

フォン・カルマンの方程式に在りする

混合型の有限要素法への応用について

熊本大(理) 三好 哲 彦

1. 序

板やシェルの大変形の解析には一般に4階の非線形偏微分方程式を解く必要が生じる。このために変位法の使用には試験関数の構成などをめぐり多くの問題がある。

ここでは、板の非線形曲げに関連して、いわゆるフォン・カルマン方程式を取り上げて、これを在りしめる種の混合法が適用可能であるということを示す。

2. v. K. 方程式とその弱形

フォン・カルマン (v. K.) の方程式は $[f, w] = f_{,11} w_{,22} + f_{,22} w_{,11} - 2f_{,12} w_{,12}$ とすると次の型に表わせる。

$$(2.1) \quad \Delta^2 f = -[w, w]$$

$$(2.2) \quad \Delta^2 w = [f, w] + p$$

我々はこの方程式に境界条件 $f = \frac{df}{dn} = w = \frac{dw}{dn} = 0$ のもとで

解 $\leq$ とを考える. 次の記号を用いる.

Ω ; 板の点の領域 (変型前の)

$\overline{W}_p^k(\Omega)$; Sobolev 空間. k ; positive integer, $p > 1$

$\overset{\circ}{W}_2^k(\Omega)$; Ω に support を持ち, C^∞ -関数に次のノルムで完備化したもの.

$$|u|_k^2 = \sum_{|\alpha|=k} \int |D^\alpha u|^2 dx_1 dx_2$$

$L_2(\Omega)$; 直積空間 $\overset{\circ}{W}_2^1 \times L_2 \times L_2 \times L_2$, ノルムは普通のもの.

$H(\Omega)$; 直積空間 $\overset{\circ}{W}_2^1 \times \overset{\circ}{W}_2^1 \times \overset{\circ}{W}_2^1 \times \overset{\circ}{W}_2^1$, ノルムは普通のもの, i.e.,

$$H \ni w \quad \|w\|_H^2 = |w|_2^2 + \sum_{i,j} \|\overline{w}_{ij}\|_2^2 \quad (w = (w, w_{11}, w_{12}, w_{22}))$$

次に, $H \times H$ 上に定義された双一次形式を定義する.

$$\mathcal{L}(w, \overline{w}) = \sum_{i,j} \{ (D_i w, D_i \overline{w}_{ij})_{L_2} + (\overline{w}_{ij}, \overline{w}_{ij})_{L_2} \} + \sum_{i,j} (D_i \overline{w}_{ij}, D_j \phi)_{L_2}$$

ただし, $w = (w, w_{11}, w_{12}, w_{22})$, $\overline{w} = (\phi, \overline{w}_{11}, \overline{w}_{12}, \overline{w}_{22})$, $\overline{w}_{21} = \overline{w}_{12}$ etc.

[定義 1] $(F, w) \in H \times H$ が次の方程式を満たすとき, u は

(2.3) 方程式の弱解と"う.

$$(2.3) \quad \mathcal{L}(F, \overline{w}) = ([F, w], \phi)_{L_2} \quad \forall \overline{w} \in H$$

$$(2.4) \quad \mathcal{L}(w, \overline{w}) + ([F, w], \phi)_{L_2} + (p, \phi)_{L_2} = 0 \quad \forall \overline{w} \in H$$

[定理 1] 任意の p (充分滑か) には (2.4) の弱解は常に存在し,

$\partial\Omega$ が十分滑かであればこの解も十分滑かである. ([2], [8])

(2.3), (2.4) の方程式は単独方程式と (2) 表わされ.

