

A twisted adjoint L-value of an elliptic modular form

立命大・理工 後藤桂治 (Keiji Goto)

本稿の主題は twisted adjoint L-value に関する
「土井 - 肥田 - 石井の予想」とその新しい実例を一つ紹介
するものである。主な引用文献は以下の二つ:

[DH I] Ooi - Hida - Ishii, Inv. Math. 134 (1998), 547-577.

[G] K. Goto, J. Number Theory 73 (1998), 34-46.

1) twisted adjoint L-function の定義と性質

$N \equiv 1 \pmod{4}$ である素数とし, $\mathbb{Q}(\sqrt{N})$ v. 対応する character $\chi = \left(\frac{N}{\cdot}\right)$ とする (Legendre symbol). 今, weight k , level 1 (resp. N with χ) の normalized Hecke eigenforms (単 v. "primitive form" ともいい, その一つを $f(z)$ とする) の張る空間を $S_k(1)$ (resp. $S_k(N, \chi)$) で表わし, "Haupt" (resp. "Neben") space と呼ぶことにする。

$$\sum a_n \neq 0, \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi i n z} \quad (z \in \mathbb{H}: \text{上半平面})$$

た。 Fourier 展開 χ に対して, "twisted adjoint L-function"

を以下のように定める:

$$L(\lambda, \text{Ad}(f) \otimes \chi) := \prod_{p: \text{prime}} \left\{ (1 - \chi(p) \alpha_p \beta_p^{-1} p^{-\lambda}) (1 - \chi(p) p^{-\lambda}) \right. \\ \left. (1 - \chi(p) \alpha_p^{-1} \beta_p p^{-\lambda}) \right\}^{-1}.$$

$$\text{すなわち, } \alpha_p + \beta_p = a(p), \quad \alpha_p \beta_p = \begin{cases} p^{k-1} & (f: \text{Haupt}), \\ \chi(p) p^{k-1} & (f: \text{Neben}). \end{cases}$$

これは全 λ 平面に解析接続できて, 関数等式を与えることが知られている (Shimura, 1975; Gelbert-Jacquet, 1978)。
 ところで, いわゆる "Symmetric square L-function" と以下の関係にあることは容易にわかる:

$$L(\lambda, \text{Ad}(f) \otimes \chi) = \begin{cases} L(\lambda+k-1, \text{Sym}^2(f) \otimes \chi) \\ = \zeta_N(2\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) a(n^2) n^{-(\lambda+k-1)} & (f: \text{Haupt}) \\ L(\lambda+k-1, \text{Sym}^2(f)) \\ = \zeta_N(2\lambda) \sum_{n=1}^{\infty} a(n^2) n^{-(\lambda+k-1)} & (f: \text{Neben}) \end{cases}$$

すなわち, $\zeta_N(\lambda)$ は (の Euler 積)

$\overbrace{\text{Riemann zeta-function}}^{\text{Riemann zeta-function}}$ が N -factor をおそわっている。

我々が "twisted adjoint L-value" と呼んでいるものはこの関数の $\lambda=1$ における値であり, これに関して以下の基本的な事実が知られている:

(twisted adjoint L -value の代数性)

$$\frac{L(1, \text{Ad}(f) \otimes \chi)}{\pi^{k+2} \langle f, f \rangle} \in \overline{\mathbb{Q}} \quad \text{for } f \begin{cases} \text{Neben (Sturm, 1980; Zagier, 1977),} \\ \text{Haupt (Sturm, 1989).} \end{cases}$$

ここで, $\langle *, * \rangle$ はいわゆる "Peterson 内積" である。

この値 ($=: \chi(f)$ とおく) の数論的性質に関する予想が

「土井 - 肥田 - 石井の予想」である; Neben に対する計算例が [DH1] に 13 個あり, すべて "予想" を support している。私の結果の新しい点は, Haupt の計算例を初めて (→ だけ!) 与えたところにある。

$L(1, \text{Ad}(f))$ については, 80年代の肥田晴三先生の一連の研究があり, その結果は [DH1] で次のように要約されている: (Hida, 1981 ~)

「 p : prime ≥ 5 for which f is "p-ordinary"

