

準凸計画問題に対する劣微分を用いた最適性条件

島根大学 総合理工学部 数理科学科 鈴木 聡

Satoshi Suzuki

Department of Mathematical Sciences, Shimane University

島根大学 総合理工学部 数理科学科 黒岩 大史

Daishi Kuroiwa

Department of Mathematical Sciences, Shimane University

概要

本講究録では、準凸計画問題に対する劣微分を用いた最適性条件について述べる。特に近年筆者等によって示された、essentially quasiconvex programming に対する最適性の必要十分条件、一般の準凸計画問題に対する最適性の必要十分条件、逆準凸制約を持つ準凸計画問題に対する最適性の必要条件について述べる。

1 導入

本講究録では以下のような数理計画問題について考察する：

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x), \\ \text{subject to} & x \in A. \end{array}$$

ただし、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [-\infty, \infty]$, $A \subset \mathbb{R}^n$ とする。関数 f は目的関数、集合 A は制約集合と呼ばれる。数理計画問題は関数や制約集合の種類によって分類されており、本講究録では特に f が準凸関数、 A が準凸あるいは逆準凸制約によって表される問題について述べる。

数理計画問題においては様々な最適性条件が研究されている。中でもよく知られているのが凸計画問題に対する以下のような最適性条件である：

$$f(x_0) = \min_{x \in A} f(x) \iff 0 \in \partial f(x_0) + N_A(x_0).$$

(鈴木, 黒岩) 〒690-8504 島根県松江市西川津町 1060.

本研究は JSPS 科研費 JP16K05274 の助成を受けたものです。

ただし, $\partial f(x_0)$ は f の x_0 における劣微分, $N_A(x_0)$ は A の x_0 における法線錐である. 大域解であることの必要十分条件が劣微分を用いて示されており, Lagrange 双対性とも関連するなど凸計画問題において非常に重要な条件である. 一方で, 準凸計画問題においては上記のような必要十分な最適性条件はこれまであまり示されていなかった. その一因として, 凸関数においては局所解が常に大域解となるが, 準凸関数においてはこれが成り立たないことが挙げられる.

本講究録では, 我々が [7, 9, 10] において示した, 準凸計画問題に対する劣微分を用いた最適性条件について述べる. 凸関数のような有用な性質が成り立たない中で, どのように最適性条件を示してきたか, ということについて詳細に述べる.

2 準備

$A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, A の $x \in A$ における法線錐 (normal cone) を次で定義する:

$$N_A(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in A, \langle v, y - x \rangle \leq 0\}.$$

また, A の標示関数 (indicator function) を次で定義する:

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A, \\ \infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

本講究録を通じて関数 f は $\mathbb{R}^n$ から $[-\infty, \infty]$ への関数とする. f のエピグラフ (epigraph) を次のように定義する:

$$\text{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}.$$

このとき, f が凸関数であるとは $\text{epi} f$ が凸集合であるときをいう. f の Fenchel 共役関数 f^* を次のように定義する:

$$f^*(v) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle v, x \rangle - f(x)\}, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

また, f の $x \in \mathbb{R}^n$ における劣微分 (subdifferential) を次のように定義する:

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathbb{R}^n, f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x \rangle\}.$$

任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して関数 f のレベル集合 (level set) を次のように定義する:

$$L(f, \leq, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

このとき, f が準凸関数であるとは任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $L(f, \leq, \alpha)$ が凸集合であるときをいう. 任意の凸関数は準凸関数であるが, その逆は一般には成り立たない. f が

essentially quasiconvex であるとは, f が準凸関数でありかつ任意の局所解が大域解であるときをいう. 一般に凸関数や微分可能な擬凸関数は essentially quasiconvex である.

[2] において Greenberg, Pierskalla は次のような劣微分を定義した:

$$\partial^{GP} f(x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x \rangle \geq \langle v, x_0 \rangle \text{ implies } f(x) \geq f(x_0)\}.$$

これを f の $x_0 \in \mathbb{R}^n$ における Greenberg-Pierskalla 劣微分 (GP 劣微分) という. また, [4] において Martínez-Legaz は次の Martínez-Legaz 劣微分 (M 劣微分) を定義した:

$$\partial^M f(x_0) = \{(v, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \inf\{f(x) \mid \langle v, x \rangle \geq t\} \geq f(x_0), \langle v, x_0 \rangle \geq t\}.$$

これらは Moreau's generalized conjugation の特別な場合として知られている. 詳細は [5, 9] を参照のこと.

3 劣微分を用いた最適性条件

本章では [7, 9, 10] において示された, 準凸計画問題に対する劣微分を用いた最適性条件について述べる.

3.1 essentially quasiconvex programming に対する最適性の必要十分条件

[7] において我々は, GP 劣微分を用いて次のような essentially quasiconvex programming に対する最適性の必要十分条件を得た.

定理 1. [7] f を上半連続かつ essentially quasiconvex, A を $\mathbb{R}^n$ の凸集合, $x_0 \in A$ とする. このとき, 次の二つの条件は同値である:

- (i) $f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$,
- (ii) $0 \in \partial^{GP} f(x_0) + N_A(x_0)$.

注意 1. 上記の定理においては, 目的関数 f が essentially quasiconvex であることを仮定している. このことにより局所解が常に大域解となるため, 凸計画問題と同様の議論を用いることが出来る. また, GP 劣微分に対しては以下のような性質も成り立つ: f を実数値凸関数, x_0 は f の $\mathbb{R}^n$ における大域解でないとき,

$$\mathbb{R}_{++} \partial f(x_0) = \partial^{GP} f(x_0), \quad (1)$$

ただし $\mathbb{R}_{++} = \{t \in \mathbb{R} \mid t > 0\}$ である. よって, 定理 1 の系として凸計画問題における最適性条件を部分的にはあるが示すことが出来る.

