

降雨の時間配分に関する確率論的考察

石原 安雄・友杉 邦雄

A STUDY ON STATISTICAL LAWS OF TIME DISTRIBUTION OF A RAINFALL

By Yasuo ISHIHARA and Kunio TOMOSUGI

Synopsis

Under the present condition that a fine prediction of hyetograph is impossible, the statistical characters of time distribution of a heavy rainfall will be an available basis of judgment for short range water problems such as flood control or flood forecasting.

From mainly this point of view, this paper deals with the statistical characters of some factors on the normalized shape of hyetograph of a short term (one day or under), firstly through a mathematical analysis of a model of *occupancy problem* regarding rainfall units as balls and divided parts of rainfall time as cells under the assumption that the process of the distribution of a rainfall is random, and secondly, with those of the same factors in order to verify the mathematical analysis and of the other factors, through a statistical analysis of data of actual hyetographs.

The probability distributions of some factors of hyetograph are obtained by the mathematical analysis and it is concluded that the process of the distribution of a rainfall is nearly random but not quite random by the data analysis.

The present approach will play an important role in design of water works against floods also.

1. ま え が き

洪水時の最適なダム（群）操作にとって、ダム（群）へ流入する洪水および残流域支川からの洪水の規模のみならず、それらのハイドログラフの予測は必須の事項といえる。ところが、わが国のダム流域あるいはその残流域支川のような中小流域の出水は一般に急激であるため、こうした洪水ハイドログラフの効果的な予測は、その原因である雨の降り方（具体的には面積平均的ハイエトグラフ）の予測に基づいて行なわれなければ間に合わない。しかし、このようなきめのこまかい予測は極めて困難で不可能に近いのが現状である。ただ、現在のところ精度に問題があるにせよ、ごく近い将来の比較的短かい期間（数時間～1日程度）の面積平均的雨量なら降雨原因によっては比較的容易に予測できるようである。この予測精度が将来向上することを前提とし、かつ短期間のハイエトグラフの形状に関する統計的性質が定量的に解明されるならば、ダム（群）による洪水調節の合理化と最適化への可能性がでてくるものと考えられる。

本研究は、主としてこの観点から比較的短期間（1日以下）の総雨量のその期間内の時間配分（いわばハイエトグラフ）に関する統計的性質を究明するために行なったものである。ところで、ハイエトグラフの形状はまさに無限であり、個々のハイエトグラフの確率分布を論じること無理である。そこで、ハイエトグラフの有するある特定の要素によって区別されるハイエトグラフの集合の確率分布について論じざるを得ない。これはその特定の要素自体の確率分布を論じることと同等である。この特定の要素として様々なものが考えられるが、ここでは比較的处理が容易でかつ重要と考えられるつぎの3つのものを取り上げる。すなわち、(1)等分された期間への最大配分値が総雨量に対して占める比率（等分最大配分率）、(2)大きさによ

て順位づけられた配分値が総雨量に対して占める比率（順位配分率）および(3)ある特定の個数ずつ連続した配分値の和のうちの最大値が総雨量に対して占める比率（連続最大配分率）である。ここで、(1)は(2)の特別な場合であるが、あえて分けたのは、(1)の確率分布は理論的に得られるが、それ以外の分布は(3)を含めて理論的考察が非常にむづかしく、現在のところ数多くの実測ハイトグラフの統計処理より推定するしかないという意味で取扱いを異にするからである。

本研究では、まず、降雨の時間配分過程のランダム性を仮定し、それを離散的な確率モデルにおきかえることによって、(1)の確率分布を理論的に導き、その分布特性を明らかにする。ついで、(2)の確率分布について同様な検討を加え、理論的に得られた(1)の期待値から(2)の期待値の近似的なものを提案する。最後に、ハイトグラフの実測資料より(1)、(2)および(3)の分布特性を調べ、理論の検証を行ない、降雨の時間配分のランダム性の仮定の妥当性について検討する。

なお、(1)の確率分布を、農地や都市の排水計画、ダムの余水吐の計画などに利用する目的で、この研究と同様、降雨のランダム性を仮定して理論的に求めようとした石原・角屋の研究¹⁾があるが、その研究では最初から(1)を連続変数として取扱ったためか厳密解が完全には得られていない。今回の研究では離散的に扱うことにより一般的な厳密解を得ることに成功し、本研究の成果は上記のような計画論にも役立つものと考えられる。

2. 確率モデルによる降雨の時間配分に関する考察

2.1 一連降雨の時間配分過程について

年雨量、月雨量あるいは日雨量といったその期間内の降雨強度の時間的変化を無視した総雨量の多少には一般に地域性のあることは周知の事実である。また、降雨量の多い月、少ない月といったものも地域ごとにほぼ定まっているようである。すなわち、このように比較的大きな時間スケールでみた降雨量の変化は地域ごとにほぼ定まった周期のようなものがあるといえ、利水目的のために従来多くの統計解析がなされている。しかし、われわれが問題としている洪水の原因となる一連降雨のハイトグラフのように、もっと短い時間単位（数十分～数時間程度）ごとの降雨量の時間的変化の状況については、その地域性は明確ではなく、また、降雨によっては顕著な周期性のようなものも見られるが、一定していないようであって、むしろランダムに近いように思われる。このことをあえて物理的に解釈するならばつぎのようになる。

一連降雨の強度の変化過程について考えてみると、その変化の主な原因は、降雨機構、気象条件および地形因子が互いに複雑に影響し合ってつくりだす大気じょう乱の変動にある²⁾と考えられる。そして、ことにいわゆる大雨の場合など、こうした大気じょう乱のスケールは様々でそのスケールに応じて消長の寿命も様々で、かつ重なり合っており³⁾、それらの変動状況が非常に複雑であるため、降雨強度の変動があたかも偶発的な現象のようになるためであると解釈できよう。

もちろん、こうした変動状況の予測が将来可能になるかもしれないが、現在のところ不可能であるため、すなわち未知なるがゆえに、ここでは一連降雨の時間配分過程はランダムであると仮定することにしたのである。すなわち、降雨期間中のどの時点に雨滴が地上に達するのと同じ確からしさをもってしていると仮定することにする。

2.2 降雨の時間配分のモデル化とその可能性の集合

一連降雨の強度分布は面積的にも時間的にも、厳密な意味で、一様ではない。ただ、面積的には、降雨原因等によって異なるが、かなりのスケールまで実際上ほぼ一様とみなしてよい場合がある⁴⁾。また、明らかに一様とみなせなくても、いわゆる洪水の流出解析に際し、必要な精度のハイドログラフを得るのに面積平均的ハイトグラフを用いて十分な面積スケールというものが現象論的にあるであろうが、その点については現在のところ明確にされておらず、今のところ経験的に適当な広さの面積平均的ハイトグラフが用いられている。いずれにしても、われわれが最終的に必要とするのは最適なダム操作等に必要な情報を備えた洪水ハイドログラフを予測するのに十分な面積平均的ハイトグラフであって、いまその形状の統計的性質を問

題にしている。

そこで、地点のハイトグラフと面積平均的ハイトグラフの統計的性質が異なるかもしれないという問題が起る。実際、一連降雨について地点のハイトグラフ個々と、それらの面積加重平均をした面積平均的ハイトグラフを比較すると、一般に前者に比して後者の方が強度の変動状況が滑らかになることが多い。このことが即、両者の統計的性質が異なるということを意味するとはいえないかもしれないが、ここでは、面積平均的ハイトグラフは地点ハイトグラフから得られるものであるという観点から、地点ハイトグラフの統計的性質のみを考えればよいということにする。

さて、ある地点の一連降雨の強度の時間的変化であるが、降雨強度は明らかに時間に関する連続変数であって、2.1 の考察からも強度 0 の期間を除いて常に変動していると考えるべきであろう。しかし、必要な精度のハイドログラフを得るのに用いるという立場からは、流域が高周波ろ波機能をもつということを含わせ考えれば、あまり短い時間スケールの降雨強度の変動を知る必要がなく、一連降雨のハイトグラフは適当な時間単位ごとの平均強度の変化を示すものであれば十分である。もっとも、その時間単位をどれだけにするのが最も適当であるかは、必要なハイドログラフの精度や流域特性によって決定されるべきものであるが、その議論は別の機会に譲ることにし、ここでは、一般性を失わないためにこうしたことを念頭において、降雨の時間配分のモデル化をつぎのように行なう。

