

Swarm Oscillators ～結合振動子系の現代的問題～

田中 ダン *

福井大学 大学院工学研究科 知能システム工学専攻

実空間に分布し動的内部自由度を持つ素子の集団を考える。このような系は、細胞群、非平衡下の分子群など枚挙に暇がない程多様に偏在する。そこに通底する一数理構造を探索するべく、極力少ない仮定のもと、解析計算可能なミニマルモデルの一候補を模索、導出する。具体的には、走化性を示すリミットサイクル振動子の集合体に対し、振動子の超臨界 Hopf 分岐点近傍において中心多様体縮約を実行した。導出された数理モデルは、豊富な創発構造を呈する。また、このモデルはダイナミカルネットワークや流動的スピングラスと捉えることもでき、今後の発展が期待される。本稿の後半では、導出された数理モデルから見えてくる、結合振動子系の現代的問題を三つ紹介する。

考えたいのは、「素子内自由度と素子間相互作用とが、動的に競合する一般の状況」である。まず、ミニマムな前提設定を模索する。素子内ダイナミクスの最も単純なものの一つとして、リミットサイクル振動が挙げられる。そこで、単一の素子はなんらかのパラメータ変化で、超臨界 Hopf 分岐するとしよう。多数の素子が空間に分布しているとき、素子間相互作用の最も単純な候補の一つは、拡散場を介するものだろう。拡散場があるとき、その勾配を感じて素子が駆動するというのも合理的である。素子内自由度と素子間相互作用とが競合する場合に注目するので、必然的にこれらが同程度のオーダーを持つことが要求される。すなわち、超臨界 Hopf 分岐を含む多重臨界点に注目する。

この前提のみで、以下の標準形が導出できる。

$$\dot{A}_i = A_i - (1 + ic)|A_i|^2 A_i + \chi \mathcal{M}(\mathbf{r}_i), \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = -A_i^* \nabla \mathcal{M}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} + c.c. \quad (2)$$

ここで A_i と $\mathbf{r}_i$ は各々、素子 i の、Hopf 振動の複素振幅と位置座標である。 A_i^* は A_i の複素共役である。 $\mathcal{M}$ は素子の感じる局所平均場で、結合関数 G とともに次で定義される。

$$\mathcal{M}(\mathbf{r}) \equiv \sum_i A_i G(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}), \quad G(\mathbf{r}) \equiv \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^D} \frac{b e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}}}{\rho^2 + q^2}. \quad (3)$$

D は空間次元、 c は実定数、 χ 、 b 、 ρ は複素定数である。このモデルは、前提設定の単純さと対照的に、多様な創発構造を実現する。D.T., Swarm-Oscillators, 物性研究 **87-4**, 589 (2007) も参照されたい。

なお、空間は便宜的なもので、 $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ をネットワーク上の素子 i 、 j 間のリンク強度と捉えれば、本モデルはダイナミカルネットワークそのものである。また、 χ を微小として、 A_i の Hopf 振動を位相記述すれば、流動的なスピングラス系とも捉えられる。一様振動からの位相のズレを ψ_i とすれば、以下の表式が得られる。 $(D \geq 2$ では下式は近似式である。)

$$\dot{\psi}_i = \sum_{j \neq i} e^{-|\mathbf{R}_{ji}|} \sin(\Psi_{ji} + \alpha |\mathbf{R}_{ji}| - c_1), \quad (4)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_i = c_3 \sum_{j \neq i} \hat{\mathbf{R}}_{ji} e^{-|\mathbf{R}_{ji}|} \sin(\Psi_{ji} + \alpha |\mathbf{R}_{ji}| - c_2). \quad (5)$$

ここで、 $\mathbf{R}_{ji} \equiv \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ 、 $\hat{\mathbf{R}}_{ji} \equiv \mathbf{R}_{ji}/|\mathbf{R}_{ji}|$ 、 $\Psi_{ji} \equiv \psi_j - \psi_i$ である。 α 、 c_1 、 c_2 、 c_3 は系の詳細が繰り込まれた実パラメータである。

結合振動子系の現代的問題

- 位相応答関数の高調波の影響：縮約の際、超臨界 Hopf 分岐直後であることを仮定した。このため、パラメータ α 、 c_1 、 c_2 、 c_3 は総て、縮約元の走化性モデルに含まれる各任意関数から解析的に決定できる。このお蔭で、パラメータの物理的意味を解釈し易くもなる。その代償として、位相応答関数が高調波を含まないものとなる。高調波は、分岐点から離れリミットサイクル軌道が Stuart-Landau 型から離れることにより、系固有の軌道に変形することから生じる。超臨界 Hopf 分岐直後という制約を外し、元の走化性モデルから直接位相縮約すれば、位相応答関数は高調波を持つことになる。この高調波の影響は、大同氏、Crawford 氏らが十年程前に着目した。多クラスター同期や同期制御など、中尾氏、郡氏らにより新たな解析も進みつつあり、現代的トピックの一つである。
- 相互作用の時間遅れ：パラメータ α は、素子間相互作用を担う拡散性化学物質の時定数から生じる。この時定数が零でない場合にのみ、 α も零ではなくなる。これについては、D.T., Phys. Rev. E **70**, 015202(R) (2004) も参照されたい。上述の位相方程式にみられるように、 α は波数の次元を持つ。つまり、素子間相互作用に時間遅れがあることによって、一つの空間スケールを生んでいる。日常生活では「遅れ」という語には、マイナスなイメージが付きまとう。しかし、相互作用の遅れ、すなわち、情報伝達の遅れが、創発構造の豊富さに効いているのである。このような、時間遅れの積極的な意義についても、フィードバック系などで議論されている現代的トピックである。
- Oscillator Gauge Glass Model：一般的な走化性振動子系から、縮約を経て、簡潔な位相モデルが導出できた。これにより、幾つかの解析計算も可能ならしめた。しかし実はこのモデルは、簡潔であっても簡単ではない。例えば、素子の空間自由度を静止させた場合、系は $\psi_i = \sum_{j \neq i} K_{ij} \sin(\psi_j - \psi_i + \alpha_{ij})$ で記述される。近年、一宮氏が $\alpha_{ij} = 0$ の場合を経路積分法によって解析し、注目を集めた。また同氏は、 $\alpha_{ij} = \text{const.} \neq 0$ の場合への一般化を試みている。まして、本稿で紹介した α_{ij} が分布する場合の解析は、未開拓な現代的トピックである。

This work was partially supported by a Grant-in-Aid for Young Scientists (Start Up), No.18840020, 2006, from the Japanese Ministry of Education, Science, Sports and Culture.

[1] D. T. , *General Chemotactic Model of Oscillators*, Phys. Rev. Lett., **99** 134103 (2007).

* Corresponding author: dan@u-fukui.ac.jp, dan@ton.scphys.kyoto-u.ac.jp, 0776-27-8795