であり、その非線形項がカオスを惹き起すのである。この系の相空間は $X = \{q, p, \phi\}$ であるが、着目する観測量は $A = \{q, p\}$ としよう。そのとき、(1) の発展演算子 Λ は

$$\Lambda = p \frac{\partial}{\partial q} + \{-\gamma^0 p + v(q) + b \cos \phi\} \frac{\partial}{\partial p} + \omega_0 \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (7)$$

となり、 $\langle q \rangle = \langle p \rangle = \langle qp \rangle = 0$ だから、射影演算子 (4) は

$$\mathcal{P}G \equiv \{\langle Gq \rangle / \langle q^2 \rangle\} q + \{\langle Gp \rangle / \langle p^2 \rangle\} p \quad (8)$$

となる。

もう一つのカオス系は、非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式である。いま、流速 $\{u_\alpha(\mathbf{r})\}$ の空間的フーリエ成分 $\{u_{\alpha\mathbf{k}}\}$ ($0 < k < k_C \sim 10^3 \text{cm}^{-1}$) をとり、慣性小領域 $k_L < k < k_I (\ll k_C)$ において乱流が発達しているとすれば、Navier-Stokes 方程式は

$$du_{\alpha\mathbf{k}}/dt = -\nu^0 k^2 u_{\alpha\mathbf{k}} + V_{\alpha\mathbf{k}}(u) + K_{\alpha\mathbf{k}}, \quad (9)$$

$$V_{\alpha\mathbf{k}}(u) = \sum_{\beta, \gamma} \sum_{\mathbf{p}}' V_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) u_{\beta\mathbf{p}} u_{\gamma\mathbf{k}-\mathbf{p}} \quad (10)$$

となる。ここで、 ν^0 は動的分子粘性、 $K_{\alpha\mathbf{k}}$ は低波数領域 $k < k_L$ に働く一定の外力である。(10) の $\sum_{\mathbf{p}}'$ は、 $k_L < p < k_C$ なる波動ベクトル $\mathbf{p}$ にわたる和である。この $V_{\alpha\mathbf{k}}(u)$ が、乱流を惹き起した非線形慣性力である。この系では、相空間の状態変数 X も着目する観測量 A も同一で、 $X = A = \{u_{\alpha\mathbf{k}}\}$ ($0 < k < k_C$) とすれば、(1) の発展演算子 Λ は

$$\Lambda = \sum_{\alpha} \sum_{\mathbf{k}} \{-\nu^0 k^2 u_{\alpha\mathbf{k}} + V_{\alpha\mathbf{k}}(u) + K_{\alpha\mathbf{k}}\} \frac{\partial}{\partial u_{\alpha\mathbf{k}}} \quad (11)$$

となり、更に、乱流は統計的に一様で等方的とすれば

$$\langle u_{\alpha\mathbf{k}} u_{\beta\mathbf{l}}^\dagger \rangle = \langle |u_{\alpha\mathbf{k}}|^2 \rangle \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{l}} \quad (12)$$

となり、射影演算子 (4) は

$$\mathcal{P}G(u) = \sum_{\alpha} \sum_{\mathbf{k}} \{\langle G(u) u_{\alpha\mathbf{k}}^\dagger \rangle / \langle |u_{\alpha\mathbf{k}}|^2 \rangle\} u_{\alpha\mathbf{k}} \quad (13)$$

となる。

カオス系の観測量 $A(t)$ の時間発展方程式 (1) の形態は、具体例 (5) と (9) とを一般化して

$$dA(t)/dt = \dot{A}(t) = V^0(A(t)) + V(X(t)) + K(X(t)) \quad (14)$$

のように、3つのタイプの項からなる。その第2項 $V(X)$ は、(5) の非線形力 $v(q)$ や (9) の非線形慣性力 $V_{\alpha\mathbf{k}}(u)$ のように、カオス・乱流を惹き起す非線形力であり、 $K(X)$ は、散逸するエネルギーを補給する周期外力である。 $V^0(A)$ は、(5) の $-\gamma^0 p$ や (9) の $-\nu^0 k^2 u_{\alpha\mathbf{k}}$ のような残りの