降雨の時間配分の問題、すなわちある一連降雨の任意の期間 T の雨量 r が与えられたとき、その期間の n 等分に当る n 個の時間単位 $t(=T/n)$ の系列それぞれに配分される雨量 $r_j(j=1, 2, \dots, n)$ の系列がどのようなになるかの問題は、雨量を離散変数と考えることによって、つぎのようなボールと箱の問題にすりかえられる。すなわち、雨量をボールの個数（1個は雨量の最小単位）、 n 個の分割された時間単位を時間の流れを示す順番という区別のついた箱と考えれば、総数 r 個の区別のつかないボールを区別のつく n 個の箱に配分する問題にすりかえられるわけである。ここで、雨量の最小単位をどうとるか自由であり、たとえば 10 mm の雨量は、最小単位を 0.5 mm とすれば 20 個のボール、0.1 mm とすれば 100 個のボールを意味する。

さて、上記のモデルにおいて、1つの特定の配分方法の最も重要な性質は、その占有数 $r_1, r_2, \dots, r_n$ によって示され、

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = r \quad (r_j \geq 0; j=1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (1)$$

なる関係がある。これらのボールは区別ができないため、ボールの配分方法はその占有数のみによって表わされ、各配分方法是对応している順序づけられた n 個の組 $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ が同じでないときに限って区別される。この区別のできる配分方法の集合の元素の数（(1) 式の異なった解の数）を以下の議論のために知っておく必要がある。

いま n 個の箱を $n+1$ 本の縦線の間の部分で、ボールを * で表わすことにすると、たとえば $||**|*||***||$ *| は $n=6$ の箱の中に $r=7$ のボールが入っていて、その占有数が、2, 1, 0, 3, 0, 1であることを示している。この表示方法はかならず縦線で始まり縦線で終るが、残りの $n-1$ 本の縦線と r 個の * は任意の順序で現われる。このことから、求める区別できる配分方法の総数は、 $n+r-1$ 個の場所から r 個選ぶ方法の数に等しいことがわかる⁵⁾。そこで、この数を $A(n, r)$ と定義すると、明らかにこれはつぎようになる。

$$A(n, r) = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1} \quad \dots\dots\dots (2)$$

われわれが議論するのは、この $A(n, r)$ 個の元素をもつ集合のうち、ある特定の要素によって区別される部分集合の確率分布であるが、そのためには、その部分集合を構成する元素の数を知ればよい。それは、2.1 のランダム性の仮定によって、すべての元素が等確率 $A(n, r)^{-1}$ を与えられるからである。なお、このような場合を統計力学の分野では Bose-Einstein の統計と呼んでおり、光子、核および基本粒子を偶数個含む原子について正しいとされている⁶⁾。

2.3 n 等分最大配分率の分布

ここでは、比較的考察の容易な場合で、かつ重要な情報の 1 つであるものとして、 n 個の配分値 $r_1, r_2, \dots, r_n$ のうちの最大値 (n 等分最大配分値) の確率分布をまず離散的に求め、その $r \rightarrow \infty$ における極限として n 等分最大配分率の分布式を誘導し、その分布特性を明らかにする。なお、以下では、とくにまぎらわしくない限り、「 n 等分」を省略することにする。

I) 分布式の誘導

1) 最大配分値の確率分布

たとえば、 $n=3, r=3$ という簡単な場合を考えてみると、区別のつく配分方法の集合の元素の数は (2) 式より $A(3, 3) = \binom{3}{3} = 10$ であり、その内わけは、最大配分値が 3 となるものとして $(3, 0, 0), (0, 3, 0)$ および $(0, 0, 3)$ の 3 通り、2 となるものとして $(2, 1, 0), (2, 0, 1), (1, 2, 0), (0, 2, 1), (1, 0, 2)$ および $(0, 1, 2)$ の 6 通り、そして 1 となるものとして $(1, 1, 1)$ の 1 通りである。すなわち、最大配分値が 3 となる部分集合の元素は 3, 2 となる元素の数は 6, 1 となる元素の数は 1 ということであって、これら 10 個の元素はそれぞれ等確率 $1/10$ で起るとしているから、最大配分値が 3 となる確率は $3/10$, 2 となる確率は $6/10$, 1 となる確率は $1/10$ である。

このように、最大配分値がある特定の値になる部分集合の元素の数を求めれば、最大配分値がその値になる確率が得られるわけであり、つぎにこうした部分集合の元素の数を求める一般式を誘導しよう。

A) 部分集合の元素の数の一般式

(i) 最大配分値の一般的性質

まず“最大配分値を一般的に k と表わすと、すなわち式で表わせば、

$$\max(r_1, r_2, \dots, r_n) = k \quad \dots \dots \dots (3)$$

とおくと、 k のとり得る範囲は明らかに $r \geq k \geq r/n$ (右側の等号が成り立つのは r が n で割切れるときのみ) であるが、この範囲内でさらに k が r の何分の 1 と何分の 1 の間にあるかによって n 個の配分値のうち 2 つ以上が k となる場合が生じるため、求める元素の数の勘定の仕方が異なってくることに注意しなければならない。もうすこし具体的にいうと、 $r \geq k > [r/2]$ ($[]$; ガウス記号) ならば最大配分値は 1 つしかないが、 $[r/2] \geq k > [r/3]$ ならば同時に 2 つ存在することがあり、一般に $[r/s] \geq k > [r/(s+1)]$ ならば最大 s 個の最大配分値が存在することが可能である (ただし $1 \leq s \leq n$)。そしてそれらの各場合ごとに、求める元素の数の勘定の仕方は基本的には (2) 式の応用であるが、最大配分値が 2 つ以上ある場合があるということによって細かい配慮が必要になり、異なった一般式になる。そこでこのような場合ごとに分けて一般式を誘導しよう。その前に説明の便宜上つぎのような値を定義しておく。まず、 k にそれがいかなる範囲にある値であるかの区別をつけるために、

$$[r/s] \geq k_s > [r/(s+1)] \quad (s=1, 2, \dots, n-1) \quad \dots \dots \dots (4)$$

なる値 k_s を定義する (ただし $k_n = r/n$)。また、 $k = k_s$ となる場合の部分集合の元素の数を $N_s(n, r)$ とし、そのうち k が l 個ある元素の数を $N_{s,l}(n, r)$ とする。するとつぎの関係が成り立つことは明らかである。

$$N_s(n, r) = \sum_{l=1}^s N_{s,l}(n, r) \quad \dots \dots \dots (5)$$

(ii) $k = k_1 (r \geq k_1 > [r/2])$ となる場合の数 $N_1(n, r)$

この場合、ある 1 つの箱に k 個のボールが入ったなら、残りの $n-1$ 個の箱それぞれに入り得るボールの数は、残りのボール $r-k$ は k より小さいから、すべて k より小さい。すなわち、最大配分値は 1 つしか有り得ない。したがって、 $N_1(n, r) = N_{1,1}(n, r)$ であって、これはつぎのように簡単に求まる。

まず、ある 1 つの特定の箱に k 個のボールが入る場合の数を考えると、それは、残りの $n-1$ 個の箱に $r-k$ 個のボールを配分する場合の数に他ならない。これは (2) 式にあてはめることによって $A(n-1, r-k)$ である。つぎに、どの 1 つの箱に k 個のボールが入るかの場合の数を考えると、これは $\binom{n}{1}$ であることは明らかである。求める数はこれらの数を掛け合わせたものであることも明らかである。すなわち、

$$N_1(n, r) = A(n-1, r-k) \cdot \binom{n}{1} \dots\dots\dots (6)$$

(iii) $k=k_2$ ($[r/2] \geq k_2 > [r/3]$) となる場合の数 $N_2(n, r)$

この場合は、 k の個数 $l=1$ の場合と 2 の場合があり、分けて考える必要がある。まず $l=2$ の場合から考えよう。

(a) $l=2$ の場合の数 $N_{2,2}(n, r)$; ある 2 個の箱に k 個ずつボールが入ると、残りの $n-2$ 個の箱それぞれに入り得るボールの数は、 $r-2k < k$ であるから、すべて k より小さい。したがって求める数は (ii) と同様に、 n 個のうちのある特定の 2 個の箱にそれぞれ k 個のボールが入る場合の数、すなわち $n-2$ 個の箱に $r-2k$ 個のボールを入れる場合の数 $A(n-2, r-2k)$ と、 n 個の箱のうちどの 2 つに k 個のボールが入るかの場合の数 $\binom{n}{2}$ を掛けて、