$\mathcal{C}(F, w; \overline{w}) \equiv ([F, w], \phi)_{L_2}$ とおくことができる作用素 $\mathcal{C}$ は

$$\mathcal{C}(F, w; \overline{w}) = (\mathcal{C}(F, w), \overline{w})_H \quad \forall \overline{w} \in H$$

と表現出来ることは Sobolev の埋蔵定理および Riesz の表現定理によりわかるので $\mathcal{L}(w, \bar{z}) = (\mathcal{L}w, \bar{z})_{H^1}$, $(p, \phi)_{L_2} = (Bp, \bar{z})_{H^1}$ と表現するこゝと出来るは (2.3), (2.4) はそれと次のようになる。

$$(2.5) \quad \mathcal{L}F = \mathcal{C}(w, w)$$

$$(2.6) \quad \mathcal{L}w + \mathcal{C}(F, w) + Bp = 0$$

[補題 2] $\mathcal{L}$ は $H_{1+\varepsilon} = (W_{1+\varepsilon}^2 \cap W_2^1) \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\}$ ($\varepsilon > 0$) の上で invertible 2 次の式が成立する

$$(2.7) \quad \|\mathcal{L}^{-1}v\|_{L_2} \leq C \|v\|_{L_2} \quad \forall v \in H_{1+\varepsilon}$$

したがって 2 次の単独方程式が得られる ($W_{1+\varepsilon}^2 \subset W_2^2$ を使う)。

$$(2.8) \quad \mathcal{L}w + \mathcal{C}(\mathcal{L}^{-1}\mathcal{C}(w, w), w) + Bp = 0.$$

3. 混合法の導入

Ω_R ($R \rightarrow 0$) を、三角形からなる Ω の部分領域とする。 Ω_R 上の部分的 1 次の有限要素空間を $\hat{S}_1$, $\partial\Omega_R$ でゼロとなるものの全体 ($\hat{S}_1$ の部分空間) を $\hat{S}_0$ で表わす。 $\Omega - \Omega_R$ へは適当に拡張する (詳しくは [14] 参照)。 我々が提案する scheme は (2.3) ~ (2.4) の Galerkin 近似のようになるのである。

$$(3.1) \quad \mathcal{L}(\hat{F}, \hat{z}) = ([\hat{w}, \hat{w}], \phi)_{L_2} \quad \forall \hat{z} \in \hat{H}^1$$

$$(3.2) \quad \mathcal{L}(\hat{w}, \hat{z}) + ([\hat{F}, \hat{w}], \phi)_{L_2} + (p, \phi)_{L_2} = 0 \quad \forall \hat{z} \in \hat{H}^1$$

ただし, $\hat{F}, \hat{w} \in \hat{H}^1$. 容易にわかるようにこの方程式も

次の形の単独方程式を表わされる.

$$(3.3) \quad \hat{U}\hat{w} + PC(\hat{U}^{-1}PC(\hat{w}, \hat{w}), \hat{w}) + PBp = 0$$

ただし, $P: H \rightarrow H$ (projection), $\hat{U} = PUP$.

4. 定調和方程式の場合の誤差評価.

分割の規則性を適当に仮定すると (以下への仮定を常に置く)
<) 次の誤差評価が, 問題

$$(4.1) \quad \Delta^2 w = p \quad w = dw/dn = 0$$

の場合に成り立つ.

[定理3]. $w \in H$ は (4.1) の解, $\hat{w} \in H$ は (4.1) の近似解とするとき最大偏差とすると

$$(4.2) \quad \|w - \hat{w}\|_{L_2} \leq c h^{\frac{1}{2}} \|p\|_{L_2} \quad \blacksquare$$

5. 標準化方程式^(5.1)

(3.3) の解の存在性, 収束性を示すために反復法を利用する. この節ではこの反復に現われる標準方程式の可解性を調べる. (2.8) を次の型に書く.

$$(5.1) \quad w + C(w) + U^{-1}Bp = 0$$

ただし, $C(w) = U^{-1}C(U^{-1}C(w, w), w)$.

$z = w_1 - w_0$ ($w_1 \in H$) とすれば $\mathcal{C}(w)$ は "3 次多項式" となる.

$$(5.2) \quad \mathcal{C}(w_1) - \mathcal{C}(w_0) = \mathcal{C}'_{(w_0)}(w_1 - w_0) + \mathcal{D}(w_0, z)$$

