

二層流体における内部孤立波の二次元的相互作用について

九大 総理工 辻 英一 (Hidekazu Tsuji)

九大 応力研 及川 正行 (Masayuki Oikawa)

1 はじめに

二層流体中の界面におこる内部波は、表面波と同様に、弱非線形性及び長波長を仮定すると、一般に Korteweg-de Vries(KdV) 方程式で記述される。しかし、二層の密度や厚さによっては、3次の非線形項を付け加えた Modified KdV(MKdV) 方程式 [1]

$$u_T + 6Pu u_X - 6Qu^2 u_X + u_{XXX} = 0 \quad (1)$$

で置き換えなくてはならない (P, Q は係数、添え字は微分を表わす)。最近我々は、そのような特別なパラメーター領域における孤立波や、それらの相互作用について考察してきた [2]。

今、波がほとんど同じ方向に伝わる (弱い二次元性をもつ) 場合を考えることにする。この場合、波を記述する方程式は、KdV 方程式の弱二次元的拡張である Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式に、3次の非線形項を付け加えた方程式

$$\left(u_T + 6Pu u_X - 6Qu^2 u_X + u_{XXX} \right)_X + \frac{1}{2} u_{YY} = 0 \quad (2)$$

となる。以後この方程式を Modified Kadomtsev-Petviashvili(MKP) 方程式と呼ぶことにする。今回我々は、この MKP 方程式に基づく孤立波の相互作用を数値計算によって調べた。

ところで、3次の非線形項を付加する前の KP 方程式はソリトン系 (可積分系) である。KP ソリトンの相互作用ではソリトン共鳴と呼ばれる興味ある現象が見られることは良く知られている [3, 4, 5]。これは、複数のソリトンの相互作用により新しいソリトンができる現象である。

一方、偏微分方程式が可積分系であるかどうかの一つの目安として、Ablowitz らは、「方程式がパンルベ性と呼ばれる性質を持てば、可積分系である」という予想をたてた。我々は MKP 方程式を調べたところ [6, 7]、パンルベ性を持たない、つまり可積分系ではないであろうということが判った。また、MKP 方程式の一次元版である MKdV 方程式はソリトン系である。つまりこの方程式は、二次元への拡張により、方程式の性質

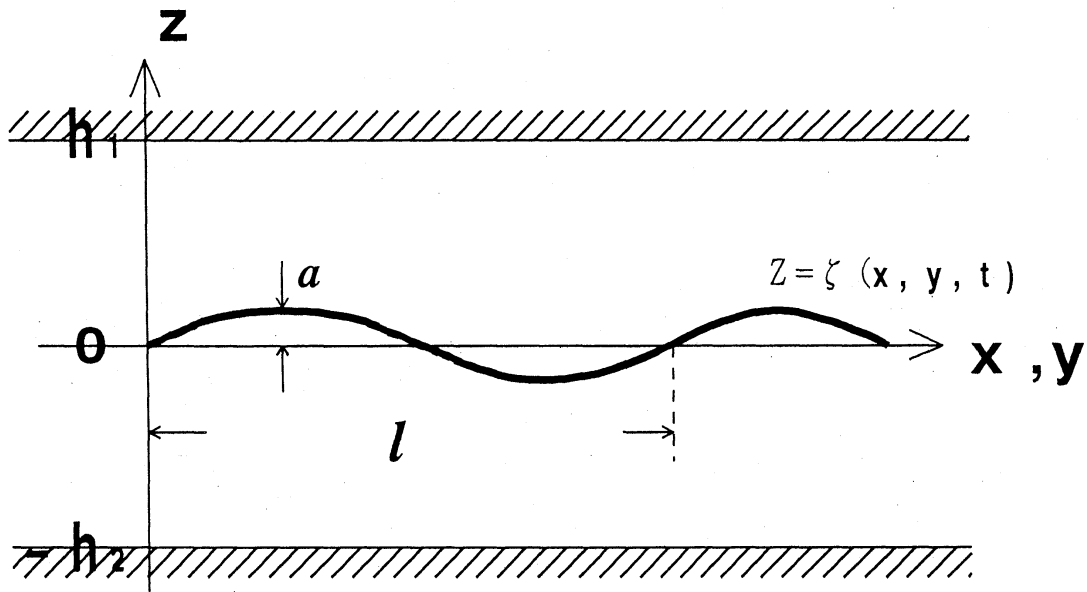


図 1: 二層流体系

が根本的に変化したと言えよう。

この研究の目的は、そのような系において波の二次元的な相互作用はどうか、3次の非線形項を付加する前の KP 方程式の性質がどの程度 MKP 方程式に受け継がれるかどうかを、特にソリトン共鳴が起きるかどうか注目して調べることである。