項で、一般に A の関数である。いま非線形力 $V(X(t))$ に着目し、これを射影演算子 (4) の $\mathcal{P}$ および $\mathcal{Q} = 1 - \mathcal{P}$ を使って

$$V(X(t)) = e^{t\Lambda} \{\mathcal{P} + \mathcal{Q}\} V(X) = i\Omega A(t) + e^{t\Lambda} \mathcal{Q} V(X) \quad (15)$$

と変形しよう。ここで $i\Omega \equiv \langle V(X) A^\dagger \rangle \langle A A^\dagger \rangle^{-1}$ とした。次に、真に非線形な力 $F(t) \equiv e^{t\Lambda} \mathcal{Q} V(X)$ を導入しよう。これは、恒等式

$$e^{t\Lambda} = e^{t\mathcal{Q}\Lambda} + \int_0^t ds e^{(t-s)\Lambda} \mathcal{P} \Lambda e^{s\mathcal{Q}\Lambda} \quad (16)$$

を使えば、本理論の最も基本的な式

$$F(t) \equiv e^{t\Lambda} \mathcal{Q} V(X) = R(t) - \int_0^t ds \Gamma(s) A(t-s) \quad (17)$$

を与える。ここで、揺動力 $R(t)$, $\tilde{R}$ と記憶関数 $\Gamma(t)$

$$R(t) \equiv e^{t\mathcal{Q}\Lambda} \mathcal{Q} V(X), \quad \tilde{R} \equiv \mathcal{Q} \Lambda A, \quad (18)$$

$$\Gamma(t) \equiv \langle R(t) \tilde{R}^\dagger \rangle \langle A A^\dagger \rangle^{-1} \quad (19)$$

を定義した。 $R(t)$ の propagator $e^{t\mathcal{Q}\Lambda}$ の射影演算子 $\mathcal{Q}$ は、 $F(t)$ から時間スケール τ_M の線形長時間運動を排除し、(17) の第2項のように、それを $A(t)$ の線形発展にくり込むものである。この第2項が、カオス・乱流による線形輸送項を与えることになるのである。

(17) を (15) の第2項に入れ、この (15) を (14) に入れれば、カオス・乱流の式

$$\frac{d}{dt} A(t) - V^0(A(t)) - i\Omega A(t) + \int_0^t ds \Gamma(s) A(t-s) = R(t) + K(X(t)) \quad (20)$$

が得られる。ここで $\langle R(t) A^\dagger \rangle = 0$ であり、(5) や (9) のように $V^0(A) = \{i\Omega^0 - \Gamma^0\} A$ であれば、この (20) は緩和関数 (3) の時間発展に対して線形方程式を与え、そのラプラス変換は

$$\Xi(z) \equiv \int_0^\infty dt e^{-zt} \Xi(t) = \frac{1}{z - i(\Omega^0 + \Omega) + \Gamma^0 + \Gamma(z)} \{1 + L(z)\} \quad (21)$$

となる。ここで $L(z)$ は $\langle K(X(t)) A^\dagger \rangle \langle A A^\dagger \rangle^{-1}$ のラプラス変換である。 $\Gamma(z)$ は (19) の $\Gamma(t)$ のラプラス変換であり、

$$\Gamma(i\omega) = \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \langle R(t) \tilde{R}^\dagger \rangle \langle A A^\dagger \rangle^{-1} \quad (22)$$

が振動数 ω の弱い外力に対する線形輸送係数を与える。(19) と (22) が、カオス・乱流に対する揺動散逸定理を与える。

Duffing 振動子 (5) にこの方法を適用すれば、(20) から、カオスの式

$$\frac{d}{dt} p + \gamma^0 p + \Omega_0^2 q + \int_0^t ds \gamma(s) p(t-s) = r(t) + b \cos(\omega_0 t + \phi_0) \quad (23)$$

