

Ample divisor としての Grassmann 多様体

東大教養 藤田 隆夫

まず記号を定めておく。体 K 上の n 次元ベクトル空間 V の余次元 r の部分空間達のなす Grassmann 多様体を $G_{n,r}(V)$ あるいは単に $G_{n,r}$ で表わす。 $G_{n,r}$ 上には rank n の trivial vector 束の subbundle として自然に rank $(n-r)$ の vector 束 E_{n-r}^* が定まる。対応する商バンドル $E_{n-r}^* \setminus I^\sim$ を E_r で表わす。即ちこれは完全となる： $0 \longrightarrow E_{n-r}^* \longrightarrow I^\sim \longrightarrow E_r \longrightarrow 0$ 。さて $\det E_r = H_r$ とおく。次の諸事実はよく知られている。

(0-1) H_r は very ample で、対応する embedding は Plücker 座標によるものに他ならない。

(0-2) $(n,r) = (n,1)$ 又は $(n,n-1)$ のとき、 $G_{n,r}$ は $\mathbb{P}^{n-1}$ と同型で H_r は超平面切断に対応する。また $G_{4,2}$ は $\mathbb{P}^5$ 内の 2 次超曲面として $|H_r|$ により埋め込まれている。

この ~~ように~~ $G_{n,r}$ は次元が 1 つ大きな多様体
際には

の中の ample divisor となっているわけだが、
実はこのようなことは上述の古典的な場合に
しか起こらないのである。即ち

定理. A を manifold M 上の ample divisor と
し, $A \cong G_{n,r}$ と仮定する。このとき $(n,r) =$
 $(n,1)$ or $(n,n-1)$ or $(4,2)$ である。

講演の際には n の標数を 0 と仮定したが、
Kempf [3] の結果を小平の消滅定理の代わり
に用いてこの仮定はのぞけるようである。こ
の結果を教えていただいた丸山先生はじめ諸
先生方に感謝したい。さて以下証明の大要を
記すことにする。

§1. 一般論からの準備.

補題(1-1). A は M 上の ample divisor, E は M 上
のベクトル束とし, $L = [A] \in P_{\text{ic}}(M)$ とおく。
ある $p < \dim M$ に対し, $H^p(A, E[tL]) = 0$ が任
意の $t \leq 0$ に対し成立つならば, $H^p(M, E) = 0$
となる。

証明は [4] Lemma I-B にある。

系(1-2). A, M は上同様とし, さらに

$H^i(A, -tL) = 0$ が任意の $t \geq 1$ に対し成立つとする。このとき $\text{Pic}(M) \rightarrow \text{Pic}(A)$ は単射。

証明は容易。[2] (2.5) にもある。

命題 (1-3). A, M は (1-1) 同様で, $\text{Pic}(M) \rightarrow \text{Pic}(A)$ は単射と仮定する。このとき morphism $\pi: M \rightarrow A$ での $A \subset M$ への制限が A の identity となるものは存在しない。

⊙ 単射性より $L = \pi^* L_A$ が出るが, これは L が ample なことに反する。

命題 (1-4). A, M, L は (1-1) 同様とする。 E が A 上のベクトル束で $H^2(A, \text{End}(E)[-tL]) = 0$ が任意の $t \geq 1$ に対し成立つなら, A に沿っての M の formal completion $\hat{M}$ 上のベクトル束 $\hat{E}$ で $\hat{E}_A = E$ となるものが存在する。

証明は容易。SGA 1 にもある。

命題 (1-5). $A, M, \hat{M}, L$ は (1-4) 同様とし, $\hat{E}$ を $\hat{M}$ 上のベクトル束, $\hat{E}_A = E$ とする。

$\dim A \geq 2$ でさらに $H^p(A, E[tL]) = 0$ が任意の $0 < p < \dim A$, $t \in \mathbb{Z}$ に対し成立てば, M 上のベクトル束 $\tilde{E}$ で $\tilde{E}_M = \hat{E}$ となるものが存