なお普通は、KdV 方程式の 2 次の非線形項を 3 次に変更したものを "Modified" の名を付けて呼ぶが、(1), (2) 式は、 $u = u' + \frac{p}{2q}$ という変換によって 2 次の非線形項を消去できる (u'_x に比例する項が出てくるがこれは動く座標系にのると消える)。しかしその場合、この変換によって境界条件が変わってしまう。ここで (1), (2) に対する境界条件として $u \rightarrow 0$ ($X \rightarrow \infty$) を要求する。

2 定式化

図 1 のような上下を壁で挟まれた二層流体系を考える。水平方向に x 軸、 y 軸を、鉛直上向きに z 軸を取る。上の壁の位置を、 $z = h_1$ 、下の壁の位置を $z = -h_2$ とし、二種の流体の平均界面の位置を $z = 0$ に定める (以後、添え字 1 は上層、添え字 2 は下層の量を意味する)。動いている界面の形状は $z = \zeta(x, y, t)$ で表す。流体の密度を ρ_1, ρ_2 で表す。流体は非粘性、非圧縮、渦なしとする。そのため、両層で速度ポテンシャル ϕ_1, ϕ_2

が定義できる。

今、界面の波の代表振幅を a 、代表的な水平スケールを l 、鉛直スケールを h_1 として、次の仮定をする。

$$\frac{a}{h_1} \equiv \epsilon \ll 1 \quad \frac{h_1}{l} \equiv \delta \ll 1 \quad h_1 \simeq h_2$$

すなわち、界面の振幅は鉛直スケールに対して十分小さく、水平スケールは鉛直スケールに対して十分大きい。そして、二つの微小量 ϵ と δ を定義した。

基礎方程式は ϕ_1, ϕ_2 に対するラプラス方程式と上下の壁及び界面での境界条件である。ラプラス方程式をそれぞれ上、下の壁での境界条件を用いて δ^2 の巾展開で解き、界面での境界条件に代入すると次の結果を得る。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \Delta f_1 + \epsilon \nabla \cdot (\zeta \nabla f_1) + \frac{\delta^2}{6} \Delta^2 f_1 + O(\epsilon \delta^2) = 0$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \Delta f_2 + \frac{\epsilon}{\gamma} \nabla \cdot (\zeta \nabla f_2) - \frac{\delta^2 \gamma^2}{6} \Delta^2 f_2 + O(\epsilon \delta^2) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\sigma}{\gamma} \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\epsilon}{2} (\nabla f_1)^2 - \frac{\epsilon \sigma}{2 \gamma^2} (\nabla f_2)^2 \\ - \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta f_1) + \frac{\delta^2 \gamma \sigma}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\Delta f_2) + O(\epsilon \delta^2) = \left(1 + \frac{\sigma}{\gamma}\right) \zeta \end{aligned}$$

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \gamma \equiv \frac{h_2}{h_1}, \quad \sigma \equiv \frac{\rho_2}{\rho_1} (> 1)$$

ここで、 f_1, f_2 はそれぞれ上、下の壁での速度ポテンシャルの値であり、全ての物理量は a, l, h_1, V (V は線形の場合の位相速度) 等を用いて無次元化している ([2] を参照)。

