

THREE APPLICATIONS OF STATIONARY SETS IN TOPOLOGY

静岡大教育 大田 春 外

(Haruto OHTA)

Stationary 集合の位相空間論への応用については、
 Fleissner による Survey [9] があるが、ここでは、別に、
 次の3つの応用例について述べる。

1. 積空間が正規でない、小さな正規空間を作る。
2. $\dim kX > \dim X$ である正規空間 X を作る。
3. 整数値連続関数の群 $C(X, \mathbb{Z})$ が反射的でない
 $\mathbb{Z}$ -双対群であるような可分空間 X を作る。

以下、順序数の集合 A は、順序数 $\sup A$ 上の順序位相に
 関する相対位相をもつものとする。

1. 積空間の正規性. 一般に2つの正規空間の積空間
 は正規であるとは限らない。どんな場合に正規であるかとい
 う問題は、現在も位相空間論に豊富な話題を提供し続けたい

る (Przymusiński の Survey [14] 及び Atsugi [1], Hoshina [10] を見よ)。ここでは「種が正規でない 2 つの "小さな" 正規空間を見つける」ことを試みる。「小さな」の意味を「濃度 $\aleph_1$ の」と考えると、種 $(\omega_1 + 1) \times \omega_1$ がそのよりよい例を与える。しかし「 $\aleph_1$ 可算公理を満たす」という条件を付け加えると、多分、Todorćević [17] の例が知られている唯一のものである。これは Aronszajn Tree T に path-Topology という位相を与えて得られる空間の部分空間 X, Y で、共に濃度 $\aleph_1$ の $\aleph_1$ 可算 Lindelöf 空間であるが、種 $X \times Y$ は正規でない (一般に、順序数や Tree から作られる空間は paracompact ではないとすることから、強い covering property を期待する人達には無視される傾向がある。その長、path-Topology はとても面白いし、役に立つと思う)。さて、この部分空間 X, Y は Aronszajn Tree T の中で、それぞれ、高さが ω_1 の互いに素な stationary 集合 A, B に属する部分として選ばれる。しかし、実は、この stationary 集合 A, B 自身、種 $A \times B$ が正規でないという性質を持つている。即ち、次の結果が得られる。

定理 ([11]). $A, B \subseteq \omega_1$ について、次の条件 (a) - (f) は同値である。

- (a) $A \times B$ は shrinking properly を持つ。
- (b) $A \times B$ は 族正規である。
- (c) $A \times B$ は 正規である。
- (d) $A \times B$ は expandable である。
- (e) $A \times B$ は 可算 paracompact である。
- (f) A 又は B が stationary であるならば、又は $A \cap B$ が stationary である。

証明は [11] を見よ。従って ω_1 の互いに素な stationary 集合 A, B をとると、 A, B は勿論、濃度 $\aleph_1$ の可算正規空間であるが、積 $A \times B$ は 正規でない。(これは、この種の最も簡単な例だと思う。そして、少なくとも Todorcevic のような人には知られていると思うが、文献の中には見つからない。) 定理に関連する問題を挙げる。

問題 1. 定理の条件 (a)–(e) は、“ $A \times B$ ” を ω_1^2 の任意の部分空間に変えても同値か？

問題 2. 任意の $A, B \subseteq \omega_1$ に対し、 $A \times B$ は 可算 metacompact か？

問題 3. ω_1 の任意の stationary 集合 A の積が 正規である空間は どのような空間か？ (可算 paracompact 空間は、その様な空間の 1 つである、[13] を見よ。)

最後に "小さな" 正規空間に関する問題を 1 つ挙げよう。
 2 つの可算空間の積は つねに 正規だから, 考え得る 最小濃度
 の組み合わせは, $|X| = \aleph_0$, $|Y| = \aleph_1$ の場合である。ここで,
 X を 収束列 (即ち, $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$) とすると,
 $X \times Y$ が 正規 であるとき, Y は Dowker 空間と呼ばれる
 (Rudin [15] を参照せよ)。ところが, ZFC に於いて,
 "小さな" Dowker 空間が存在するかどうかは 知られていない。
 (◇ を 仮定すれば 存在する, P. de Caux [2] に よる。しかも,
 彼の例は 可算公理を満たす)。しかし, X が 収束列
 以外の場合には どうか。

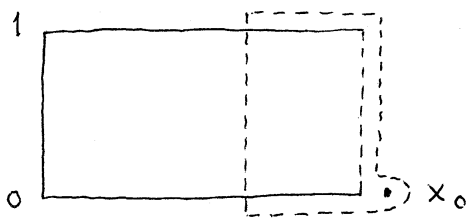
問題 4. 可算空間 X と 正規空間 Y に対し, $X \times Y$ が
 正規 であるならば, Y は Dowker 空間 であるか?

