

無限大に台をもつ超函数

上智大 理工 森本 光生

吉野 邦生

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{D} = [-\infty, +\infty]$ とする. $\mathcal{R}$ で, $\mathbb{D}$ 上のフーリエ超函数の層を表わす. このとき,

(i) $\Gamma(\mathbb{R}, \mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ 上の超函数の空間,

(ii) $\mathcal{R}$ は, $\mathbb{D}$ 上の軟弱層 (flabby)

が知られている. 故に, 次の定理が成立する.

定理 1 制限写像

$$\rho: \mathcal{R}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

は, 全射である.

我々の問題は, (i) ρ の核の要素, すなわち, $\pm\infty$ へのみ台をもつフーリエ超函数を具体的に構成すること, (ii), $\mathbb{R}$ 上の超函数 e^x の, ρ による原像を具体的に構成することの二つである. この報告では, 指数函数の合成を何回か積分することにより, このようなフーリエ超函数が求まることを示したい.

§1. 定義 (文脈 [5])

$\Omega \subset \mathbb{D} + i\mathbb{R}$ を, 開集合として,

$$(1) \quad \tilde{\mathcal{O}}(\Omega) := \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega \cap \mathbb{C}) ; \forall \varepsilon > 0, \forall K \subset\subset \Omega, \sup \{ |f(z)| e^{-\varepsilon|z|} ; z \in K \cap \mathbb{C} \} < \infty \right\}$$

とおく. $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$ は, FS 空間の構造をもつ.

$\omega \subset \mathbb{D}$ を, 開集合として,

$$(2) \quad \mathcal{R}(\omega) := \tilde{\mathcal{O}}(\Omega \setminus \omega) / \tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$$

とする. ここで, Ω は ω の複素近傍である. (2) の右辺は, Ω に依存しないことが知られている. $\mathcal{R}(\mathbb{D})$ は, FS 空間の構造をもつ.

$\mathcal{R}(\mathbb{D})$ は, 双対性によって与えることもできる. いま, $\Omega \subset \mathbb{D} + i\mathbb{R}$ を開集合として,

$$(3) \quad \mathcal{O}(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\Omega \cap \mathbb{C}) ; \forall K \subset\subset \Omega, \exists \varepsilon > 0, \sup \{ |f(z)| e^{\varepsilon|z|} ; z \in K \cap \mathbb{C} \} < \infty \right\}$$

とおく. $\mathcal{O}(\Omega)$ は, DFS 空間の位相をもつ.

$$(4) \quad \mathcal{O}(\mathbb{D}) = \lim \text{ind} \{ \mathcal{O}(\Omega) ; \Omega \supset \mathbb{D} \}$$

とおけば, $\mathcal{O}(\mathbb{D})$ はまた DFS 空間である. このとき,

定理 2 線形位相空間としての同型

$$(5) \quad \mathcal{R}(\mathbb{D}) \cong \mathcal{O}(\mathbb{D})' \quad \text{共に, FS 空間が成立する.}$$

§2. パラモドフの結果 (文献 [4])

定理1に関して, パラモドフは興味深い定理を証明したので, 紹介しておく.

$$(6) \quad \Pi = \{z = x + iy : |y| < 1\}$$

とおく. φ を $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数で,

$$(7) \quad |t-s| \leq 1 \text{ のとき, } |\log \varphi(t) - \log \varphi(s)| \leq C$$

(C は, ある定数) なる条件をみたすものとする.

$$(8) \quad \mathcal{O}_\varphi(\mathbb{R} + iU) = \left\{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{R} + iU); \forall \lambda > 0, \right. \\ \left. \forall K \subset \subset U, \right. \\ \left. \int_{\mathbb{R} + iK} |f(z)|^2 e^{\lambda \varphi(x)} dx dy < \infty \right\}$$

とおき,

$$(9) \quad \mathcal{B}_\varphi = \mathcal{O}_\varphi(\mathbb{R} + i(\Pi \setminus \{0\})) / \mathcal{O}_\varphi(\mathbb{R} + i\Pi)$$

と定義する. 自然に写像

$$(10) \quad \rho_\varphi : \mathcal{B}_\varphi \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

が定義される.

定理3. ρ_φ が全射となるための必要十分条件は,

$$(11) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-(\pi+\varepsilon)|t|} dt < \infty, \quad \forall \varepsilon > 0$$

である.

§3. $\{+\infty\}$ のみに台をもつフーリエ超函数 (文献[2])

$H_{M,\pi} = \{ \zeta = \xi + i\eta; \xi \geq M, |2\xi\eta| \leq \pi \}$
 として, $\mathbb{R}$ の汎函数 T と考える.

$$(12) \quad T: \psi \longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial H_{M,\pi}} \psi(\zeta) \exp(\exp \zeta^2) d\zeta.$$

いま,

$|\exp(\exp \zeta^2)| = \exp(\exp(\xi^2 - \eta^2) \cos 2\xi\eta)$
 に注意する. $\psi \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ に対しては, 十分大きな $M > 0$
 をとれば, (12)の右辺は $M \gg 0$ に依ることなく定義される.
 故に, $T \in \mathcal{O}(\mathbb{D})'$ であることが, 示せる. $\mathcal{O}(\mathbb{D})' =$
 $\mathcal{R}(\mathbb{D})$ (定理2) から, T は $\mathbb{D}$ 上のフーリエ超函数である.
 また, (12)の形より, すべての $a > 0$ に対し,

$$\text{supp } T \subset [a, +\infty]$$

がわかる. 一方, $t > 0$ のとき,

$$(13) \quad \langle T, \zeta e^{-t\zeta^2} \rangle = -\frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(1+t)} \neq 0$$

であるので, T は, 恒等的に0でない. 故に, T は,
 $\{+\infty\}$ のみに台をもつフーリエ超函数である.