多くのパラメーター領域では、ここから逡減摂動法を用いて KP 方程式を得られるが、 $\sigma \simeq \gamma^2$ の場合には、MKP 方程式が導出される。具体的には、座標変換 $\xi = x - t$, $\eta = \epsilon y$, $\tau = \epsilon^2 t$ を行い、 $\delta \simeq \epsilon$ とする。また、 $\gamma = \gamma_c + \epsilon \beta$ ($\gamma_c \equiv \sqrt{\sigma}$) とする。そして $\zeta = \zeta^{(0)} + \epsilon \zeta^{(1)} + \dots$ と展開すると

$$\left(\zeta_\tau^{(0)} + \frac{3 p_c}{2} \zeta^{(0)} \zeta_\xi^{(0)} - 3 r_c \zeta^{(0)2} \zeta_\xi^{(0)} + \frac{q_c}{6} \zeta_{\xi \xi \xi}^{(0)} \right)_\xi + \frac{1}{2} \zeta_{\eta \eta}^{(0)} = 0$$

$$p_c \equiv -\frac{2\beta}{\gamma_c(1+\gamma_c)} \quad r_c \equiv \frac{1}{\gamma_c} \quad q_c \equiv 1 - \gamma_c + \gamma_c^2$$

が得られる。そしてわかりやすいように変換

$$\frac{q_c}{6} \tau = T, \quad \zeta^{(0)} = u, \quad \xi = X, \quad \eta = Y$$

$$P = \frac{3p_c}{2q_c} \quad Q = \frac{3r_c}{q_c} (> 0)$$

を行うと (2) 式の形になる。\$P < 0\$ の時、\$u \to -u\$ と変換すれば、(2) は \$P > 0\$ の場合に帰着する。従って、以下では \$P > 0\$ とする。

3 数値計算法

我々は Wineberg ら [8] にならって MKP 方程式を数値的にといた。空間微分は擬スペクトル法を用い、時間発展は Crank-Nicolson 法に一種の反復法を組合わせた方法を使用した (以後の計算で、時間刻みは 0.005 とする)。境界条件は \$X, Y\$ 方向とも周期境界条件を使った。初期条件は二つの平面孤立波解 \$u_1, u_2\$

$$u_i = \frac{\kappa_{Xi}}{\sqrt{Q}} \cdot \{\tanh(\eta_i + \delta_i) - \tanh \eta_i\} \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

$$\eta_i = \kappa_{Xi}X + \kappa_{Yi}Y + \Omega_i T \quad \Omega_i = -4\kappa_{Xi}^3 - \kappa_{Yi}^2/4\kappa_{Xi}$$

$$\delta_i = -\frac{1}{2} \log \frac{P - 2\kappa_{Xi}\sqrt{Q}}{P + 2\kappa_{Xi}\sqrt{Q}}$$

で、\$\kappa_{X1} = \kappa_{X2} \equiv \kappa_X\$, \$\kappa_{Y1} = -\kappa_{Y2} \equiv \kappa_Y\$ として重ねあわせたものとする。もちろんこの一つ一つの波は MKP 方程式の解となっているが、二つを重ねあわせたものは解とはならない。\$X, Y\$ 方向の周期 \$L_X, L_Y\$ を

$$\frac{L_X}{L_Y} = \frac{1/\kappa_X}{1/\kappa_Y} \quad (4)$$

が満たされるように定め、初期に 2 つの孤立波の峰が基本領域の対角線にくるようにする。さらに計算領域が、一辺が \$2\pi\$ の正方形となるように、スケール変換 \$x = (2\pi/L_X)X\$, \$y = (2\pi/L_Y)Y\$ (この \$x, y\$ は第 2 章の \$x, y\$ とは異なることに注意) を行う。示されている図は全て計算領域での図である。初期波形は (図 2) のようになっている。軸にふられている数字