なお, 正規空間 Y が Dowker 空間 であることは, Y が
 可算 paracompact であることと同値である。

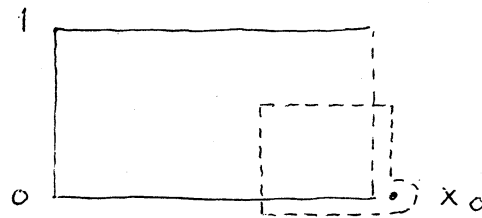
2. k -空間化の被覆次元. 位相空間 X の k -空間化
 (= いわゆる k -leader, [8] を 見よ) kX に関する Koyama
 [12] の 問題 「 X と kX が 正規で, $\dim X \neq \dim kX$ である
 空間 X は 存在するか」について 考える (彼は refinable 写
 像の下での次元の保存について 研究した。ここで, 恒等写像
 $kX \rightarrow X$ は refinable である)。この問題に 答えて, van

Donwen [3] と Tamano [16] は, 又々, $\dim kX = 0 < \dim X$ なる正規空間 X を作った。そこで, ω_1 の stationary ω -stationary 集合を利用して, 逆の不等号, $\dim kX > 0 = \dim X$ を満たす Lindelöf 空間 X の存在を示す。

半開区間 $(0, 1]$ を互いに素な dense 集合の族 $\{D_\alpha\}_{\alpha \in \omega_1}$ に分割する。そこで, ω_1 の stationary ω -stationary 集合 E 上 index を付け直して, $\{D_\alpha\}_{\alpha \in E}$ と書く。積空間 $\omega_1 \times [0, 1]$ の部分空間 $D = (\omega_1 \times \{0\}) \cup (\bigcup_{\alpha \in E} (([\alpha, \omega_1) \cap E) \times D_\alpha))$ 上の相対位相を $\mathcal{T}_D$ とする。そこで, $X = D \cup \{x_0\}$ とおき, X に, $\mathcal{T}_D \cup \{((\beta, \omega_1) \times [0, 1]) \cap D \cup \{x_0\} : \beta < \omega_1\}$ を基底とする位相 $\mathcal{T}$ を与える。このとき, $X = (X, \mathcal{T})$ が求める空間である。実際, x_0 の近傍の補集合は可分距離空間 τ ので, X は Lindelöf で, 容易に分るより, $\dim X = 0$ 。次に, $\mathcal{T} \cup \{((\omega_1 \times [0, \tau]) \cap D) \cup \{x_0\} : 0 < \tau \leq 1\}$ から生成される位相を $\mathcal{T}_k$ とすると, $kX = (X, \mathcal{T}_k)$ である。



a nbd of x_0 in X



a nbd of x_0 in kX

そこで, kX は正規で, x_0 の kX に於ける近傍は, $\mathcal{T}_D$ の

(見2行) 区間 $[0, 1]$ を横切るので, $\dim \mathbb{R}X = \text{ind } \mathbb{R}X = 1$.
 もし, 区間 $[0, 1]$ の代りに, $\text{cube } [0, 1]^n$ を使えば, 自然
 に, $\dim \mathbb{R}X = n > 0 = \dim X$ であるように出来る。

最初に述べた van Douwen の例も基本的には同じ idea
 を使っている。紹介される機会がほしいと思うので, ここで述
 べる:

例 (van Douwen [3]). C^{++} に順序位相を与えて,
 その部分空間 $S = \{ \xi \in C^{++} : \xi \text{ は isolated 又は } \text{cof}(\xi) = C^+ \}$
 を考える。一方 $K = [0, 1]^n$ とし, 積 $S \times K$ の部分空間 X
 を条件

$$(1) \quad \forall \xi \in S \quad [|X \cap (\{\xi\} \times K)| = 1],$$

$$(2) \quad \forall y \in K \quad [\{ \xi \in S : \langle \xi, y \rangle \in X \} \text{ is stationary }]$$

を満たすもの X とする。このとき, X は正則空間で $\dim X = n$.
 とはなるが, X の compact 集合の濃度は有限なので, $\mathbb{R}X$ は
 離散空間である, 即ち, $\dim \mathbb{R}X = 0$. $\square$

van Douwen の空間 X は, $\text{ind } X = 0$ であることに注意せ
 る。Tamano [16] による空間 X は, 全く異なる idea による。
 そして, X は Lindelöf 空間であって, $\text{ind } X > 0$, $\dim X > 0$ であ
 る。しかし, その次元は, 正に正確に計算されてはいない。

そこで Tamano に関する問題が残っている。

問題 5 ([16]). $n = 2, 3, \dots, \infty$ に対し, $\dim X = n$, $\dim \mathbb{R}X = 0$ である Lindelöf 空間 X は存在するか?
(何故, $n = 1$ の場合は筆者には分らない。)