在する。

証明は [5] Chap. IV をまねて次のようにやる。

補題 (1-6). $\bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} H^0(\hat{M}, \hat{E}[tL])$ は $\bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} H^0(\hat{M}, tL)$
 $\cong \bigoplus_{t \geq 0} H^0(M, tL)$ module として有限生成。

補題 (1-7). $t \gg 0$ なら $\mathcal{O}_{\hat{M}}(\hat{E}[tL])$ は global sections で生成される。

上の二補題の証明には [5] を見よ。

さて (1-6) より $F \cong [a_1 L] \oplus \cdots \oplus [a_r L]$ なる型の $\hat{M}$ 上のベクトル束と $\hat{M}$ 上の Hom $\Phi: F \rightarrow \hat{E}$ で $H^0(\Phi[tL]): H^0(\hat{M}, F[tL]) \rightarrow H^0(\hat{M}, \hat{E}[tL])$ が任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対し全射となるものがとれる。(1-7) より Φ は自動的に全射となる。そこで $\text{Ker}(\Phi)$ は $\hat{M}$ 上局所自由。これに対し上同様の操作をほどこし全射 $\Psi: F_2 \cong [b_1 L] \oplus \cdots \oplus [b_g L] \rightarrow \text{Ker}(\Phi)$ を得る。記号の混用により $\Psi \in \text{Hom}_{\hat{M}}(F_2, F)$ とみなそう。すると明らかに $\hat{E} \cong \text{Coker}(\Psi)$ となっている。

さて F, F_2 は上の形より明らかに M 上のベクトル束 F, F_2 に拡張できる (実は一意的)。

$\text{Hom}_M(\tilde{F}_2, \tilde{F}) \cong \text{Hom}_M(F_2, F)$ であるから (4. [5])
 Ψ も $\tilde{\Psi}: \tilde{F}_2 \rightarrow \tilde{F}$ に拡張できる。 $E' = \text{Coker } \tilde{\Psi}$ と
 おく。ただしここでは M 上の sheaf の category
 で考えている。ともあれ $E'_M = \hat{E}$ であるから
 E' は M 上有限個の点を除けば局所自由である。
 E' の torsion part を除去して、得られる商 sheaf
 $\tilde{E}$ が $H^0(M, \tilde{E}[-tL]) = 0$ for $t \geq 0$ をみたす
 ようにできる。 $\tilde{E}$ も $\hat{E}_M = \hat{E}$ をみたす。こ
 れらんだ条件より $H^0(\hat{M}, \hat{E}[tL]) \rightarrow H^0(A, E[tL])$
 が全射であることがわかる。一方 $H^0(M, \tilde{F}[tL])$
 $\cong H^0(\hat{M}, F[tL])$ と重の定義とによって
 $H^0(M, \tilde{F}[tL]) \rightarrow H^0(\hat{M}, \hat{E}[tL])$ は全射、従
 って $H^0(M, E'[tL]) \rightarrow H^0(\hat{M}, \hat{E}[tL])$ も全射、
 $H^0(M, \tilde{E}[tL]) \rightarrow H^0(A, E[tL])$ も全射。こ
 れより $\mathcal{R}'(M, \hat{E}[(t-1)L]) \leq \mathcal{R}'(M, \hat{E}[tL])$ が任
 意の $t \in \mathbb{Z}$ に対し成立ち、 $t \rightarrow \infty$ での Serre
 の消滅定理より $\mathcal{R}'(M, \hat{E}[tL]) = 0$ が出る。同
 様に (実際はさらに容易に) $H^p(M, \tilde{E}[tL]) =$
 0 が任意の $0 < p < \dim M$, $t \in \mathbb{Z}$ に対して言
 える (くわしくは [2] (2.1) 参照)。そこで双

対性理論より $\text{Ext}_{\mathcal{O}_M}^p(\tilde{E}, \Omega_M[tL]) = 0$ for $p > 0$, $t \gg 0$. 又, L は ample なのだから,
 $\text{Ext}_{\mathcal{O}_M}^p(\tilde{E}, \omega_M) = 0$ for $p > 0$. ところが,
 M は non-singular で, ω_M は invertible だから,
 これは $\tilde{E}$ が locally free であることを imply する。
 かくて (1-5) は示された。