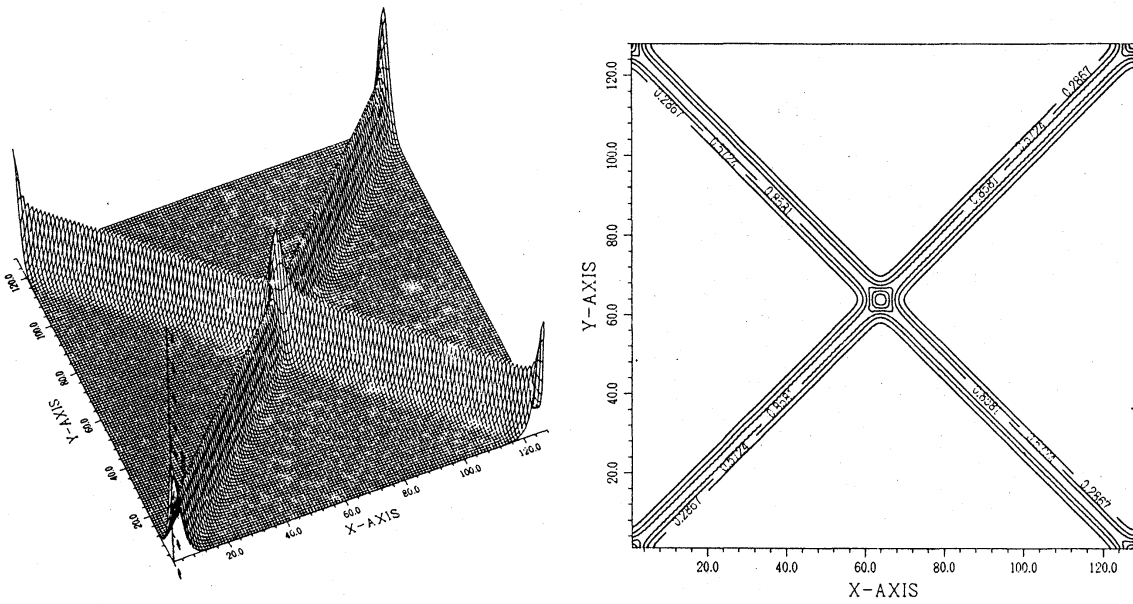


図 2: 初期に与える波形。

はメッシュ点の番号である。正方形の一辺が 128 等分されている。X, Y 平面での 2 つの初期の孤立波の（それぞれが相互作用なしに伝播したと仮定した時の）伝播方向の交角は、 $\theta = 2 \tan^{-1}(L_X/L_Y)$ で与えられる。

最後に、実際にはパラメーターとして L_X, L_Y, κ_X の値を与える。関係式 (4) からこの 3 つより κ_Y は一意に決まる。そして以後 κ_X を κ で表わす。

解くときに用いる仮定がある。いま、 u を有限フーリエ級数で

$$u \equiv \sum_{K_x=-K_{cut}+1}^{K_{cut}} \sum_{K_y=-K_{cut}+1}^{K_{cut}} v(K_x, K_y, T) \cdot \exp\{i(K_x x + K_y y)\}$$

$$(K_x, K_y : \text{整数}, K_{cut} = 128/2 = 64)$$

と表わす時、MKP 方程式の波数空間での表現は、

$$iK_x \cdot \frac{2\pi}{L_X} (v_T + \dots) - \frac{1}{2} K_y^2 \left(\frac{2\pi}{L_Y} \right)^2 v = 0$$

である。ここでわかるように $K_x = 0, K_y \neq 0$ の場合には $v = 0$ でなければならない。すなわち、

$$v(K_x = 0, K_y \neq 0, T) \equiv 0 \quad (5)$$

この成分は、 y 方向にのみ伝わるような波の成分であり、方程式 (2) は波がほとんど X 方向に伝わるとして導いたのであるから、仮定 (5) は許されるであろう。