$$N_{2,2}(n, r) = A(n-2, r-2k) \cdot \binom{n}{2} \dots\dots\dots (7)$$

(b) $l=1$ の場合の数 $N_{2,1}(n, r)$; k が最大値でないとすれば、 n 個のうちのある特定の 1 つの箱がちょうど k 個のボールを含む場合の数は明らかに $A(n-1, r-k)$ であるが、この数の中には残りの $n-1$ 個の箱のうち 1 つが k 個以上のボールを含む場合の数も含まれている。いま、 k は最大値でかつ 1 つしかないということであるからそれらの場合の数を除かなければならない。そこで、その k 個以上のボールの数を j とすれば、 $A(n-1, r-k)$ から除くべき数はつぎのようにして求める。

k 個のボールを含む特定の 1 つの箱を除いた $n-1$ 個の箱のうち特定の 1 個の箱が j 個のボールを含む場合の数は、 $r-k-j < j$ であるから (ii) の場合と同様に、残りの $n-2$ 個の箱に $r-k-j$ 個のボールを配分する方法の数 $A(n-2, r-k-j)$ と、 $n-1$ 個の箱のどれに j 個のボールが入るかの場合の数 $\binom{n-1}{1}$ とを掛けたものであり、 j のとり得る範囲は $r-k \geq j \geq k$ であることを考慮すれば、除くべき数は、

$$\sum_{j=k}^{r-k} A(n-2, r-k-j) \cdot \binom{n-1}{1}$$

となる。したがって求める $N_{2,1}(n, r)$ は、 n 個の箱のうちどの 1 つに k 個のボールが含まれるかの場合の数が $\binom{n}{1}$ であることを考慮して、

$$N_{2,1}(n, r) = \left\{ A(n-1, r-k) - \sum_{j=k}^{r-k} A(n-2, r-k-j) \cdot \binom{n-1}{1} \right\} \cdot \binom{n}{1} \dots\dots\dots (8)$$

(c) $N_2(n, r)$ の一般式; (5) 式を考慮すれば、以上に得た (7) 式および (8) 式から、 $N_2(n, r)$ はつぎのようになる。

$$N_2(n, r) = A(n-2, r-2k) \cdot \binom{n}{2} + \left\{ A(n-1, r-k) - \sum_{j=k}^{r-k} A(n-2, r-k-j) \cdot \binom{n-1}{1} \right\} \cdot \binom{n}{1} \dots\dots\dots (9)$$

この式は、つぎの 2 つの恒等式⁷⁾、

$$A(n, r) = \sum_{j=0}^r A(n-1, j) \dots\dots\dots (10)$$

$$A(n, r) = A(n-1, r) + A(n, r-1) \dots\dots\dots (11)$$

を応用して変形することによってつぎのようになる。

$$N_2(n, r) = A(n-1, r-k) \cdot \binom{n}{1} - \left\{ A(n-1, r-2k) + A(n-1, r-2k-1) \right\} \cdot \binom{n}{2} \dots\dots (12)$$

(iv) $k=k_3$ ($[r/3] \geq k_3 > [r/4]$) となる場合の数 $N_3(n, r)$

この場合は、最大配分値 k の個数 l が 3 まで可能であり、(iii) と同様分けて考える。

(a) $l=3$ の場合の数 $N_{3,3}(n, r)$; これは (iii) の(a)と全く同様に考えることによってつぎのようになることがわかる。

$$N_{3,3}(n, r) = A(n-3, r-3k) \cdot \binom{n}{3} \dots\dots\dots (13)$$

(b) $l=2$ の場合の数 $N_{3,2}(n, r)$; これは (iii) の (b) と同様な考え方で求めることができる。すなわち, k が最大値でないとすれば, n 個のうちの特定の 2 つの箱がそれぞれちょうど k 個のボールを含む場合の数は $n-2$ 個の箱に $r-2k$ 個のボールを配分する方法の数 $A(n-2, r-2k)$ であるが, この数の中にはこの $n-2$ 個の箱のうちの 1 つが k 個以上のボールを含む場合の数も含まれている。いま k は最大値でかつ 2 しかないわけであるから, それらの場合を除く必要があり, その k 個以上のボールの数を j とすると, $A(n-2, r-2k)$ から除くべき数はつぎのようにして求まる。

それぞれ k 個のボールを含む特定の 2 つの箱を除いた $n-2$ 個の箱のうち特定の 1 個の箱が j 個のボールを含む場合の数は, $r-2k-j < j$ であるから, 残りの $n-3$ 個の箱に $r-2k-j$ 個のボールを配分する方法の数 $A(n-3, r-2k-j)$ と, $n-2$ 個の箱のどの 1 つに j 個のボールが入るかの場合の数 $\binom{n-2}{1}$ とを掛けたものであり, j のとり得る範囲は $r-2k \geq j \geq k$ であることを考慮すれば, 除くべき数はつぎのようになる。

$$\sum_{j=k}^{r-2k} A(n-3, r-2k-j) \cdot \binom{n-2}{1}$$

したがって $N_{3,2}(n, r)$ は, n 個の箱のうちどの 2 つに k 個のボールが含まれるかの場合の数が $\binom{n}{2}$ であることを考慮して, つぎのようになる。

$$N_{3,2}(n, r) = \left\{ A(n-2, r-2k) - \sum_{j=k}^{r-2k} A(n-3, r-2k-j) \cdot \binom{n-2}{1} \right\} \cdot \binom{n}{2} \dots\dots\dots (14)$$

(c) $l=1$ の場合の数 $N_{3,1}(n, r)$; k が最大値でないとすると, n 個のうちの特定の 1 つの箱にちょうど k 個のボールを含む場合の数は $n-1$ 個の箱に $r-k$ 個のボールを配分する方法の数 $A(n-1, r-k)$ であるが, この中にはこの $n-1$ 個の箱のうちの 1 つあるいは 2 つが k 個以上のボールを含む場合の数が含まれている。いま k は最大値でかつ 1 つしかないということであるから, それらの場合の数を除く必要がある。そこでその k 個以上のボールの数を j とすれば, $A(n-1, r-k)$ から除くべき数は j の範囲によって分けて考えることによりつぎのように求まる。

j のとり得る範囲は $r-k \geq j \geq k$ であるが, $r-k \geq j > [(r-k)/2]$ であれば, $n-1$ 個の箱のうち j 個のボールを含むのは 1 つしかない。したがって, この場合の数を求めるには (ii) で $N_1(n, r)$ を求めたのと全く同様の思考過程が適用される。すなわち, (6) 式において n のかわりに $n-1$, r のかわりに $r-k$, k のかわりに j となっただけであり, ただその値を j について加え合わさなければならないだけである。よって $A(n-1, r-k)$ から除くべき数の 1 部として,

$$\sum_{j=[(r-k)/2]}^{r-k} A(n-2, r-k-j) \cdot \binom{n-1}{1}$$

が得られる。

つぎに, 残りの $[(r-k)/2] \geq j \geq k$ の場合であるが, この場合は $n-1$ 個の箱のうち 2 つの箱がそれぞれちょうど j 個のボールを含む場合と, 1 つの箱だけが j 個のボールを含む場合がある。この場合の数を求めるには (iii) で $N_2(n, r)$ を求めたのと全く同様の思考過程が適用される。すなわち, (9) 式において, n のかわりに $n-1$, r のかわりに $r-k$, k のかわりに j , そして j のかわりに i とおけばよい。この数を先と同様 j について加え合わせることによって $A(n-1, r-k)$ から差引くべき残りの数が得られ, それはつぎのようになる。

$$\sum_{j=k}^{[(r-k)/2]} \left\{ A(n-3, r-k-2j) \cdot \binom{n-1}{2} \right. \\ \left. + \left(A(n-2, r-k-j) - \sum_{i=j}^{r-k-j} A(n-3, r-k-j-i) \cdot \binom{n-2}{1} \cdot \binom{n-1}{1} \right) \right\}$$

したがって, $N_{3,1}(n, r)$ は n 個の箱のうちどの 1 つに k 個のボールが入るかの場合の数が $\binom{n}{1}$ であることを考慮して,

$$N_{3,1}(n, r) = \left[A(n-1, r-k) - \sum_{j=[(r-k)/2]+1}^{r-k} A(n-2, r-k-j) \cdot \binom{n-1}{1} \right]$$

$$- \sum_{j=k}^{\lceil (r-k)/2 \rceil} \left\{ A(n-3, r-k-2j) \cdot \binom{n-1}{2} \right. \\ \left. + \left(A(n-2, r-k-j) - \sum_{i=j}^{r-k-j} A(n-3, r-k-j-i) \cdot \binom{n-2}{1} \cdot \binom{n-1}{1} \right) \right\} \cdot \binom{n}{1} \dots \dots \dots (15)$$