一方で, essentially quasiconvex は準凸関数としてはかなり厳しい条件であり, 上記の最適性条件が適用できない問題も多く存在している. 実際, [8] において上記の最適性条件や GP 劣微分を用いた解集合の特徴付けが成り立たない例が示されている.

3.2 一般の準凸計画問題に対する最適性の必要十分条件

定理 1 は一般の準凸計画問題には適用できないという問題点があった. この問題点を解消するため, 我々は [9] において M 劣微分を用いた次のような最適性の必要十分条件を得た.

定理 2. [9] f を上半連続準凸関数, A を $\mathbb{R}^n$ の凸集合, $x_0 \in A$ とする. このとき, 次の二つの条件は同値である:

- (i) $f(x_0) = \min_{x \in A} f(x)$,
- (ii) $0 \in \partial^M f(x_0) + \text{epi}\delta_A^*$.

注意 2. 上記の定理においては, M 劣微分という $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合を用いた最適性条件を示している. 通常の劣微分や GP 劣微分が $\mathbb{R}^n$ の部分集合であったことと比較すると 1 次元上の集合になっている. このことに伴い, 定理 1 では $N_A(x_0)$ が使われていた部分が $\text{epi}\delta_A^*$ に置き換わっている.

この理由としては, 凸関数は $\text{epi}f$ という $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合の凸性を持っている一方で, 準凸関数は $L(f, \leq, \alpha)$ という $\mathbb{R}^n$ の部分集合の凸性しか持っていないことが挙げられる. 凸計画問題においては凸関数の持つ, より整った凸性のおかげで通常の劣微分を用いた最適性条件が示されるが, 準凸計画問題においては十分な凸性が確保されていないために M 劣微分という $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合を用いて詳細に関数の情報を捉える必要がある. また, その中間的性質を持つ essentially quasiconvex programming においては GP 劣微分という $\mathbb{R}^n$ の部分集合を用いた最適性条件を示すことが出来ていることから, 局所解が常に大域解となる, という性質はこの意味でも本質的であり, 数理計画問題において非常に重要な性質であるといえる.

3.3 逆準凸制約を持つ準凸計画問題に対する最適性の必要条件

最後に, [10] において示した GP 劣微分を用いた逆準凸制約を持つ準凸計画問題に対する最適性の必要条件について述べる.

定理 3. [10] f を上半連続かつ essentially quasiconvex, h を上半連続準凸関数, C を $\mathbb{R}^n$ の閉凸集合, $A = \{x \in C \mid h(x) \geq 0\}$ とし, $\inf_{x \in A} f(x) > \inf_{x \in C} f(x)$ かつ任意の $v \in \mathbb{R}^n$ に対して以下が成り立つと仮定する:

$$N_{C \cap \{x \mid \langle v, x \rangle \geq \langle v, x_0 \rangle\}}(x_0) = N_C(x_0) + \{-\lambda v \mid \lambda \geq 0\}.$$

このとき, $x_0 \in A$ が f の A における大域解であるならば

$$\partial^{GP} h(x_0) \subset \partial^{GP} f(x_0) + N_C(x_0).$$

注意 3. 上記の最適性の必要条件は逆凸制約を持つ凸計画問題における以下のような最適性条件と類似している:

$$\partial h(x_0) \subset \partial f(x_0) + N_C(x_0).$$

系として簡単に示されるわけではないが, 証明の手法はほぼ同様である.

また上記の条件

$$N_{C \cap \{x \mid \langle v, x \rangle \geq \langle v, x_0 \rangle\}}(x_0) = N_C(x_0) + \{-\lambda v \mid \lambda \geq 0\}$$

は strong conical hull intersection property と呼ばれる制約想定的一种である. このような制約想定は広く研究されているが, 特に C が polyhedral set である場合には上記の条件が満たされることが知られている. 詳細は [10] 等を参照のこと.

定理 3 においても目的関数 f は essentially quasiconvex であることを仮定している. 目的関数が一般の準凸関数である場合にどのような最適性条件を得ることが出来るのかについては, 詳細な研究が待たれるところである.

参考文献

- [1] M. Avriel, W. E. Diewert, S. Schaible and I. Zang, *Generalized concavity*, Math. Concepts Methods Sci. Engrg. Plenum Press, New York 1988.
- [2] H. J. Greenberg and W. P. Pierskalla, *Quasi-conjugate functions and surrogate duality*, Cah. Cent. Étud. Rech. Opér. **15** (1973), 437–448.
- [3] O. L. Mangasarian, *A simple characterization of solution sets of convex programs*, Oper. Res. Lett. **7** (1988), 21–26.
- [4] J. E. Martínez-Legaz, *Quasiconvex duality theory by generalized conjugation methods*, Optimization. **19** (1988), 603–652.

- [5] J. J. Moreau, *Inf-convolution, sous-additivité, convexité des fonctions numériques*, J. Math. Pures Appl. **49** (1970), 109–154.
- [6] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J. 1970.
- [7] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *Characterizations of the solution set for quasiconvex programming in terms of Greenberg-Pierskalla subdifferential*, J. Global Optim. **62** (2015), 431–441.
- [8] S. Suzuki and D. Kuroiwa, 準凸計画問題に対する必要十分な最適性条件について, 数理解析研究所講究録 **2011** (2016), 166–171.
- [9] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *Characterizations of the solution set for non-essentially quasiconvex programming*, Optim. Lett. **11** (2017), 1699–1712.
- [10] S. Suzuki, *Duality theorems for quasiconvex programming with a reverse quasiconvex constraint*, Taiwanese J. Math. **21** (2017), 489–503.