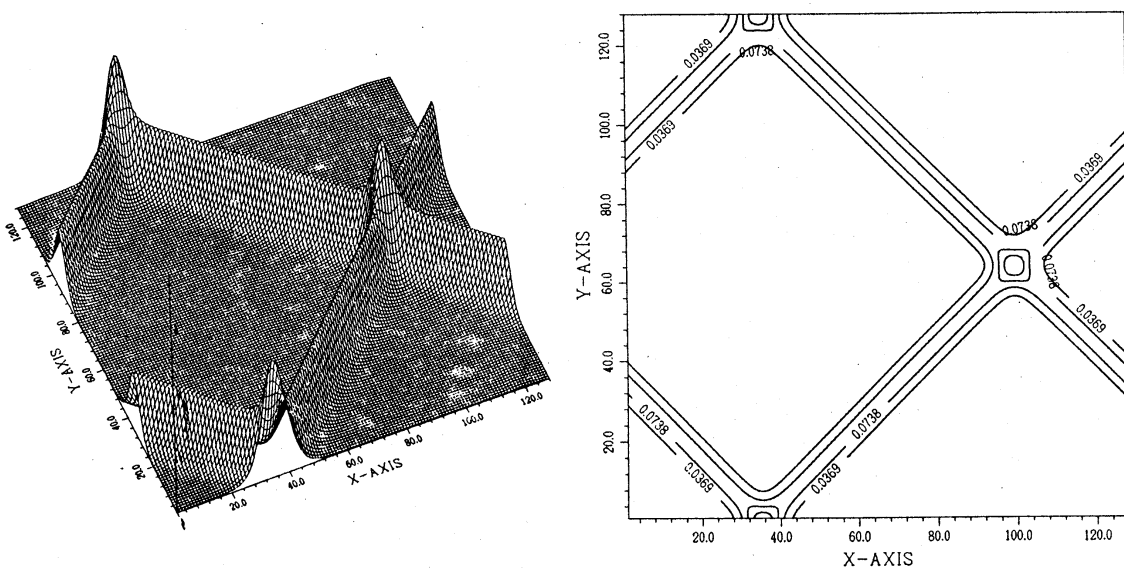


図 3: MKP 方程式の数値計算 ($\theta = 143.1^\circ$)。

$P = 1.5, Q = 2.5, \kappa = 0.25, L_X = 100, L_Y = 100/3, T = 6$ 。

また $K_x = K_y = 0$ の場合には v が不定になる。そこで、保存則

$$\frac{\partial}{\partial T} \int \int u dx dy = 0$$

から得られる

$$\frac{\partial}{\partial T} v(K_x = 0, K_y = 0, T) = 0$$

を用いて、

$$v(K_x = 0, K_y = 0, T) = v(K_x = 0, K_y = 0, T = 0)$$

とした。

4 結果、考察

最初に示す 2 例はパラメーター P, Q, κ, L_X を変えずに、 L_Y の値を変えたものである。すなわち初期の孤立波の進行方向の角度 θ が違う場合である（もともと KP 型の方程式は X 方向に主に伝わる波を考察するのだが、その仮定の上でさらに進行方向のずれを考える）。

まず最初に波の進行方向のずれが大きい場合 ($\theta = 143.1^\circ$) である (図 3)。この時、二つの波は、ほとんど相互作用をせずに、そのままの形を保ってそれぞれ進んで行く。計算は $T = 40$ まで進めたが、その時点まで