となる。

(d) $N_s(n, r)$ の一般式；これは，(13)，(14) および (15) 式の和であるが，(10) 式と (11) 式を応用して整理するとつぎのようになることがわかる。

$$N_s(n, r) = A(n-1, r-k) \cdot \binom{n}{1} - \left\{ A(n-1, r-2k) + A(n-1, r-2k-1) \right\} \cdot \binom{n}{2} \\ + \left\{ A(n-1, r-3k) + A(n-1, r-3k-1) + A(n-1, r-3k-2) \right\} \cdot \binom{n}{3} \dots \dots \dots (16)$$

(v) $k=k_s$ ($\lceil r/s \rceil \geq k_s > \lceil r/(s+1) \rceil$) となる場合の数 $N_s(n, r)$

以上に $k=k_1$, k_2 および k_3 の場合にそれぞれ対応する部分集合の元素の数 $N_1(n, r)$, $N_2(n, r)$ および $N_3(n, r)$ の一般式を誘導したわけであるが， s がさらに大きくなることによって上記と異なった特別の思考を要することはない，同様の思考過程の繰返しと組み合わせによって $N_s(n, r)$ ($s=4, 5, \dots, n-1$) が得られる。したがって，以上の結果 (6) 式，(12) 式および (16) 式) を演繹することによって，一般に $k=k_s$ となる場合の数 $N_s(n, r)$ はつぎのようになるといえる。

$$N_s(n, r) = \sum_{j=1}^s (-1)^{j+1} \sum_{i=0}^{j-1} A(n-1, r-j \cdot k-i) \cdot \binom{n}{j} \dots \dots \dots (17) \\ (s=1, 2, \dots, n-1)$$

(vi) $k \geq k_s$ となる場合の数 $C_s(n, r)$

これは (17) 式で表わされる $N_s(n, r)$ を $k=k_s$ から r まで加え合わせたものであり，(10) 式の関係を応用してつぎのようになる。

$$C_s(n, r) = \sum_{j=1}^s (-1)^{j+1} \cdot A(n, r-j \cdot k_s) \cdot \binom{n}{j} \dots \dots \dots (18) \\ (s=1, 2, \dots, n-1)$$

B) 分布式

さて，問題の $k=k_s$ となる確率 $P_r(k=k_s)$ および $k \geq k_s$ となる確率 $P_r(k \geq k_s)$ は， r 個のボールを n 個の箱に配分する方法の総数が (2) 式の $A(n, r)$ で表わされ，これらの元素がすべて等確率で起るという仮定から， $s=1, 2, \dots, n-1$ に対して，

$$P_r(k=k_s) = N_s(n, r) / A(n, r) \dots \dots \dots (19)$$

$$P_r(k \geq k_s) = C_s(n, r) / A(n, r) \dots \dots \dots (20)$$

として得られるわけである。なお， $s=n$ すなわち $k_n=r/n$ となる特殊な場合に対しては $N_n(n, r)=1$, $C_n(n, r)=A(n, r)$ なる関係があることは明らかであろう。

このように最大配分値の離散形式の確率分布および分布関数の一般式 (それぞれ (19) 式および (20) 式) が得られたわけであるが，実際にこれらの値を計算するのは r および n が大きくなると非常に繁雑になり，さらに現実と与えられる雨量としての r はいろいろな値をとるわけであるから，その値ごとに (19) 式あるいは (20) 式を計算するのはめんどうである。この観点から，つぎに最大配分値 k が r に対して占める比率 k/r (最大配分率) の分布関数および確率分布を求めよう。

2) 最大配分率の分布式

k/r は r を離散変数とする限り不連続な値をとるが， r が無限に大きい数であれば連続変数とみなし得る。また実際，雨量としての r は最小単位をいくらでも小さくとれるから無限に大きい数とみなしてさしつかえない。そこで， $k/r=x$, $k_s/r=x_s$ ((4) 式より $1/s \geq x_s \geq 1/(s+1)$) とおき，(20) 式の $r \rightarrow \infty$ における極限をとると ((19) 式は直接極限がとれない)，つぎのような連続形式の分布関数を得る。

$$P_r(x \geq x_s) = \sum_{j=1}^s (-1)^{j+1} \cdot \binom{n}{j} \cdot (1-j \cdot x_s)^{n-1} \dots \dots \dots (21) \\ (s=1, 2, \dots, n-1)$$

これを $1-F_n(x_s)$ とおくと, $F_n(x_s)$ は x が x_s より小さくなる確率 (非超過確率) を表わす。

この (21) 式を x_s で微分することにより, x_s が x_s と x_s+dx_s の間にある確率 $f_n(x_s) \cdot dx_s$ がつぎのように得られる。

$$f_n(x) \cdot dx_s = \sum_{j=1}^s (-1)^{j+1} \cdot j \cdot (n-1) \cdot \binom{n}{j} \cdot (1-j \cdot x_s)^{n-2} \cdot dx_s \quad \dots\dots\dots (22)$$

($s=1, 2, \dots, n-1$)

ここに, $f_n(x_s)$ は x_s の確率密度関数である。

以上に最大配分率 x の一般的な分布式が得られたわけである。すなわち (21) 式, (22) 式は, x_s のかわりに x で表わすと, たとえば $n=4$ のときはつぎのようになることを意味している。

まず, (21) 式は,

$$\begin{aligned} 1-F_4(x) &= 4(1-x)^3 && \text{(for } 1 \geq x > 1/2) \\ &= 4(1-x)^3 - 6(1-2x)^3 && \text{(for } 1/2 \geq x > 1/3) \\ &= 4(1-x)^3 - 6(1-2x)^3 + 4(1-3x)^3 && \text{(for } 1/3 \geq x > 1/4) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (23)$$

つぎに, (22) 式の $f_n(x)$ は,

$$\begin{aligned} f_4(x) &= 12(1-x)^2 && \text{(for } 1 \geq x > 1/2) \\ &= 12(1-x)^2 - 36(1-2x)^2 && \text{(for } 1/2 \geq x > 1/3) \\ &= 12(1-x)^2 - 36(1-2x)^2 + 36(1-3x)^2 && \text{(for } 1/3 \geq x > 1/4) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (24)$$

この $F_n(x)$, $f_n(x)$ を $n=2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$ について図示したものがそれぞれ Fig. 1, Fig. 2 である。Fig. 2 から明らかなように, x の mode は n が大きくなるにつれて小さくなり, 尖度は n とともに大きくなる。

つぎに, 最大配分率 x の期待値, 分散等の分布特性値が n とともにどのように変化するかを調べてみよう。

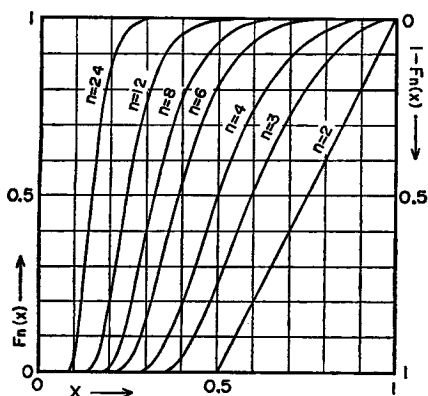


Fig. 1 Distribution functions of x for n , where x represents the maximum one among n ratios of randomly distributed quantity into n equal sections to the total.

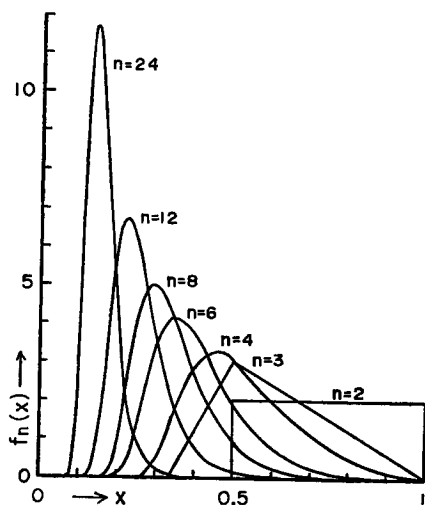


Fig. 2 Probability density functions of x for n .