さらに,

$$\mathcal{C}'_{(w_0)} z = \mathbb{L}^{-1} \mathcal{C}(\mathbb{L}^{-1} \mathcal{C}(w_0, w_0), z) + 2 \mathbb{L}^{-1} \mathcal{C}(\mathbb{L}^{-1} \mathcal{C}(w_0, z), w_0)$$

$$\mathcal{D}(w_0, z) = 2 \mathbb{L}^{-1} \mathcal{C}(\mathbb{L}^{-1} \mathcal{C}(w_0, z), z) + \mathbb{L}^{-1} \mathcal{C}(\mathbb{L}^{-1} \mathcal{C}(z, z), w_0 + z)$$

(3.2) の離散システムを同様に $\hat{w} + \hat{\mathcal{C}}(\hat{w}) + \mathbb{L}^{-1} B p = 0$ とすれば,

$$(5.3) \quad \hat{\mathcal{C}}(\hat{w}_1) - \hat{\mathcal{C}}(\hat{w}_0) = \hat{\mathcal{C}}'_{(\hat{w}_0)}(\hat{w}_1 - \hat{w}_0) + \hat{\mathcal{D}}(\hat{w}_0, \hat{z}) \text{ etc.}$$

となる. 以下 $\hat{w}_0$ は (5.1) の 1 つの解 w の補内と考える.

[補題 4] $\mathcal{C}'_{(w_0)}, \hat{\mathcal{C}}'_{(\hat{w}_0)}$ は $\mathbb{L}_2$ 上で well defined であり, $\mathbb{L}_2$ への作用素とみて compact である.

以下, 次の方程式

$$(5.4) \quad Kz = (\mathbb{I} + \hat{\mathcal{C}}'_{(\hat{w}_0)})z = q \quad q \in \mathbb{L}_2$$

の可解性も, 方程式

$$(5.5) \quad Kz = (\mathbb{I} + \mathcal{C}'_{(w_0)})z = 0$$

が trivial な解しか持たないことを仮定して考える.

[補題 5] $\hat{v} = \mathbb{L}^{-1} B \mathcal{C}(\hat{v}, \hat{w})$, $(\hat{v}, \hat{w} \in H)$ とすれば $0 < \varepsilon < 1/2$

なる

$$(1) \quad \|\hat{v}\|_{\mathbb{L}_2} \leq c_\varepsilon \|\hat{v}, \hat{w}\|_{L_{1+\varepsilon}}$$

$$(2) \quad \|\hat{v}\|_{\mathbb{L}_2} \leq c_\varepsilon \|\hat{v}\|_{H^1} \cdot \|\hat{w}\|_{\mathbb{L}_2}$$

$$(3) \quad \|\hat{v}\|_{\mathbb{L}_2} \leq c |\hat{v}|_{\max} \|\hat{w}\|_{\mathbb{L}_2}.$$

[補題 6] $\hat{v} \in H^1$, $z \in L_2$, $0 < \varepsilon < 1$. のとき,

$$\|\hat{v}, z\|_{L^{1+\varepsilon}} \leq C h^{-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}} \|\hat{v}\|_{L_2} \|z\|_{L_2} \quad \blacksquare$$

[定理 7] (5.5) が trivial solution を持たないならば,
 h が十分小さいとき $H^* = K^{-1}G$ となる. 次の式が成立する.

$$(5.6) \quad \|\hat{K}H^* - G\|_{L_2} \leq C_\varepsilon h^{\frac{1}{2} - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}} \|G\|_{L_2} \quad \blacksquare$$

[定理 8]. 前定理の仮定のもとで (5.4) は十分小さい h に対して一意可解であり, 次の式が成立する.

$$(5.7) \quad \|(I + \hat{C}'(\hat{w}_0))^{-1}\|_{L_2} \leq C < \infty \quad \text{as } h \rightarrow 0.$$

6. 近似解の存在性, 一意性, 収束性.

[補題 9]. $\bar{w}_0 \in H^1$ を正確解, $\hat{w}_0 \in \bar{w}_0$ の補間とする.

$$\|\hat{E}\|_{L_2} \equiv \|\hat{w}_0 + \hat{C}(\hat{w}_0) + \hat{L}^{-1}PBp\|_{L_2} \leq C_\varepsilon h^{\frac{1}{2} - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}} \quad (5.8) \quad \blacksquare$$

我々が使う反復法は次の形 $\hat{\cdot}$ の書き換えから始まる.

$$(6.1) \quad \hat{w} = R\hat{w}$$

ただし,

$$R\hat{w} = \hat{w}_0 - (I + \hat{C}'(\hat{w}_0))^{-1} [\hat{E} + \hat{D}(\hat{w}_0, \hat{z})] \quad (\hat{z} = \hat{w} - \hat{w}_0).$$

(6.1) は (3.3) 式と全く同じであることに注意.