系 (1-8). A, M, L は (1-1) 同様, E は ~~A~~ M 上の
 ベクトル束で次の二条件をみたすとする:

$$H^2(A, \text{End}(E)[-tL]) = 0 \text{ for any } t \geq 1,$$

$$H^p(A, E[tL]) = 0 \text{ for any } 0 < p < \dim A, t \in \mathbb{Z}.$$

すると E は M 上のベクトル束に拡張できる。

命題 (1-9). A, M, L は (1-1) 同様, E は M 上の
 ベクトル束とする。 $H^0(M, tL) \rightarrow H^0(A, tL)$
 は任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対し全射, また自然な写像
 $H^0(A, E[tL]) \otimes H^0(A, L) \rightarrow H^0(A, E[(t+1)L])$
 が任意の $t \geq 0$ に対し全射, さらに $H^0(M, E)$
 $\rightarrow H^0(A, E)$ も全射と仮定する。このとき,
 $H^0(M, E[tL]) \rightarrow H^0(A, E[tL])$ および
 $H^0(M, E[tL]) \otimes H^0(M, L) \rightarrow H^0(M, E[(t+1)L])$
 は任意の $t \geq 0$ に対して全射である。

証明には下の可換図式を用いてもし、帰納法によればよい。詳細は略す。

$$\begin{array}{ccccc}
 H^0(M, E[tL]) \otimes H^0(M, L) & \rightarrow & H^0(A, E[\alpha L]) \otimes H^0(A, L) \\
 \swarrow \scriptstyle \tau \otimes \alpha & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 H^0(M, E[tL]) & \rightarrow & H^0(M, E[(t+1)L]) & \rightarrow & H^0(A, E[(t+1)L])
 \end{array}$$

ただし $\alpha \in H^0(M, L)$ は A の定義 section。

系 (1-10). A, M, L, E を (1-9) 同様とする。
このとき E は global sections で生成される。

⊙ L は ample だから $t \gg 0$ なる $E[tL]$ は global sections で生成される。一方, (1-9) の第 2 の積写像が全射なことから, ~~$E[tL]$~~ $E[(t+1)L]$ が global sections で生成される。よって $E[tL]$ もそうなる。よって上からの induction により E が global sections で生成されることがわかる。

§2. Grassmann 多様体の Geometry

先に定めた記号 $G_{n,r}(V)$, $G_{n,r}$, E_{n-r}^* , E_r , H_r 等は以下でも同様に用いる。さらに $F_{n,r_1,r_2,\dots,r_k}(V)$ で $\text{corank } V_j = r_j$ なる V の filtration $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_k \subset V$ による

す flag 多様体を表わす。 $F_{n,r_1,\dots,r_k}$ は明かに $G_{n,r_1} \times G_{n,r_2} \times \dots \times G_{n,r_k}$ の部分多様体であり、 E_{n-r}^*, E_r, H_r 等の $F_n, \dots$ への引きもどしが自然に定まるが、これらも記号の混用により同じ E_{n-r}^*, E_r, H_r などであるわす。 F_n 上にはベクトル束達の自然な filtration

$0 \subset E_{n-r_1}^* \subset E_{n-r_2}^* \subset \dots \subset E_{n-r_k}^* \subset I^n$ が定まる。 $F_{n,n-1,n-2,n-3,\dots,2,1}$ を特に F_n と記す。 F_n 上の line bundle $H_i - H_j$ を H_i^j で表わす。

命題(2-1). $T^{G_{n,r}} \cong \text{Hom}(E_{n-r}^*, E_r)$ 。よって $K^{G_{n,r}} \cong -nH_r$ 。ただし、 T^X は一般に多様体 X の tangent bundle, K^X は canonical bundle を表わすとする。

☺ 明らか。

系(2-2). $K^{F_{n,r_1,\dots,r_k}} = -\sum_{j=1}^k (r_{j-1} - r_{j+1}) H_{r_j}$ 。
ただしここで $r_0 = n$, $r_{k+1} = 0$ とおく。