この汎函数 T の $\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D} + i(\mathbb{R} \setminus \{0\}))$ に属する定義函数 F
 は, 次の式で与えられる ([1]).

$$(14) \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial H_{M,\pi}} \frac{\exp(-(z-w)^2)}{z-w} \exp(e^w) dw$$

この函数 F については、次が示せる。

$$A_\varepsilon = [a - \varepsilon, \infty) + i(-\varepsilon, \varepsilon)$$

とおく。

命題 1. (i) F は整函数である。

(ii) $\forall R > 0, \forall a > 0, \forall \varepsilon > 0, 0 < \forall r < 1, \exists C \geq 0,$

(15) $|F(z)| \leq C \exp(-rx^2), z \notin A_\varepsilon, |y| \leq R.$

(iii) この整函数は、 A_ε 上で、次の形の評価をもたない。

(16) $|F(z)| \leq C \exp(B \exp(\alpha |x|)), \exists B > 0, \exists \alpha > 0, \exists C \geq 0.$

(i), (ii) は、 $F(z)$ の定義式 (14) より容易に示せる。もし、(iii) でいう不等式が A_ε 上で成立すれば、フラグメン・リンデレフの定理より、 $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D} + i\mathbb{R})$ となり、 $T = [F] = 0$ ($T \neq 0$ に矛盾) を得る。

T のフーリエ・ポレル変換 $\tilde{T}$ は、次式で与えられる：

$$(17) \quad \tilde{T}(\zeta) = \int_{\partial A_\varepsilon} e^{\zeta z} F(z) dz$$

$\tilde{T}(\zeta)$ はゼロでない整函数で、次の指数型評価をもつ。

$$(18) \quad |\tilde{T}(\zeta)| \leq C \exp((-a + \varepsilon) \operatorname{Re} \zeta + \varepsilon |\operatorname{Im} \zeta|)$$

$$(\forall a > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists C \geq 0)$$

証明は、[1] の一般論による。

§4. e^x の $[-\infty, +\infty]$ への拡張 (文献 [3])

$\tilde{T}$ を, §3 で構成した $\{+\infty\}$ のみに台をもつフーリエ超函数 T のフーリエ・ポレル変換とする. λ を $\tilde{T}(-\lambda) \neq 0$ なる数とし, 固定する. ($\lambda \neq 0$)

$$(19) \quad F_\lambda(z) = F\left(\frac{z}{\lambda}\right) / (\lambda \tilde{T}(-\lambda))$$

とおく.

命題2 $\forall R > 0, \forall a > 0, \forall \varepsilon > 0, 0 < \forall r < \lambda^{-2}, \exists C \geq 0,$

$$(20) \quad |F_\lambda(z)| \leq C \exp(-rx^2), \quad z \notin A_\varepsilon, |y| \leq R.$$

いま, 次の微分方程式

$$(21) \quad f'(z) - f(z) = F_\lambda(z)$$

を, $\mathbb{C}^\pm = \{z = x + iy; \pm y > 0\}$ で考える. $\mathbb{C}^\pm$ で
の解は,

$$f_+(z) = e^z \int_{+\infty + iy}^{x + iy} e^{-w} F_\lambda(w) dw, \quad y > 0$$

$$f_-(z) = e^z \int_{+\infty + iy}^{x + iy} e^{-w} F_\lambda(w) dw, \quad y < 0$$

で与えられる. ここで, 積分路は, x 軸に平行である.

命題2 の評価より次の命題の評価 (ii) が得られる.

命題3 (i) f_+, f_- はそれぞれ整函数に解析接続できる.

$$\begin{aligned}
& \text{(ii)} \quad \forall R > 0, \forall \varepsilon > 0, 0 < \forall r < \lambda^{-2}, C \geq 0 \\
& \begin{cases} |f_+(z)| \leq C e^{-r x^2}, & \varepsilon \leq y \leq R, \quad x \geq 0 \\ |f_+(z)| \leq C e^{-|x|}, & \varepsilon \leq y \leq R, \quad x < 0 \\ |f_-(z)| \leq C e^{-r x^2}, & -\varepsilon \geq -y \geq -R, \quad x \geq 0 \\ |f_-(z)| \leq C e^{-|x|}, & -\varepsilon \geq -y \geq -R, \quad x < 0 \end{cases} \\
& \text{(iii)} \quad f_+(z) - f_-(z) = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

命題3 (iii) の証明は、コーシーの積分表示式と F_λ の定義式 (19) による。

さて,

$$f_0(z) = \begin{cases} f_+(z) & y > 0 \\ f_-(z) & y < 0 \end{cases}$$

とおけば, $f_0 \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D} + i(\mathbb{R} \setminus 0))$ であり, f_0 は $\mathbb{D}$ 上の Γ -リミット超函数 $E_\lambda = [f_0]$ を定める。命題3 (iii) より, E_λ は e^z の $[-\infty, +\infty] \times \mathbb{R}$ への拡張であることがわかる。

文 献

- [1] Morimoto, M.: Analytic functionals with non compact carrier. Tokyo J. Math., 1, 77-103 (1978)
- [2] Morimoto, M., and Yoshino, K.: Some examples of analytic functionals with carrier at the infinity.

Proc. Japan Acad., 56A, 357-361 (1980)

[3] Morimoto, M.: An extension of e^x to $[-\infty, \infty]$.

Proc. Japan Acad., 56A, 450-454 (1980)

[4] Паламодов, В.П.: От гиперфункций к

Аналитическим функционалам. Доклады Академии Наук СССР

235, 534-537 (1977)

[5] 佐藤幹夫: 超函数の理論, 数学10, 1-27 (1958).