II) 分布特性値

1) 期待値の一般式

まず箱の数, すなわち期間 T の分割数が n のときの最大配分率 x の期待値 $E_n(x)$ の一般式を求めよう。

$E_n(x)$ は $f_n(x)$ の原点のまわりの 1 次の積率であり、 $1 \geq x \geq 1/n$ であるから、つぎのように表わされる。

$$E_n(x) = \int_{1/n}^1 f_n(x) \cdot x \cdot dx \quad \dots\dots\dots (25)$$

しかし、 $f_n(x)$ は x の範囲によって関数形が異なるためこの値は簡単には得られない。そこで、つぎのような値 A_j を定義する。

$$A_j = (-1)^{j+1} \cdot j \cdot (n-1) \cdot \binom{n}{j} \int_{1/n}^1 x \cdot (1-j \cdot x)^{n-2} \cdot dx \quad \dots\dots\dots (26)$$

すると、 $E_n(x)$ は、(24) 式を参考にすればわかるように、つぎのように表わせる。

$$E_n(x) = \sum_{j=1}^{n-1} A_j \quad \dots\dots\dots (27)$$

この A_j は、 $j \cdot x = X$ とおくことによって、

$$A_j = (-1)^{j+1} \cdot \frac{(n-1) \cdot \binom{n}{j}}{j} \int_{1/n}^1 X \cdot (1-X)^{n-2} \cdot dX = \frac{(-1)^{j+1}}{n \cdot j} \cdot \binom{n}{j} \cdot \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{n-1} \cdot \left((n-1) \cdot \frac{j}{n} + 1\right) \quad \dots\dots\dots (28)$$

となる。すなわち $E_n(x)$ は (27) 式に (28) 式を代入して得られる。

2) 分散の一般式

分割数 n のときの x の分散 σ_n^2 は、 x の原点に関する 2 次の積率 $E_n(x^2)$ と $E_n(x)$ によってつぎのように表わせる。

$$\sigma_n^2 = E_n(x^2) - E_n^2(x) \quad \dots\dots\dots (29)$$

したがって $E_n(x^2)$ を求めればよい。そこでつぎのような B_j ,

$$B_j = (-1)^{j+1} \cdot j \cdot (n-1) \cdot \binom{n}{j} \int_{1/n}^1 x^2 \cdot (1-j \cdot x)^{n-2} \cdot dx \quad \dots\dots\dots (30)$$

を定義すると、つぎの関係が成り立つ。

$$E_n(x^2) = \sum_{j=1}^{n-1} B_j \quad \dots\dots\dots (31)$$

この B_j は、 $j \cdot x = X$ とおくことによってつぎのようになる。

$$B_j = (-1)^{j+1} \cdot \frac{(n-1) \cdot \binom{n}{j}}{j^2} \int_{1/n}^1 X^2 \cdot (1-X)^{n-2} \cdot dX$$

$$= \frac{(n-1) \cdot \binom{n}{j}}{n(n+1) \cdot j^2} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{n-1} \cdot \left\{n(n-1) \left(\frac{j}{n}\right)^2 + 2(n-1) \cdot \frac{j}{n} + 2\right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

すなわち、(29) 式に (31) 式と (28) 式を代入して σ_n^2 が一般的に求められる。

3) 分布特性値の n による変化

以上に示したように、 $E_n(x)$ と σ_n^2 は直接求めることができるが、分割数 n に対する x の mode および median 等は直接求めることができず、数値計算によらなければならない。Fig. 3 は $E_n(x)$, median, mode および $E_n(x) \pm \sigma_n$ をそれぞれ、 $n=2, 3, \dots, 25$ に対して図示したものである。明らかに $E_1(x)=1$, $\sigma_1=0$ であり、 $n=2$ のときは mode は存在しない。この図から期待値 $E_n(x)$ は median よりわずかに大きく (ただし $n=2$ のときは等しい)、また median は mode より大きいことがわかり、当然のことながらこれらの値は n の増加とともに単調減少をするが、その減少率は小さくなることがわかる。Fig. 4 は変動係数、すなわち標準偏差 σ_n の $E_n(x)$ に対する比率を%で表わしたものを、 $n=2, 3, \dots, 25$ について示したものである。この図から、変動係数は $n=10$ で最大値 (27.07%) をとるまで単調増加をするが、それより n が大きくなると緩慢な単調減少をすることがわかる。

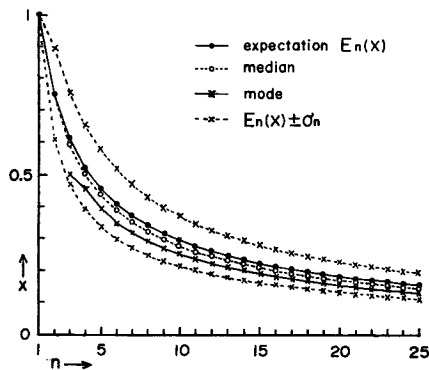


Fig. 3 Variation of the characteristic values of the distribution of x with n .

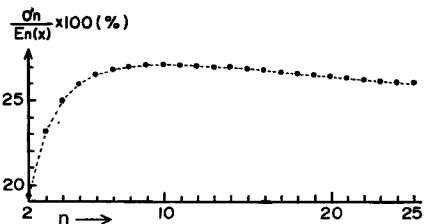


Fig. 4 Variation of percentage of the standard deviation σ_n to the expectation $E_n(x)$ with n .

2.4 他の配分率の分布について

I) 順位配分率の分布について

以上に最大配分率の分布を完全に得たわけであるが、2 番目、3 番目、……に大きい配分率といった順位づけられた配分率それぞれの分布がどのようになるかも興味ある問題である。そこで、まず 2 番目に大きい配分値について、2.3 の I) と同様な考察を行なったわけであるが、その結果、(6) 式、(9) 式等に対応する一般式は得られたが、その形は (10) 式の応用ができないものであるため、(17) 式あるいは (18) 式に対応する式が非常に複雑になり、そのため、(21) 式あるいは (22) 式に対応する配分率の分布式は得られなかった。3 番目、4 番目、……となるとさらに複雑になり、結局、順位 i ($i \geq 2$) の配分率の分布は現在のところ一般的には得られていない。しかし、最小配分率 (順位 n) の分布は比較的容易に得られたので、つぎにその誘導過程と結果を示そう。

II) 最小配分率の分布

いま、最小配分値を u 、すなわち、

$$\min(r_1, r_2, \dots, r_n) = u \quad (33)$$

とすると、 u のとり得る範囲は明らかに $[r/n] \geq u \geq 0$ である。

まず、最小配分値が u 以上となる場合の数 $D_u(n, r)$ を求めよう。これはつぎのように考えれば簡単に求まる。すなわち、最小配分値が u 以上であるということは、 n 個の箱すべてにかならず最低 u 個のボールが含まれていることを意味し、配分方法の区別は、残りの $r - u \cdot n$ 個のボールが各 u 個ずつボールを含んだ n 個の箱にどのように配分されるかでつけられる。したがって (2) 式の表現を用いれば、

$$D_u(n, r) = A(n, r - u \cdot n) = \binom{r - (u-1)n - 1}{n-1} \quad (34)$$

となる。最小配分値が u 以上となる確率はこれを $A(n, r)$ で除したものであるが、それを連続形式で表わすため $u/r = y$ とおき、 $r \rightarrow \infty$ の極限をとると、

$$1 - G_n(y) = (1 - ny)^{n-1} \quad (35)$$

ここに、 $G_n(y)$ は分割数 n のときの最小配分率 y の非超過確率表をわし、 $1/n \geq y \geq 0$ である。この式を y で微分して y の確率密度関数 $g_n(y)$ がつぎのように得られる。

$$g_n(y) = n(n-1)(1-ny)^{n-2} \quad (36)$$

この式から、2.3 の II) で示したと同様な方法で y の期待値 $E_n(y)$ と分散 σ_{ny}^2 がそれぞれつぎのように得られる。

$$E_n(y) = 1/n^2 \dots\dots\dots (37)$$

$$\sigma_{ny}^2 = (n-1)/\{n^4(n+1)\} \dots\dots\dots (38)$$

2.5 期待値的ハイトグラフの一試案

以上に、期間 T の降雨量 r を T/n なる n 個の分割期間に配分する問題を、 r 個のボールを n 個の箱にランダムに配分する問題と考えると、結局その最大配分率および最小配分率の分布特性値を一般的に得たわけであるが、それらの中間の順位 $(2, 3, \dots, n-1)$ の配分率の分布については得られていない。もしこれらの分布特性値のうちとくに期待値が得られたなら、各順位の配分率の期待値を適当に並べて期待値的ハイトグラフが得られることになる。もちろんそれら n 個の期待値の並べ方は $n!$ 通りあるわけであるが、そのうち最も大きな洪水ピークを与えるようなものといった条件をつければ 1 つの並べ方が得られる。こうした観点から、順位配分率の期待値の近似的なものかもしれないが、つぎのようなものを提案しよう。