☺ 容易。

命題(2-3). $L = \sum_{j=1}^{n-1} \mu_j H_j \in \text{Pic}(F_n)$ とすると、 $\Gamma(F_n, L) \neq 0$ となる ~~必要~~ 必要十分条件は各 μ_j がすべて負でないことである。

☺ H_j は $G_{n,j}$ 上 very ample だから十分性は明らか。必要性を示す。そのため自然な写像 $F_n \rightarrow F_{n,n-1,\dots,j+1,j-1,\dots,1}$ を考える。これらの各 fiber は $\mathbb{P}^1$ と同型であり、 L の交点数は μ_j となる。よって $\mu_j \geq 0$ 。

系 (2-4). $H_1, \dots, H_{n-1}$ は F_n 上の effective divisor の linear eq. class のなす semi-group の基底を与える。

☺ 明らか。

命題 (2-5). $L = \sum_{j=1}^k \mu_j H_j \in \text{Pic}(F_{n,r_1,\dots,r_k})$ とし、各係数 μ_j がすべて正とする。このとき L は $F_{n,r_1,\dots,r_k}$ 上 very ample。

☺ $F_{n,r_1,\dots,r_k} \subset G_{n,r_1} \times \dots \times G_{n,r_k}$ より明らか。

系 (2-6). 上と同じ L を F_n 上で引きもどして考えると、 $B_S(L) = \emptyset$ かつ $\chi(L) = \dim F_{n,r_1,\dots,r_k}$ 。

☺ 明らか。

定理 (2-7). $L \in \text{Pic}(F_n)$, $B_S(L) = \emptyset$ とする。このとき $H^p(F_n, -L) = 0$ unless $p = \chi(L)$ 。
証明は Kempf [3], p. 328, Th. 2 による。

お, 標数 0 の体上でなる, これは小平-Ramanujan 型消滅定理の一例に過ぎない。

系 (2-8). $H^p(G_{n,r}, tH_r) = 0$ for $0 < p < d_{G_{n,r}}$ and $t \in \mathbb{Z}$.

⊙ $t < 0$ に対しては定理 (2-7) が適用できる。
 $t \geq 0$ のときは $h^p(G_{n,r}, tH_r) = h^{(n-r)r-p}(G_{n,r}, K^{G_{n,r}} - tH_r)$ 及び $H^q(G_{n,r}, sH_r) \cong H^q(F_n, sH_r)$ を用いるばよい。

補題 (2-9). $H^p(G_{n,r}, E_{n-r}^*[tH_r]) = 0$ for $0 < p < r(n-r) = d_{G_{n,r}}$, $t \geq 0$.

⊙ 自然な写像 $F_{n,r+1,r} \rightarrow G_{n,r}$ に関する Leray の Spectral Sequence をみて, $H^p(G_{n,r}, E_{n-r}^*[tH_r]) \cong H^p(X, E_{n-r}^*[tH_r])$ を得る。ただし簡単のため $X = F_{n,r+1,r}$ とおいた。さらに $H_{r+1}^r = E_{n-r}^* / E_{n-r-1}^*$ となっており, $X \rightarrow G_{n,r}$ の様子をよく見れば $H^p(G_{n,r}, E_{n-r}^*[tH_r]) \cong H^p(X, H_{r+1}^r + tH_r) = H^p(X, H_{r+1} + (t-1)H_r)$ を得る。さて (2-2) より $K^X = -(n-r)H_{r+1} - (r+1)H_r$ 。そこで $h^p(X, H_{r+1} + (t-1)H_r) = h^{d_X-p}(X, -(n-r)H_{r+1} - (r+t)H_r)$ 。よって F_n に持ち上げてやれば

定理 (2-7) が適用できる。

命題 (2-10). $r \geq 2, n-r \geq 2$ ならば,
 $H^p(G_{n,r}, E_r[tH_r]) = 0$ for $0 < p < \dim G_{n,r}$,
 for any $t \in \mathbb{Z}$.