$\Rightarrow \{ \text{congruence primes of } f \}$

$= \{ \text{prime factors of the algebraic part of } L(1, \text{Ad}(f)) \}.$

$L(1, \text{Ad}(f))$ が Fermat 予想の解決において本質的役割を果たしていることはよく知られているが, 次の対象として $L(1, \text{Ad}(f) \otimes \chi)$ の数論的性質を調べることは自然であると思われる。

2) "予想" の定式化 (weaker version)

便宜上, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{N})$ の乗数類数 $= 1$ とし, F 上の $\mathbb{Z}$ -weight (k, k) , level (1) の Hilbert cusp forms の $\mathbb{Z}$ -空間を $\mathcal{H}_{(k, k)}$, "F-proper" $\mathbb{Z}$ -sub-space を $\mathcal{H}_{(k, k)}^\circ$ と表わす。
つまり, $\mathbb{Q}$ からの lifting map v の $\mathbb{Z}$ -image を $^\circ$ とすると,

$$\mathcal{H}_{(k, k)} = \widehat{S_k(1)} \oplus \widehat{S_k(N, \chi)} \oplus \mathcal{H}_{(k, k)}^\circ.$$

$$\textcircled{2.3} \left\{ \begin{array}{l} N=5 \Rightarrow \mathcal{H}_{(k, k)}^\circ \neq \{0\} \text{ if } k \geq 20; \\ N=257 \Rightarrow \mathcal{H}_{(k, k)}^\circ \neq \{0\} \text{ if } k \geq 2. \end{array} \right.$$

今, $\mathcal{H}_{(k, k)}^\circ$ が $\mathbb{Q}$ 上の既約 (Hecke module として) と見做す ($\mathbb{Z}$ 上では $\mathbb{Q}$ とある! cf. [DHI]) ($\mathbb{Z}$ 上の Hecke eigen-form $\varphi = \sum_{0 \leq \xi \in \mathcal{O}^{-1}} c(\xi) \varphi e^{2\pi i \text{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(\xi z)}$ ($z \in \mathbb{C}$, φ は $F/\mathbb{Q}$ の different))
とすると, $\mathbb{Q}$ の "Hecke field" K_φ とする:

$$K_\varphi := \mathbb{Q}(c(\mathfrak{r}) \mid \mathfrak{r}: \text{integral ideal of } F),$$

$$K_\varphi^+ := \mathbb{Q}(c(p) \mid p: \text{rational prime}).$$

「土井-肥田-石井の予想」では, 以下の形で定式化すると
1.7 のものが成り立つ: (なお, $D(K_\varphi/K_\varphi^+)$ は "相対判別式" のこと)

□ For f : primitive $\in S_k(1)$ or $S_k(N, \chi)$,

$$\text{the odd prime factors of } \left| \frac{\text{numerator of } \chi(f)}{D(K_\varphi/K_\varphi^+)} \right|. \quad \square$$

(註) [DH1] にあるのは、より一般的に F : real cyclic ext.
 に対して、Mida theory を使、2 定式化されている。
 なお、"分母" は $K_S := \mathbb{Q}(a_n \mid n \in \mathbb{N})$ の "判別式"
 である = 特殊現象、として見られる (cf. [DH1])。

3) 数値列 ($k=20$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ のとき)

このとき, $\dim \mathcal{X}_{(20,20)}^0 = 2$ であり, $K_F^+ = \mathbb{Q}$ となる。これ
 で, $D(K_F/K_F^+) = 5 \cdot \underline{977} \cdot 67169$ である。norm の

一方, $\alpha(f) (= L(1, \text{Ad}(f) \otimes \chi) / \pi^{k+2} \langle f, f \rangle)$ の分子の奇素因子

$$= \begin{cases} 5, 67169 & \text{for } f: \text{Neben ([DH1])}, \\ \underline{977} & \text{for } f: \text{Haupt ([G])}. \end{cases}$$

(なお, $\dim S_{20}(1) = 1$, $\dim S_{20}(5, (\frac{5}{4})) = 8$ である。)

よって, 確かに「主 - 肥田 - する」の予想、が成立している。

(註) i) $D(K_F/K_F^+)$ の計算には Hilbert modular form に関する
 trace formula が使われており, class # = 1 の
 場合、限定している理由はここにある ("予想"自身
 は類数一般で定式化されている)。

ii) $\alpha(f)$ の計算方法に関しては [G] を参照。