が得られる。ここで、 $\Omega_0^2 \equiv -\langle v(q) q \rangle / \langle q^2 \rangle$,

$$\gamma(t) \equiv \langle r(t) \tilde{r} \rangle / \langle p^2 \rangle, \quad (24)$$

$$r(t) \equiv e^{t\mathcal{Q}\Lambda} \mathcal{Q} v(q), \quad \tilde{r} \equiv \mathcal{Q} \dot{p} \quad (25)$$

とした. 更に $\langle r(t)q \rangle = \langle r(t)p \rangle = 0$ である. 式 (23) の線形輸送項の記憶関数 $\gamma(s)$ は, (19) と (22) に対応して, カオス誘導摩擦係数として

$$\gamma(i\omega) \equiv \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \gamma(t) = \frac{1}{\langle p^2 \rangle} \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \langle r(t) \tilde{r} \rangle \quad (26)$$

を与える.

Navier-Stokes 方程式 (9) に (20) 式を適用すれば, 乱流の式

$$\frac{d}{dt} u_{\alpha\mathbf{k}}(t) + \nu^0 k^2 u_{\alpha\mathbf{k}}(t) + \int_0^t ds \gamma_{\alpha\mathbf{k}}(s) u_{\alpha\mathbf{k}}(t-s) = r_{\alpha\mathbf{k}}(t) + K_{\alpha\mathbf{k}} \quad (27)$$

が得られる. ここで, 揺動力 $r_{\alpha\mathbf{k}}(t)$ と 記憶関数 $\gamma_{\alpha\mathbf{k}}(t)$

$$r_{\alpha\mathbf{k}}(t) \equiv e^{tQ\Lambda} Q V_{\alpha\mathbf{k}}(u), \quad (28)$$

$$\gamma_{\alpha\mathbf{k}}(t) \equiv \langle r_{\alpha\mathbf{k}}(t) r_{\alpha\mathbf{k}}^\dagger \rangle / \langle |u_{\alpha\mathbf{k}}|^2 \rangle \quad (29)$$

を定義した. 更に $\langle r_{\alpha\mathbf{k}}(t) u_{\alpha\mathbf{k}}^\dagger \rangle = 0$, $\langle K_{\alpha\mathbf{k}} u_{\alpha\mathbf{k}}^\dagger \rangle = 0$ と考えられるので, 流速 $u_{\alpha\mathbf{k}}(t)$ の緩和関数 $\xi_{\alpha\mathbf{k}}(t)$ は (21) から

$$\xi_{\alpha\mathbf{k}}(z) \equiv \int_0^\infty dt e^{-zt} \langle u_{\alpha\mathbf{k}}(t) u_{\alpha\mathbf{k}}^\dagger \rangle / \langle |u_{\alpha\mathbf{k}}|^2 \rangle, \quad (30)$$

$$= \frac{1}{z + \{\nu^0 + \nu'(k, z/i)\} k^2} \quad (31)$$

と求まる. ここで, 波数 k , 振動数 ω の乱流粘性は

$$\nu'(k, \omega) \equiv \frac{\gamma_{\alpha\mathbf{k}}(z = i\omega)}{k^2} = \frac{1}{k^2 \langle |u_{\alpha\mathbf{k}}|^2 \rangle} \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \langle r_{\alpha\mathbf{k}}(t) r_{\alpha\mathbf{k}}^\dagger \rangle \quad (32)$$

によって与えられる. なお, (22), (26), (32) がカオス・乱流に対する揺動散逸定理を与える.

参考文献

- [1] H. Mori, S. Kuroki, H. Tominaga, R. Ishizaki and N. Mori, Prog. Theor. Phys. **109** (2003), 333.
- [2] H. Mori, S. Kuroki, H. Tominaga, R. Ishizaki and N. Mori, Prog. Theor. Phys. (to be submitted).
- [3] H. Mori, Prog. Theor. Phys. **33** (1965), 423.