① t により場合をわけて考える。 $t > 1-n$ のときは $H^p(G_{n,r}, E_r[tH_r]) \cong H^p(F_{n,r,1}, H_1 + tH_r)$ 及び $K^{F_{n,r,1}} = -(n-1)H_r - rH_1$ とにより、(2-7) を $F_{n,r,1}$ に落として双対化した形の消滅定理が適用できる。 $t = 1-n$ のときは $\mathcal{L}^p(F_{n,r,1}, H_1 + tH_r) = \mathcal{L}^{\dim F_{n,r,1} - p}(F_{n,r,1}, -(r+t)H_1) = \mathcal{L}^*(F_{n,1}, -(r+t)H_1) = \mathcal{L}^*(\mathbb{P}^{n-1}, -(r+t)H)$ を得るが、 $r \leq n-2$ よりこれは 0 となる。最後に $t < 1-n$ のときは Serre duality より $\mathcal{L}^p(G_{n,r}, E_r[tH_r]) = \mathcal{L}^{\dim G - p}(G, E_r^\vee[-(n+t)H_r])$ を得る。ところが、 $G_{n,r}(V)$ と $G_{n,n-r}(V^\vee)$ が canonical に同型であることを用いて $G_{n,n-r}$ に移って考えると、 $E_r^\vee$ は E_r^* に、 H_r は H_{n-r} にうつる。そこで (2-9) が適用できる。

系 (2-11). 上と同じ r, n, p, t に対して
 $H^p(G_{n,r}, E_{n-r}^*[tH_r]) = 0$.

⊙ 同型 $G_{n,r}(V) \cong G_{n,n-r}(V^\vee)$ によって E_{n-r}^*, H_r がそれぞれ $E_{n-r}^\vee, H_{n-r}$ にうつること, 及び Serre duality によって $G_{n,n-r}$ 上での (2-10) に対応する結果にもちこむ。

注意 (2-12). (2-10) の主張は $r=1$ でも成立つ。しかし $r=n-1$ ではダメ。(2-11) の方は故に $r=n-1$ で成立つが $r=1$ ではダメ。

命題 (2-13). $n-r \geq 3$ のとき, 任意の $t > 0$ に対して $H^2(G_{n,r}, \text{End}(E_r) \otimes [-tH_r]) = 0$.

⊙ $H^2(F_n, \text{End}(E_r)[-tH_r]) = 0$ を示せばよい。 F_n 上では E_r は $E_r \twoheadrightarrow E_{r-1} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow E_1$ なるベクトル束による co-filtration を持つ。そして $\text{Ker}(E_j \rightarrow E_{j-1}) = H_j^{j-1}$ 。これを双対化し $E_1^\vee \subset E_2^\vee \subset \cdots \subset E_r^\vee$ なる $E_r^\vee$ の filtration を得, また $\text{CoKer}(E_j^\vee \hookrightarrow E_{j+1}^\vee) = H_j^{j+1} = -H_{j+1}^j$ がわかる。これらより $\text{End}(E_r) \cong E_r \otimes E_r^\vee$ には double filtration が入る。そこで問題は次の補題に帰着する。

補題 (2-14). $H^2(F_n, H_j^{j-1} - H_{j+1}^{j-1} - tH_r) = 0$
for any $t \geq 1, 1 \leq j \leq r$.

⊙ F_n でなく $F_{n,r,r-1,\dots,1}$ に基として考えよう。さて自然な写像 $\pi: F_{n,r,r-1,\dots,1} \longrightarrow F_{n,r-1,r-2,\dots,1}$ を観察する。この fiber は $\mathbb{P}^{n-r}$ と同型である。また $L = H_j^{j-1} - H_j^{j-1} - t H_r$ とおけば, L のこの fiber $\cong \mathbb{P}^{n-r}$ への制限は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-t + \delta_{j,r} - \delta_{j,r})$ となる。よって, $t=1, j=r, i < r$ の場合を除き $R^p \pi_* \mathcal{O}(L) = 0$ for $p \leq 2$ 。これより $H^2(F_n, L) = 0$ 。他方 $t=1, j=r, i < r$ の場合 $L = -H_j^{j-1} - H_{r-1}$ 。 $\therefore H^2(F, L) \cong H^2(F_{n,r-1,i,i-1}, -H_{r-1} - H_i + H_{i-1})$ 。ここで写像 $F_{n,r-1,r-2,\dots,1} \longrightarrow F_{n,r-2,\dots,1}$ を観察すれば上と同様にして $H^2(F, L) = 0$ が示せる。

q.e.d.