まず、順位 1 の配分率の期待値は最大配分率のそれ $E_n(x)$ に他ならない。つぎに順位 2 の配分率の期待値に対応するものとして、残りの値 $1-E_n(x)$ の残りの $n-1$ 個の分割期間への最大配分率の期待値 $(1-E_n(x)) \cdot E_{n-1}(x)$ を与える。順位 3 のものは前 2 者の残りの値の残りの $n-2$ 個の分割期間への最大配分率で対応させることにし、以下同様な操作を繰返すことによって順位 n まで対応させるわけである。一般に、順位 i の配分率の期待値に対応させる値を $z_n(i)$ とすれば、上記の関係はつぎのようになることを意味する。

$$z_n(i) = (1 - \sum_{j=1}^{i-1} z_n(j)) \cdot E_{n-i+1}(x) \dots\dots\dots (39)$$

$(i=1, 2, \dots, n)$

この $z_n(i)$ の例として、 $n=6, 12$ に対して示したものが **Table 1** である。この表に示すように、順位 n の値は (37) 式に示した最小配分率の期待値 $1/n^2$ ($n=6$ で 0.0278, $n=12$ で 0.0069) よりかなり小さくなっている。これは、最大配分率を先取りしていくからであって、一般に ($n=2$ の場合を除いて)、 $z_n(i)$ は正しい順位配分率の期待値に比して、順位 i ($i=1$ を除く) が小さいところでは大きめの値を与え、中ほどでその関係が逆転するような値を与えと考える。

Table 1 Examples of $z_n(i)$, calculated by Eq. (39) for $n=6$ and 12.

order i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$z_6(i)$	0.4083	0.2702	0.1674	0.0942	0.0449	0.0150						
$z_{12}(i)$	0.2586	0.2035	0.1575	0.1196	0.0886	0.0638	0.0443	0.0293	0.0181	0.0102	0.0049	0.0016

この $z_n(i)$ を用いることにより、ある期間の雨量が与えられたとき、その期間の n 等分の期間を時間単位とするハイトグラフの期待値的なものが $n!$ 通り得られるが、そのうちの 1 つを選ぶ方法として、例えば、1 番大きい値を中心にしてその前後に交互に 2 番目、3 番目、……をつけ加えていくことが考えられるが、実用上問題が多く、こうした点については別の機会に検討したい。

3. 理論の検証と考察

ここでは、2. で確率論的に得た最大配分率の分布等、および理論的には得られなかった時間配分に関する他の興味ある二、三の分布を一連降雨の時間雨量記録の統計解析から求め、理論の検証と考察を行なう。

3.1 降雨資料の概要

こうした統計解析は、本来なら特定の地点ごとに、長年にわたる降雨資料について行なうべきかもしれないが、2.1 でも述べたように降雨量ではなくハイトグラフの形状については地域性はないと考えられ、また広域にわたるある特定の一連降雨についてその主な原因が、たとえば台風であっても前線や地形性の要因のためか、観測地点がある程度離れているとハイトグラフの形状が全く異なることが多いことに着目し、

観測地点別および降雨の原因別に分けて解析する必要はないと仮定した。この立場から、ここではつぎのような広域にわたる二、三の一連降雨の時間雨量資料を利用することにした。

まず観測地点であるが、これは木曽川水系の木曽川本川と飛騨川の合流点今渡より上流の流域 (約 4000 km²) 内に散在するもので、建設省、気象台、関西電力 K.K. および中部電力 K.K. の所管による合わせて約 100 箇所の時間雨量観測所の中から、有用な資料のあるところを適宜選び、これらの観測地点の区別を上記の理由から無視した取扱いをすることにした。

つぎに、解析の対象とした 12 時間および 24 時間連続降雨の資料は、つぎの 3 つの一連降雨から選んだ。すなわち、(a)昭和 28 年 7 月 17 日～21 日の梅雨前線によるもの、(b)昭和 34 年 9 月 25 日～27 日の伊勢湾台風によるもの、および(c)昭和 35 年 8 月 11 日～14 日の台風 11・12 号と不連続線によるものである。これから、無降雨期間がほとんどないという意味で有効な 12 時間あるいは 24 時間の連続降雨記録を各観測地点の時間的關係を無視して選んだわけである。これらの一連降雨は観測地点によっては、3 日～5 日間降り続いたため、24 時間連続降雨のデータなら 1 つの一連降雨から 3～5 個得られ、有用な地点数も数十個あるので全体としてかなり多いデータ数となる。なお、本研究の目的からは大雨のみを対象とすべきであるが、後に示すように雨量規模とハイトグラフの形状とは明確な関係が見出せないため、これらのデータの中には 24 時間雨量で 50 mm 以下のものも含まれている。

3.2 n 等分最大配分率と t 時間連続最大配分率の分布

2. で理論的に得た n 等分最大配分率の分布の検証をするためには、たとえば 24 時間連続降雨の 1 時間単位の高イトグラフのデータについては、つぎのようなことを調べればよい。すなわち、期間分割数 $n=2$ に対しては、24 時間降雨の 2 等分によって得られる 2 つの 12 時間雨量の大きい方 (R'_{12m}), $n=3$ のときは 3 等分によって得られる 3 つの 8 時間雨量のうちの最大値 (R'_{8m}), ……といった値 (R'_{tm} ; $t=12, 8, 6, 4, 3, 2, 1$) を 24 時間雨量 R_{24} で除したもののそれぞれの分布を調べればよい。しかし、われわれにとってより興味のあるのは、たとえば 24 時間雨量のうちの 2 時間連続最大雨量 (R_{2m}), 3 時間連続最大雨量 (R_{3m}), ……といった値 (R_{tm} ; $t=1, 2, \dots, 23$) を R_{24} で除したものの (t 時間連続最大配分率) の分布である。これについては理論的な分布は得られていないが、1 つの降雨について R_{tm} と R'_{tm} の間には一般に $R_{tm} \geq R'_{tm}$ (ただし $R_{1m} = R'_{1m}$) という関係があるので、この t 時間連続最大配分率の分布特性も調べ、 n 等分最大配分率のそれとの比較検討も行なう。

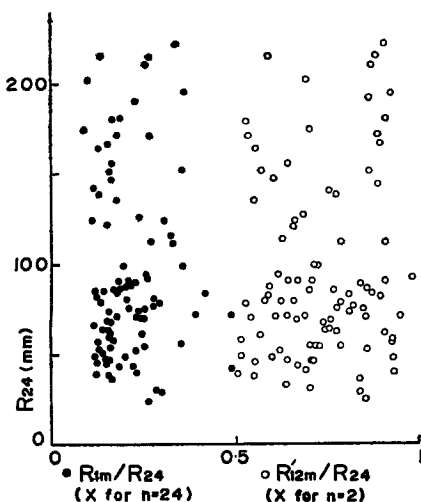


Fig. 5 Evidence of absence of correlation between R_{24} and R_{1m}/R_{24} (x for $n=24$) or R'_{12m}/R_{24} (x for $n=2$), where R_{24} represents rainfall amount of 24 hours, and R_{1m} represents the maximum 1-hour-rainfall in the 24-hours-rainfall, and R'_{12m} represents the greater rainfall amount between the first half and the second half of the 24-hours-rainfall.