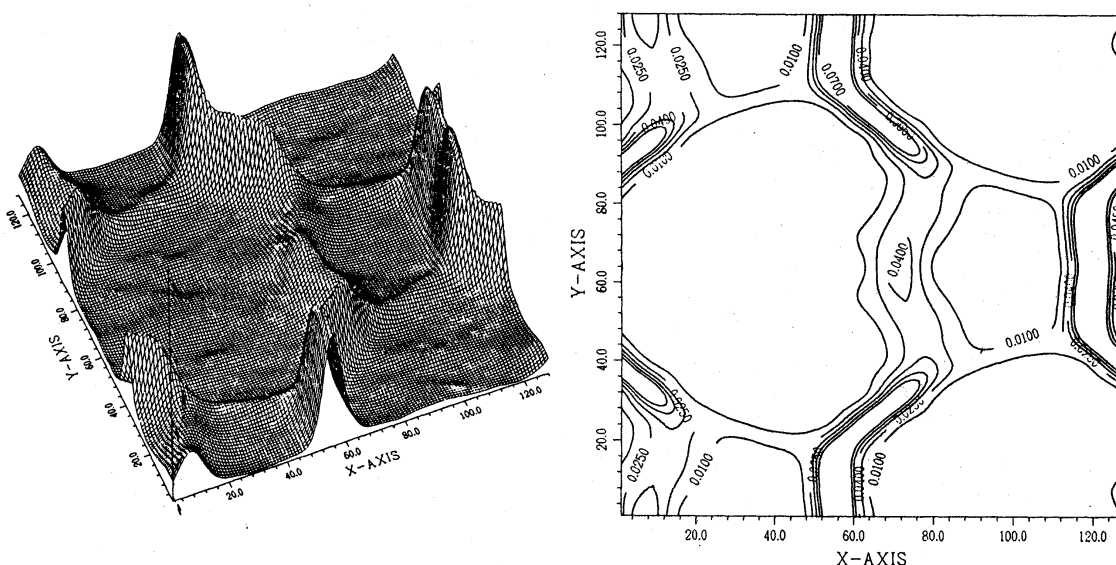


図 4: MKP 方程式の数値計算 ($\theta = 36.9^\circ$)。

$P = 1.5, Q = 2.5, \kappa = 0.25, L_X = 100, L_Y = 100 * 3, T = 100$ 。

では顕著な変化は認められなかった。

次に波の進行方向が非常に近い場合 ($\theta = 36.9^\circ$) を示す (図 4)。時間が経つにつれ、二つの波の交点の部分が徐々に変形し、新しい波ができる。 y 軸に平行な峰を持つ波が二つでき、一つは (最初に置いた波に比べて) 振幅が大きく、速く前方 (x 軸の正の方向) に進む。もう一つは振幅が比較的小さい波で、前述の波に比べ後方にある。

図に示した時点では y 方向に伸びた波は二つともすこし折れ曲がっている。振幅も交点から離れるにしたがって、前方の波は折れ曲がった部分がへこみ、後方の波は逆に大きくなっている。我々は L_Y の値を様々に変えて計算を行い、この新しくできる波の変形は、進行方向のずれが小さくなるにつれて、大きくなるということを確認した。結論として、 θ が大きいときは 2 つの波は相互作用をせず、 θ が小さいほど強い相互作用をするといえる。

これらの結果を、KP 方程式で同じ境界条件のもとに数値計算をした結果と比べてみる。違う点は、初期に KdV ソリトン

$$u_i = k_X^2 \operatorname{sech}^2(k_X X + k_Y Y - \omega_i T) \quad (i = 1, 2)$$

を重ねあわせて置くことである。方程式自体は $Q \rightarrow 0$ とすることによって MKP $\rightarrow$ KP と移れるが、(3) 式を見てわかるように、一次元の解、すなわち MKdV ソリトンから KdV ソリトンへは移行しない。そのため定量的な比較をすることはできないので、定性的な比較を試みる。

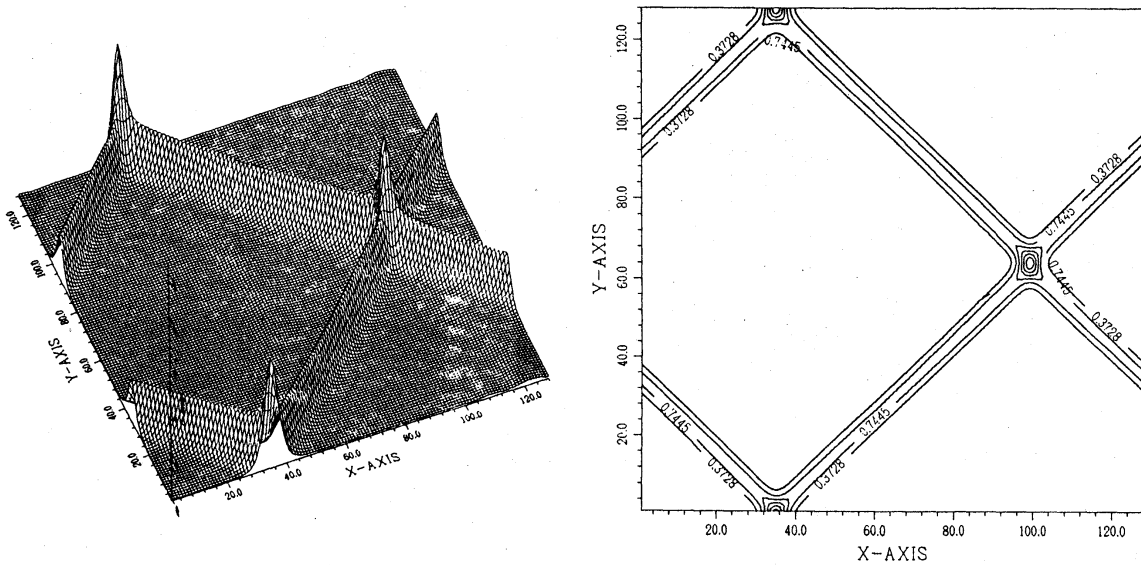


図 5: KP 方程式の計算結果 ($\theta = 143.1^\circ$)。

$$k_{X1} = k_{X2} = 1/\sqrt{2}, k_{Y1} = -k_{Y2} = 1/\sqrt{2} \cdot 3, L_X = 50, L_Y = 50/3, T = 1.2。$$