命題 (2-14). 積により定まる自然な写像 $H^0(G_{n,r}; E_r[tH_r]) \otimes H^0(G_{n,r}, H_r) \longrightarrow H^0(G_{n,r}, E_r[(t+1)H_r])$ は全射である。 $(t \geq 0 \text{ で})$

⊙ $H^0(G_{n,r}, E_r[tH_r]) \cong H^0(F_n, H_i + tH_r)$ 及び $H^0(G_{n,r}, H_r) \cong H^0(F_n, H_r)$ に注意すれば, これは Kempf [3], p.327, Th.1, (3) の特別な場合に他ならない。

§3. 主定理の証明.

A を manifold M 上の ample divisor とし, $A \cong G_{n,r}$ で $(n,r) \neq (n,1), (n,n-1), (4,2)$ と仮定して矛盾を導く.

$n-r \geq 3$, $r \geq 2$ と仮定してよい.

$[A] \in \text{Pic}(M)$ を L とおく. L は ample で, $\text{Pic}(A)$ は H_r で生成されるから, $L_A = aH_r$ for some $a > 0$ とおける.

(2-13), (2-10) によつて系 (1-8) が適用できることがわかる. よつて E_r は M 上のベクトル束 E に拡張できる.

(2-8) と (1-1) をあわせ $H^1(M, \mathcal{O}_M(-tL)) = 0$ が任意の $t \in \mathbb{Z}$ に対して示せる. これより $H^0(M, \mathcal{O}_M(tL)) \rightarrow H^0(A, \mathcal{O}_A(tL))$ は全射となる.

(2-10) と (1-1) より $H^1(M, E(-L)) = 0$ が出る. よつて $H^0(M, E) \rightarrow H^0(A, E)$ は全射.

(2-14) より $H^0(A, E((tL)) \otimes H^0(A, L) \rightarrow H^0(A, E((t+1)L))$ は全射である.

上記三事実より (1-9) が適用できる. よつて (1-10) より E は global sections で生成され

ることがわかる。

さて $H^0(A, E[-tL]) \cong H^0(G_{n,r}, E_r[-atH_r])$
 $\cong H^0(F_{n,r,1}, H_1 - atH_r) = 0$ for $t > 0$ が
 (2-3) から得られる。そこで (1-1) を適用すると
 $H^0(M, E[-L]) = 0$ を得る。先の $H^1(M, E[-L])$
 $= 0$ とあわせ $H^0(M, E) \cong H^0(A, E)$ となる。
 よって $\mathcal{H}^0(M, E) = \mathcal{H}^0(G_{n,r}, E_r) = \pi$ 。

さて E は global sections で生成されるのたから holomorphic map $f: M \longrightarrow G_{n,r}$ で $f^*E_r = E$ となるものがある。さらに $f^*: H^0(G_{n,r}, E_r) \longrightarrow H^0(M, E)$ は同型。そこで, f を $A \subset M$ に制限すれば同型写像を得る。

一方 (2-8) と (1-2) より $Pic(M) \longrightarrow Pic(A)$ は単射となる。

上記二つの主張は (1-3) とは両立し得ない。
 かくて矛盾が導かれた。 Q.E.D.

注. $(n, r) = (4, 2)$ のときは (2-13) の事実が成立たず, E_r が M 上のベクトル束に拡張できない。

References

- [1] T. Fujita ; An extendability criterion for vector bundles on ample divisors , to appear in Proc. Japan Acad.
- [2] T. Fujita ; On the hyperplane section principle of Lefschetz , to appear in J. Math. Soc. Japan .
- [3] G. Kempf ; Vanishing theorems for flag manifolds , Amer. J. Math. 98 (1976), 325-331.
- [4] A.J. Sommese ; On manifolds that cannot be ample divisors , Math. Ann. 221 (1976) 55 - 72 .
- [5] R. Hartshorne ; Ample Subvarieties of Algebraic Varieties , Lecture Notes in Math. 156 , Springer , 1970