3. 整数値連続関数の $\mathcal{P}$ -ベリ群. ω_1 の stationary co-stationary 集合 E をとり, $\omega_1 + 1$ の部分空間 $X = E \cup \{\omega_1\}$ を考える。[4] で証明したように, X 上の整数値連続関数全体が作る群 $A = C(X, \mathbb{Z})$ は, 反身的な $\mathbb{Z}$ -双対群である。いま, A の二通りの性質を保つまま, X を可分空間に作り直すことが出来ることを示す。これは, A が $\mathbb{Z}^\omega$ の部分群と同型であることを意味し, [7] の由に肯定的に答える。

N の部分集合族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \omega_1}$ を「 $\alpha < \beta \Rightarrow U_\alpha \setminus U_\beta$ は有限かつ $U_\beta \setminus U_\alpha$ は無限」を満たすものとする。 $Y = X \cup N$ とし, Y に次のように位相を与える。

ω_1 の基本近傍は, $\{\omega_1\} \cup \{\lambda \in E; \lambda > \alpha\} \cup (N \setminus (U_\alpha \cup F))$,
但し, $\alpha < \omega_1$ かつ F はすべての U_α との共通部分が有限であるような N の部分集合である。

$\beta \in E$ の基本近傍は, $\{\lambda \in E; \alpha < \lambda \leq \beta\} \cup (U_\beta \setminus (U_\alpha \cup F))$,
但し, $\alpha < \beta$ かつ F は N の有限集合。

N の各点 γ は孤立点。

このとき, N は Y で dense である, Y は可分空間。更に, E は stationary かつ ω -stationary であることから,

$$\beta_N(E \cup N) = Y \quad \text{かつ} \quad k_N Y = (E \cup N) \oplus \{\omega_i\}$$

であることが分る。これから [4] の議論を適用すれば, $A = C(Y, \mathbb{Z})$ は反射的である $\mathbb{Z}$ -双対群であることが確かめられる。この場合, $A^{**} \cong A$ であるが, $A^{**} \neq A$ である様に, Y を作りかえることも可能である, [6] を参照せよ。最後に, 自然な場合を除いて, $C(X, \mathbb{Z}) \neq C(Y, \mathbb{Z})$ である空間 X, Y はあまり知られていない (最近, 加茂氏によつて, 有理数の空間 $\mathbb{Q}$ と無理数の空間 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対し, $C(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \neq C(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ であることが証明された [6])。そこで, 次の問題が起る。

問題 6. 互いに素な ω_i の stationary 集合 A, B に対し, $C(A, \mathbb{Z}) \cong C(B, \mathbb{Z})$ か?

なお, $A \cap B$ が stationary であるとき, stationary 集合 A と B は位相同型である (これは, §1 の定理によつて, A^2 は正規であるが, $A \times B$ が正規であることから分る)。整数値連続関数のアーベル群については [4] - [7] を参照されたい。

References

1. M. Atsuji, Normality of product spaces I, in: Topics in General Topology, North Holland (1989), 81-119.
2. P. de Caux, A collectionwise normal, weakly θ -refinable Dowker space which is neither irreducible nor realcompact, Topology Proc. 1 (1976), 66-77.
3. E. K. van Douwen, 小山晃氏への手紙 Sep. 13, 1984.
4. K. Eda and H. Ohta, On abelian groups of integer-valued continuous functions, their Z-duals and Z-reflexivity, in: Abelian Group Theory, Gordon and Breach (1986), 241-257.
5. K. Eda, T. Kiyosawa and H. Ohta, N-compactness and its applications, in: Topics in General Topology, North Holland (1989), 459-521.
6. K. Eda, S. Kamo and H. Ohta, Abelian groups of continuous functions and their duals, to appear.
7. P. C. Eklof and A. H. Mekler, Almost Free Modules, Set-theoretic Methods, North Holland (1990).
8. R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag (1989).
9. W. G. Fleissner, Applications of stationary sets in topology, in: Surveys in General Topology, Academic Press (1980), 163-193.
10. T. Hoshina, Normality of product spaces II, in: Topics in General Topology, North Holland (1989), 121-160.
11. N. Kemoto, H. Ohta and K. Tamano, Products of spaces of ordinal numbers, to appear in Topology Appl.
12. A. Koyama, Refinable maps in dimension theory, Topology Appl. 17 (1984), 247-255.
13. H. Ohta, Products of stationary sets, 教理解析研 講究録 732 (1990), 39-43.
14. T. C. Przymusiński, Products of normal spaces, in: Handbook of Set-theoretic Topology, North Holland (1984), 781-826.
15. M. E. Rudin, Dowker spaces, in: Handbook of Set-theoretic Topology, North Holland (1984), 761-780.
16. K. Tamano, Dimension of k -leaders, Tsukuba J. Math. (1985), 233-236.
17. S. Todorćević, On the Lindelöf property of Aronszajn trees, in: Proc. Sixth Prague Topology Symposium, Heldermann Verlag (1986), 577-588.