

ひねった境界条件と保存則

阪大 理学部 細谷 曉夫

§1. 序

近年、場の量子論において、場の大域的なふるまひが研究されてきた。それについて以前余り問題にされていなかった色々な境界条件の可能性が議論された[1][2]

簡単な例を挙げよう。

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - g \phi^3, \quad (1+1 \text{次元}) \quad (1)$$

場を量子化するには通常系を箱 $0 \leq x \leq L$ の中に入れ、周期境界条件：

$$\phi(0) = \phi(L)$$

を課す。相互作用表示で、場は

$$\phi(x,t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2|k|}} [a_k e^{ikx} + a_k^\dagger e^{-ikx}] \quad (2)$$

$$k = 2\pi/L \times \text{整数}$$

と展開され、係数間には交換関係：

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}$$

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad (3)$$

が設定される。

ここで通常の方法に従わずに、反周期条件：

$$\Phi(0) = -\Phi(L) \quad (4)$$

を採用したらどうなるかを考えてみよう。すぐにわかるように、(2)式における波数 k は今度の場合

$$k = 2\pi/L \times (\text{整数} + 1/2)$$

が許される値になる。相互作用 $g\Phi^3$ の部分 a と a^+ で書いてみると、

$$g \sum_{lmn} a_l a_m a_n^+ \int_0^L dx \exp[2\pi i/L \cdot x \{ (l+1/2) + (m+1/2) - (n+1/2) \}] + \dots \quad (5)$$

の形をしている。中括弧の中に $1/2$ が余計に入っているために運動量保存則： $n = l + m$ は明らかに破れている。

以下では、(4)のような“ひねった境界条件”のもとで保存則がどうなるかを一般的に考察する。(3)

§2. ネイ - 荷電の保存

次の Lagrangian を考える。

$$L = \frac{1}{2} \sum_a (\partial_\mu \phi^a)^2 - V(\phi^1 \dots \phi^N) \quad (6)$$

空間次元 $\in D$ とする。

L が変換：

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \quad (|\partial x'/\partial x| = 1)$$

$$\phi^a(x) = \phi^a(x) + \delta \phi^a(x) \quad (7)$$

に対して不変である時:

$$j^\mu(x) = L(\phi, \partial\phi) \delta x^\mu + \frac{\partial L(\phi, \partial\phi)}{\partial \partial_\mu \phi^a} \delta \phi^a \quad (8)$$

が連続の式:

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (9)$$

が満足すること (ネーターの定理) はよく知られている。

さてここで、 ϕ^a に対して次のような " 付けられた境界条件 " を課することにしよう。即ち、

$$\begin{aligned} \Phi^a(x_1 \cdots x_{n-1}, L_n, x_{n+1}, \cdots) &= R_{(n), b}^a \Phi^b(x_1 \cdots x_{n-1}, 0, x_{n+1}, \cdots) \\ \text{s.t. } R_{(n), b}^a R_{(n), c}^b &= \delta_{bc} \quad (1 \leq n \leq D) \end{aligned} \quad (10)$$

R は単に定数要素をもつマトリクスである。これから先、問題にするのは、ネーター荷電:

$$Q = \int d^D x \, j^0(x) \quad (11)$$

が保存するかどうかである。空間としては D 次元トーラスを

考えているのである。

$$\dot{Q} = \int d^D x \, j^0(x) = \sum_{n=1}^D \int dS^n \, j_n \quad (12)$$

従って、 $Q \propto$ 保存は、

$$[j_n]_0^{L_n} = 0 \quad (1 \leq n \leq D) \quad (13)$$

と等価である。(13) 式を (6)(8) を用いて具体的に書けば、

$$[L(\phi, \partial\phi) \delta x^n + \partial_n \phi^a \delta \phi^a]_0^{L_n} = 0 \quad (14)$$

となる。

場合 $\in 2$ について考える。

1°) 空間に束縛せず内部対称性に関する保存則の場合.

$\delta x = 0$ だから (14) 式は (10) 式に代入して.

$$\partial^\mu (R^a_b \phi^b) \delta (R^a_c \phi^c) = \partial^\mu \phi^a \delta \phi^a \quad (15)$$

と書ける. (3) 数は $x_n = 0$. (10) 式に考慮に入れれば.

(15) 式, 即ちネーター荷電の保存の必要十分条件は.

$$\delta (R^a_c \phi^c) = R^a_c \delta \phi^c \quad (16)$$

である. 言い換えると, ひねりのオペレータ R と, 対称変換 δ が可換ならば, 対応するネーター荷電は保存する.

2°) 運動量の保存則を考慮している場合.

$\delta x = \text{const.}$ だから (16) の条件の他に.

$$L(R\phi) = L(\phi) \quad (17)$$

が要求される.

最後に, (16) が成立しない例を挙げておくと, 以上においた事の言わんとしている点かは, 明らさるだろう.

例

$$L = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^a)^2 - V((\phi^a)^2) \quad (a=1,2) \quad (18)$$

は $O(2)$ 対称性をもっている.

$$j^\mu = \epsilon^{ab} \partial_\mu \phi^a \phi^b \quad (19)$$

は連続の式を満足する.

“ひねった境界条件”として

$$\begin{pmatrix} \phi^1(L) \\ \phi^2(L) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \phi^1(0) \\ \phi^2(0) \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

を採用しよう。明かかに、 $[g, R] \neq 0$, $g \in O(2)$

だから、

$$Q = \epsilon^{ab} \int_0^L \partial_0 \phi^a \phi^b dx \quad (21)$$

は保存しない。すぐ見てわかるように、この例はトポロジックな
—はウインのつぼになっていて、これが“ひねった境界条件”の
名前由来になっている。

参考文献

[1] C. J. Isham, Proc. R. Soc. Lond. A 363
581 ('79).

[2] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B153 141 ('79).

[3] A. Hosoya, "Twisted Boundary Conditions
and Conservation Law" Osaka
University Preprint OU-HET 33
November ('79).