は 3 等分によって得られる 3 つの 8 時間雨量のうちの最大値 (R'_{8m}), ……といった値 (R'_{tm} ; $t=12, 8, 6, 4, 3, 2, 1$) を 24 時間雨量 R_{24} で除したもののそれぞれの分布を調べればよい。しかし、われわれにとってより興味のあるのは、たとえば 24 時間雨量のうちの 2 時間連続最大雨量 (R_{2m}), 3 時間連続最大雨量 (R_{3m}), ……といった値 (R_{tm} ; $t=1, 2, \dots, 23$) を R_{24} で除したものの (t 時間連続最大配分率) の分布である。これについては理論的な分布は得られていないが、1 つの降雨について R_{tm} と R'_{tm} の間には一般に $R_{tm} \geq R'_{tm}$ (ただし $R_{1m} = R'_{1m}$) という関係があるので、この t 時間連続最大配分率の分布特性も調べ、 n 等分最大配分率のそれとの比較検討も行なう。

Fig. 5 は一連降雨(a)から選んだ 94 個の 24 時間降雨のデータについて、 n 等分最大配分率 R'_{tm}/R_{24} と R_{24} の関係を、 $t=1$ (黒丸印; $n=24$ に対する x) および $t=12$ (白丸印; $n=2$ に対する x) について示したものであり、これらの間には明確な関係が見出せない。また、ここには示さないが、他の t に対するものも同様であり、さらに R_{tm}/R_{24} と R_{24} の関係もほぼこれらと同じ傾向であった。このことは、こうしたデータ解析に際し、 R_{24} の大きさによる区別の必要がない

ことを示唆している。同様に、Fig. 6 は、3つの一連降雨 (a), (b) および (c) からほぼ同数ずつ選んだ計 200 個の 12 時間降雨のデータについて、 R_{1m}/R_{12} と R_{12} の関係を示したものであり、やはりあまり明確な関係がないことがわかる。ただ、 R_{12} が 50 mm 程度より小さいところの方が、 R_{1m}/R_{12} が比較的に大きな値をとり易いという結果になっているが、このことが両者の関係を暗示するものであるともいいきれない。また、Fig. 7 は Fig. 6 から得た R_{1m}/R_{12} の 0.05 間隔のヒストグラムであり、図中点線で示したものは、 $n=12$ に対して (22) 式から得た理論値である。この程度のデータ数では十分であるとはいえないため結論を下すことは早計かもしれないが、ほぼ適合しているといえよう。他の場合のヒストグラムはここには示さないが Fig. 7 と大同小異の適合度を示す。そこで、つぎにこれらの分布の平均値および標準偏差を理論値と比較したわけであるが、その結果を Fig. 8 に示す。ここに、(a), (b) はそれぞれ前述の 24 時間降雨、12 時間降雨のデータによるものであり、白丸印は n 等分最大配分率の平均値、掛け印はそれに標準偏差 σ を増減した値であり、それぞれに対応する理論値をそれぞれ実線と破線でつないで示してある。なお、半黒丸印は前述の t 時間連続最大配分率の平均値を示している。この図からつぎのことがわかる。

まず、 n 等分最大配分率については、その平均値、標準偏差ともほぼ理論値に近いが、平均値は n が大きい (t が小さい) ときは理論値より大きめの値をとり、 n が小さくなるにつれてその関係が逆転している。このことから、実際の降雨の時間配分過程はほぼランダムに近いとはいえるが、全くランダムであるとはいいきれないことがわかる。すなわちこの場合、 n が大きいときの最大配分率の平均値が理論値より若干大きいということは、降雨が 1~数時間に集中して多く降る傾向がわずかながらあるということを示唆しているといえよう。このことをさらに明確に示しているものとして Fig. 9 を示す。これは 3つの一連降雨(a), (b) および (c) からそれぞれほぼ同数ずつ選んだ計 120 個の 24 時間降雨のデータについて、 t 時間連続最大雨量 R_{tm} ($t=2, 3, \dots, 24$) に対してその各場合の 1 時間最大雨量 R_{1m} が占める比率の平均値 $\overline{R_{1m}/R_{tm}}$ (すなわち t 等分最大配分率の平均値) を求め、理論値 $E_n(x)$ ($n=2, \dots, 24$) と比較したものである。この図は、 t が小さい場合、

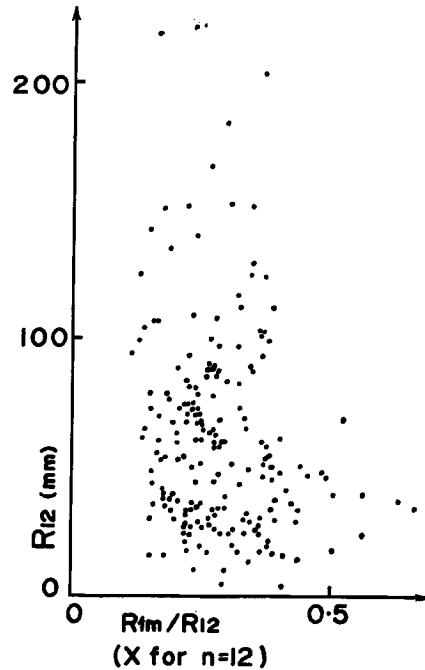


Fig. 6 Evidence of absence of correlation between R_{12} and R_{1m}/R_{12} (x for $n=12$), where R_{12} represents rainfall amount of 12 hours, and R_{1m} represents the maximum 1-hour-rainfall in the 12-hours-rainfall.

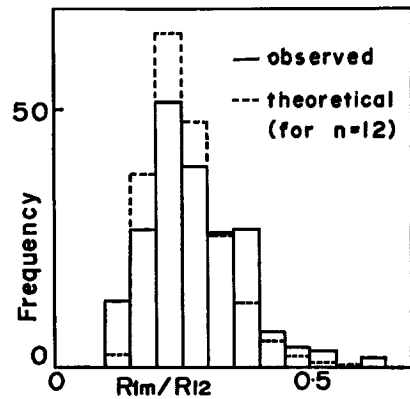


Fig. 7 Comparison between the histogram of R_{1m}/R_{12} in Fig. 6 and the theoretical one. (for $n=12$)

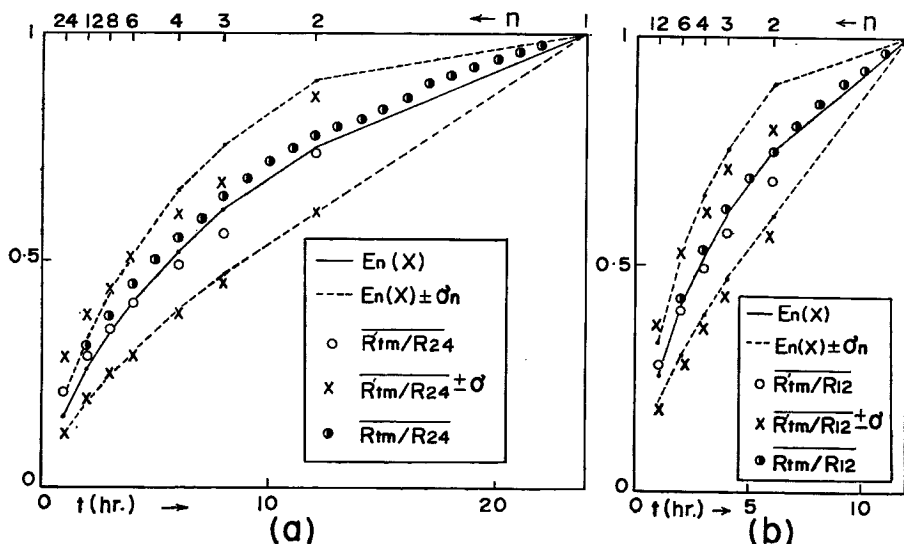


Fig. 8 Comparison between the theoretical values and the observed ones. Bar means averaged one, and R_{tm} represents the maximum t -hour-rainfall in the 24(or 12)-hours-rainfall.

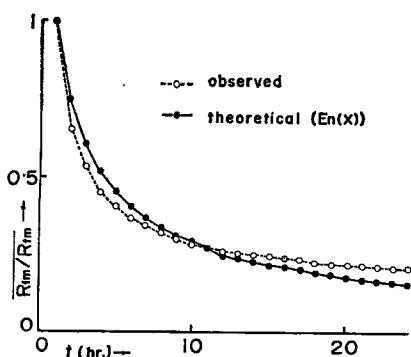


Fig. 9 Comparison between the theoretical mean $E_n(x)$ and the observed one. R_{1m}/R_{tm} corresponds to x for $n=t$.