[定理10] $\hat{w}_0$ は (5.5) の解. $\hat{w}_0$ はその補角と
する. $\hat{w}_0$ はまた (5.5) にあける K の特異点ではないとす
る. このとき反復

$$\hat{w}_n = R \hat{w}_{n-1}$$

は contracting である. すなわち円球

$$S_\delta = \{ \hat{w} \in H^1; \| \hat{w} - \hat{w}_0 \|_{L_2} \leq \delta \}$$

上の条件を満たすものが存在する.

$$(A) \quad \| \hat{w}_0 - R \hat{w}_0 \|_{L_2} \leq \delta \quad \text{かつ} \quad \hat{w}_0 \in S_\delta$$

$$(B) \quad \| R \hat{w}_1 - R \hat{w}_2 \|_{L_2} \leq \varepsilon \| \hat{w}_1 - \hat{w}_2 \|_{L_2} \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

$$(\hat{w}_1, \hat{w}_2 \in S_\delta)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \quad (n \geq 11), \quad \delta = h^{\frac{1}{2} - 3/(n+1)} \quad \text{とすれば} \quad h \text{ が十分小さい}$$

とき (A), (B) が成立することになる.

[定理11] $n (\geq 11)$ を整数. $\delta = h^{\frac{1}{2} - 3/(n+1)}$ とする. h が
十分小さいれば微分方程式 (3.3) は $\hat{w}_0$ の δ -近傍にただ一つ、解
を持つ. ただし, $\hat{w}_0$ は K の特異点ではないと仮定する.

[注意] 以上の議論及び結果は lumped type の近似スキーム
にたいして (2) も全く同様に成り立つ ([14] 参照).

1. Agmon, S.: The L_p approach to the Dirichlet problem. Ann. Scuola Normale Pisa 13, 405-448(1959).
2. Berger, M.S.: On von Kármán's equations and the buckling of a thin elastic plate I, Comm.Pure and Appl.Math. 20, 687-720(1967).
3. Berger, M.S. and P.Fife: On von Kármán's equations and the buckling of a thin elastic plate II, Plate with general edge conditions. Comm.Pure and Appl.Math. 21, 227-241(1968).
4. Friedrichs, K.O. and J.J.Stoker: The nonlinear boundary value problem of the buckled plate. Amer.J.Math. 63, 839-888(1941).
5. Johnson, C.: On the convergence of a mixed finite element method for plate bending problems. Numer.Math. 21, 43-62 (1973).
6. Kantorovich, L.V. and G.P.Akilov: Functional analysis in normed spaces: Pergamon press 1964.
7. Keller, H.B. and E.Reiss: Iterative solutions for non-linear bending of circular plates. Comm.Pure and Appl.Math. 11, 273-292(1958).
8. Knightly, G.H.: An existence theorem for the von Kármán equations. Arch.Rational Mech.Anal. 27, 233-242(1967).
9. Krasnosel'skii, M.A. et al.: Approximate solution of operator equations: Wolters-Noordhoff publishing 1972.
10. Miyoshi, T.: A finite element method for the solution of fourth order partial differential equations. Kumamoto J. Sci. (Math.) 9, 87-116(1972).
11. Miyoshi, T.: Finite element method of mixed type and its convergence in linear shell problems. Kumamoto J. Sci. (Math.) 10, 35-58(1973).
12. Morosov, N.: On the non-linear theory of thin plates. Dokl.Akad.Nauk SSSR 114, 968-971(1957).
13. Pian, T.H.H. and P.Tong: Basis of finite element method for solid continua. Int.J.Numerical Methods Eng. 1, 3-28(1969).

14. Miyoshi, T.: A mixed finite element method for the Solutions of the von Kármán Equations. (to appear)