KP 方程式の具体的な形は、 $(u_T + 3uu_X + u_{XXX})_X + u_{YY} = 0$ とし、振幅などは変えずに、波が重ねあわされている角度を変えたものを示すことにする。

まず最初に波の進行方向が比較的ずれている場合である (図 5)。MKP 方程式と同様、二つの波は独立に進んで行く (ただし、位相のずれが見られる)。一方、波の進行方向が非常に近い場合には、MKP 方程式と同じ様な相互作用が見える (図 6)。すなわち、新しくできた波の個数やその方向等はだいたい同じだが、MKP 方程式に見られる様な波の変形はここではあまり見られない。特に、前方の Y 軸に平行な方向に伸びた新しい波は、変形をほとんど認められない。この波のパターンはソリトン共鳴が生じている場合であって、1 点で交差する 3 つの波をそれぞれソリトンで近似するとほぼソリトン共鳴の条件を満たしていることが確かめられる。

これらの四つの計算結果からまとめると、MKP 方程式の波の相互作用においても、 θ が小さいときには KP 方程式の場合と同様のソリトン共鳴が生じていると推測できる。しかし MKP 方程式の場合には、新しくできた波はかなり変形を受ける。

最後に、 $Q = 0.1$ とした場合の計算結果を示す (図 7)。等高線が引いてある値は、 $Q = 2.5$ の時と同じ値である。波の相互作用の起きかたは定性的には全く変わらないが、Y 軸方向に伸びる新しい波の曲がりかたが $Q = 2.5$ とくらべ小さくなっている。この結果は、3 次の非線形項に

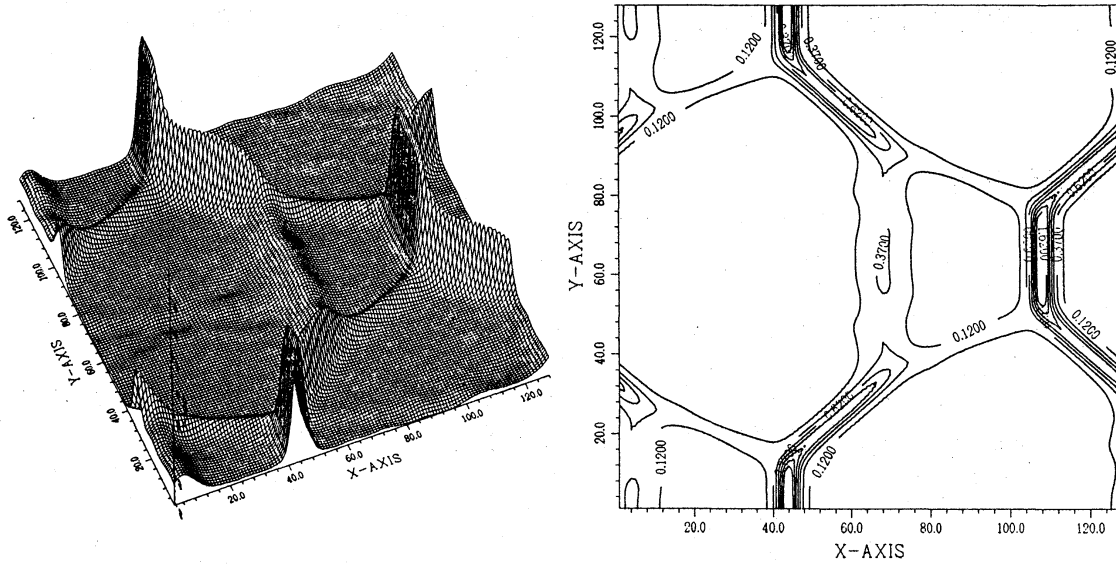


図 6: KP 方程式の計算結果 ($\theta = 90.0^\circ$)。

$k_{X1} = k_{X2} = 1/\sqrt{2}, k_{Y1} = -k_{Y2} = 1/\sqrt{2}, L_X = 50, L_Y = 50, T = 4.0$ 。