実測値は理論値より小さく、 $t=11$ でほぼ等しくなって t がそれより大きいと実測値の方が大きいことを示している。このことは、 $t < 11$ の場合のたとえば $t=2$ あるいは 3 の場合を考えると、24 時間降雨のうちの 1 時間最大降雨とその前後の 1 時間降雨強度の間には正の相関が若干あることを示唆しており（こうしたことは、室田等⁸⁾によっても明らかにされている）、いいかえれば、各 1 時間降雨量相互の差が比較的小さいことが多いことを示していると解釈でき、一方、 $t > 11$ の場合のたとえば $t=24$ の場合を考えると、このような比較的長い時間中絶え間なく激しい雨が降り続くことはわりに少なく、短時間に集中的に降ることが比較的に多いことを意味しているものと解釈できよう。なお、 $t=11$ で理論値とほとんど等しいということは、

11 時間連続最大降雨の 1 時間ごとの時間配分がかなり

ランダムに近いと解釈するのは早計かもしれないが、この $t=11$ という値は降雨の平均的周期といった何か物理的な意味があると思われる。しかしこの点については今のところ明らかではない。

つぎに、 t 時間連続最大配分率の平均値であるが、先の Fig. 8 に示したように、これは t の増加とともに滑らかな増加を示し、かつ常に $E_n(x)$ よりわずかながら大きい値をとっている。ことに (b) 図の場合は n 等分最大配分率よりもむしろこの方が $E_n(x)$ に近いという興味ある結果となっているが、この、消極的ではあるが、1 つの原因は、むしろデータとしての 12 時間降雨の選び方にあると考えられる。すなわち、12 時間連続降雨を選び出す場合、なるべく無降雨の期間がないものを選んだわけであるが、そのため主降雨が

中程にくることが比較的多く (12 時間程度の周期が比較的多かったのかもしれない), R'_{6m}/R_{12} ($n=2$ に対する x) の値が 0.5~0.6 の近くに比較的多く集まったため $\overline{R'_{6m}/R_{12}}$ が理論値 (0.75) よりかなり小さくなったと考えられる。なお, t 時間連続最大配分率の平均値自体が $E_n(x)$ に近い積極的な理由については、いまのところ明らかではない。

3.3 順位配分率の分布

たとえば, 24 時間降雨のハイトグラフで分割数 $n=24$ すなわち 1 時間雨量の大きい方からの順位 i の値を $R_{1\cdot i}$ ($i=1, 2, \dots, 24$; 配分値が同じでも異なる順位をつけることによりつねに 24 までである) とすると, 2.4 あるいは 2.5 で述べた順位配分率は $R_{1\cdot i}/R_{24}$ と表わせる。Fig. 10 は, 24 時間降雨のデータ (Fig. 5

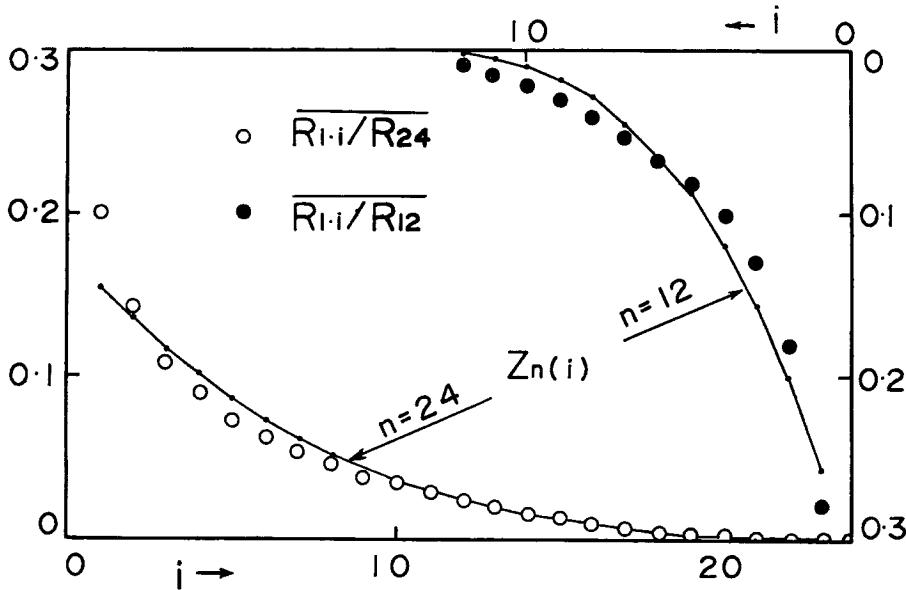


Fig. 10 Comparison between $z_n(i)$ (calculated by Eq. (39)) and $\overline{R_{1\cdot i}/R_T}$ ($T=12$ and 24), where $R_{1\cdot i}$ represents 1-hour-rainfall of the order i ($i=1, \dots, T$) in magnitude among T 1-hour-rainfalls.

に示したと同じもの) および 12 時間降雨のデータ (Fig. 6 に示したと同じもの) について, それぞれ得られた順位 i の配分率の平均値 $\overline{R_{1\cdot i}/R_{24}}$ および $\overline{R_{1\cdot i}/R_{12}}$ を示したものであるが, 同時に, 比較のために, 2.5 で提案した (39) 式で与えられる $z_n(i)$ の値を $n=24$ および $n=12$ について示してある。理論上は一致すべき $i=1$ のときの値が, 前に示したように実測値の方が大きめになることを除けば, 傾向としてほぼ 2.5 で予想した通りの値をとっているといえる。なお, この図ではわかりにくい $\overline{R_{1\cdot 24}/R_{24}}$ および $\overline{R_{1\cdot 12}/R_{12}}$ はそれぞれ, 最小配分率の期待値 $1/24^2$ および $1/12^2$ に, $z_{24}(24)$ および $z_{12}(12)$ に比してずっと近い値をとっていることも予想通りである。

4. あとがき

わが国の洪水調節用ダム (群) の最適操作にとってハイトグラフの予測は必須であるが, 現在のところそれは不可能に近く, ただ, ごく近い将来の短期間 (数時間~1 日程度) の面積平均的雨量なら, 精度に問題があるにせよ予測可能とされている。このことを最大限に利用するためには, そうした短期間の総雨量の

その期間内の時間配分状況の統計的性質を明らかにしておくことが必要である。

本研究では主としてこの観点からつぎのようなことを行なった。まず、降雨の時間配分を、雨量をボール、分割期間を箱と考えたモデルにおきかえ、降雨の時間配分過程をランダムと仮定することにより、重要な情報の1つである等分最大配分率の確率分布の完全解 (22) 式を理論的に導き、その分布特性値を明らかにした。ついで、順位配分率の分布について述べるとともに等分最小配分率の確率分布の完全解 (36) 式を導き、さらに、等分最大配分率の期待値から順位配分率の期待値の近似的な値 (39) 式を提案した。最後に、木曾川水系の実測資料について、等分最大配分率、連続最大配分率および順位配分率等の分布を求め、理論値と比較した結果、実際の降雨の時間配分過程はほぼランダムに近いといえるが、全くランダムであるとはいきれず、短時間に集中する傾向が若干認められた。また、連続最大配分率の平均値は等分最大配分率の理論的期待値より、わずかに大きいだけであること等もわかった。

なお、ここで用いた降雨資料はいわば限られたものであるため、それから得られた諸分布の特性値が普遍性をもつかどうかは疑わしいため、今後さらに広範な資料について解析する必要がある。また、ここで論じたハイトグラフの形状の要素 (最大配分率等) はそれらが時間軸上のどの位置にくるかといった時間的流れに関する情報については何んら示さないため実用上問題が多く、今後こうした点を考慮した解析が必要である。

最後に、この研究に際し、気象学の観点からしばしば適切な御助言を頂いた当研究所後町幸雄助教授に深謝する次第である。なお、理論値の数値計算およびデータ解析は主として京都大学大型計算機センターで行なったことを記しておく。

付記：本文の投稿後に、最大配分率の確率分布の式、(21) 式と同じものが、すでに R.A. Fisher⁹⁾ によって発表されていることを知った。それは、調和解析における最大周期等の有意性のテストを目的として、多次元空間理論により求められたものである。なお、順位配分率の確率分布も投稿後に得たので別の機会に発表するつもりである。

参 考 文 献

- 1) 石原安雄・角屋 睦：雨量配分に関する確率論的研究，第5回水理研究会講演集，昭35.
- 2) たとえば，川畑幸夫編著：水文気象学，地人書館，昭36，pp. 17-29.
- 3) 岸保勘三郎：数値予報新講，地人書館，昭45，pp. 153-158.
- 4) 前出 2)，pp. 35-56.
- 5) Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and Its Applications, John Wiley & Sons, Inc., Vol. 1, 1957, pp. 36-37.
- 6) 前出 5)，pp. 39-40.
- 7) 前出 5)，pp. 42-93.
- 8) 室田 明・端野道夫・岩城正之：台風性降雨のシミュレーションに関する研究，土木学会第25回年次学術講演会講演集，第2部，昭45，pp. 181-184.
- 9) Fisher, R. A.: Tests of Significance in Harmonic Analysis, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. 125, No. 796, 1929, pp. 54-59.