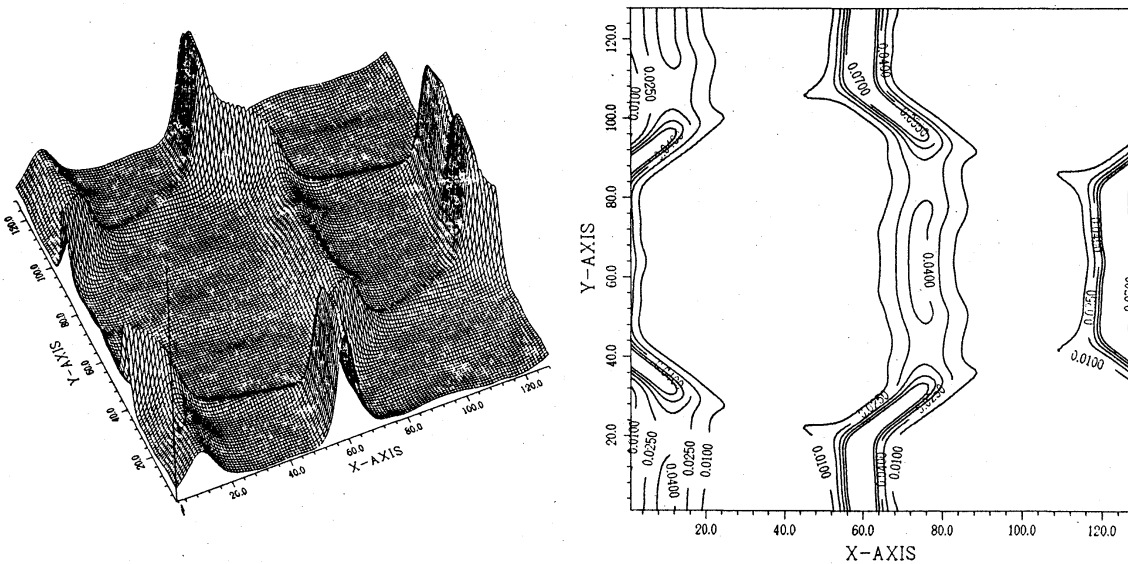


図 7: MKP 方程式の数値計算 ($\theta = 36.9^\circ$)。

$P = 1.5, Q = 0.1, \kappa = 0.25, L_X = 100, L_Y = 100 * 3, T = 100$ 。

よって変形が引き起こされるものだと考えることによって説明できる。

参考文献

- [1] T.Kakutani & N.Yamasaki: Solitary Waves on a Two-Layer Fluid, J. Phys. Soc. Jpn.,**45**(1978) 674-679.
- [2] 辻英一、及川正行：二層流体におけるソリトンの相互作用，数理解析研究所講究録 782 「流体中の非線形波動の数理的側面」(1991) 15-25.
- [3] J.Miles:Resonantly interacting solitary waves,J.fluid Mech.,**79**(1977) 171-179.
- [4] M.Funakoshi: Reflection of Obliquely Incident Solitary Waves, J.Phys.Soc.Jpn.,**49**(1980) 2371-2379.
- [5] 矢嶋信男：“乱流現象の科学”，巽 友正編（東京大学出版会,1986）第3章
- [6] J.Weiss,M.Tabor, & G.Catrnevale: The Painlevé property for partial differential equations, J.Math.Phys.,**24**(1983) 522-526.
- [7] H.Harada & S.Ohisi: A New Approach to Completely Integrable Partial Differential Equations by Means of the Singularity Analysis, J.Phys.Soc.Jpn.,**54**(1985) 51-56.
- [8] S.Wineberg,J.McGrath,E.Gabl & C.Southwell: Implicit Spectral Methods for Wave Propagation Problems, J.Comp.Phys.,**97**(1991) 311-336.