

crossed productにおける非可換Hardy空間について

新潟大 理 齊藤吉助

§0. 作用素環の解析性の研究は、最近、flowのspectral部分空間の理論を用いることにより、多くの興味のある結果を示している。Mはvon Neumann環、 $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ をM上の σ -weakly continuous automorphism groupとする。このとき、 $H^p(\alpha) = \{x \in M; S_{\alpha}(x) \subset [0, \infty)\}$ とおくと、もしもMが α -finiteならば、 $H^p(\alpha)$ はArveson [1]による非可換weak*-Dirichlet環として、定義されたmaximal subdiagonal環になることを示した([4], [5])。しかも $H^p(\alpha)$ の構造研究は素数環における単位円上のHardy空間 H^p の役割を果たすものとして重要であり、多くの解析的な性質をもっている。一方、単位円上のHardy空間 H^p の一般化として、Hilbert空間に値をもつ L^p -空間、あるいはvon Neumann環、特にIn-factorに値をもつ L^p -空間のHardy空間が定義された([3])。さらに、筆者([1])によって、Mがfinite von Neumann環のとき、非可換Hardy空間 $H^p(\alpha)$ が構成され、さらに、simply invariant subspaceとdoubly invariant subspaceの形の決定がなされた。しかしながら

5. このような状況で単位円上の Hardy 空間のもつ性質、特に、 H^∞ が $L^\infty(T)$ (T は単位円) で maximal σ -weakly closed algebra であることや、invariant subspace theorem を考えるのに、かなり一般的に思える。そこで、本講演では、finite von Neumann 環 M とその上の 1 の $*$ -automorphism α から生成される 2 個の crossed product の中に periodic flow から与えられる non-self adjoint σ -weakly closed subalgebra を考え、invariant subspace の形を考え、maximality などを議論する。

本講演の内容は、[5] である。これは、筆者が、1977年4月から6月にかけて、Iowa 大学を訪れ、Paul S. Muhly ととの学生 Mike McAsey と共同研究したものである。筆者は、Iowa 大学と Muhly に心から、謝意を表する。

§ 1. M を faithful, normal, normalized trace τ をもつ von Neumann algebra とする。Segal ([3]) の非可換積分論から、Hilbert 空間 $L^2(M, \tau)$ が定義でき、 M は $L^2(M, \tau)$ 上で作用しているとする。今、 α を M 上の $*$ -automorphism で $\tau \circ \alpha = \tau$ をみたすものとする。このとき、 $\alpha(x) = uxu^*$ ($\forall x \in M$) をみたす $L^2(M, \tau)$ 上の unitary operator u が存在する。そこで、 2 個の crossed product を定義するために、Hilbert 空間 L^2 を

$$L^2 = \{ f: \mathbb{Z} \rightarrow L^2(M, \tau) : \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|f(n)\|^2 < \infty \}$$

とおく。また

$$H^2 = \{ f \in L^2 : f(n) = 0 \ (\forall n < 0) \}$$

とおく。この H^2 は、非可換 Hardy 空間で、重要な役割を果たす。

今 $f \in L^2$, $x \in M$ に対して、

$$(L_x f)(n) = x f(n)$$

$$(R_x f)(n) = f(n) \alpha^n(x)$$

$$(L_S f)(n) = u f(n-1)$$

$$(R_S f)(n) = f(n-1) \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

とおくと、 L_x, R_x, L_S, R_S は L^2 上の有界線形作用素になる。

このとき、 $L \alpha(x) = L_S L_x L_S^*$, 又、 $R \alpha(x) = R_S R_x R_S^*$ をみたら、

また、簡単のため、 $\{L_x\}_{x \in M}$ を $L(M)$, $\{R_x\}_{x \in M}$ を $R(M)$ とおく。

このとき、 $\mathcal{L}$ を $L(M)$ と L_S によって生成された von Neumann 環

$\mathcal{R}$ を $R(M)$ と R_S によって生成された von Neumann 環とする。もちろん、よく知られているように、 $\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ は finite である。

また、 $\mathcal{L}$ の commutant は $\mathcal{R}$ に等しい ([15])。さらに、 $\mathcal{L}_+$ を

$L(M)$ と L_S によって生成された $\mathcal{L}$ の σ -weakly closed subalgebra

$\mathcal{R}_+$ を $R(M)$ と R_S によって生成された $\mathcal{R}$ の σ -weakly closed subalgebra

とする。一方 $\forall f \in L^2$, に対して、

$$(W_t f)(n) = e^{int} f(n) \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

とおくと、 $\beta_t(x) = W_t x W_t^*$ ($x \in \mathcal{L}$) により、 $\mathcal{L}$ 上の周期2元

の σ -weakly continuous automorphism group $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ が定義できる。今、

$$\mathcal{L}_n = \{x \in \mathcal{L} : \beta_t(x) = e^{-int} x \quad (\forall t \in \mathbb{R})\}$$

とおく。又、 $\forall n \in \mathbb{Z}$ に対して、

$$\varepsilon_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \beta_t(x) dt \quad (x \in \mathcal{L})$$

とする。このとき、

$$\varepsilon_n(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_n = L(M) L_f^n$$

が成り立つ。さらに、 $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して、

$$\beta(f)x = \int_{-\infty}^{\infty} \beta_t(x) f(t) dt \quad (\forall x \in \mathcal{L})$$

とおくと、 x の spectrum $\text{Sp}_\beta(x)$ を $\bigcap_{\beta(t)x=0, f \in L^1(\mathbb{R})} \{t \in \mathbb{R} : \hat{f}(t)=0\}$ ($\hat{f}$ は f の Fourier 変換) とおくとき、

$$H^\infty(\beta) = \mathcal{L}_+ = \{x \in \mathcal{L} : \text{Sp}_\beta(x) \subset [0, \infty)\}$$

で、 $\mathcal{L}_+$ は $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ によって与えられる非可換 Hardy 空間である。しかも、 ε_0 は $\mathcal{L}$ から $\mathcal{L}_0 (= L(M) = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_+^*)$ の $\perp$ への β_t -invariant ε faithful normal projection of norm one である。

今、 ε を von Neumann 環 $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}$ の中への faithful normal projection of norm one とする。 $\mathcal{B}$ が 単位元をもつ σ -weakly closed subalgebra $\mathcal{O}$ が、次の条件を満たすとき、 ε に属して、subdiagonal 環という。

(i) $\mathcal{O} + \mathcal{O}^*$ は $\mathcal{B}$ で σ -weakly dense である。

(ii) $\varepsilon(\mathcal{B}) = \mathcal{O} \cap \mathcal{O}^*$ で ε は $\mathcal{O}$ 上乗法的である。

また、 $\mathcal{O}$ が maximal といふ $\mathcal{O}$ を含む proper な ε に對して、 $\mathcal{B}$ の subdiagonal 環が存在しないときをいう。さらに $\mathcal{O}$ が finite といふ $\mathcal{O} \cap \varepsilon = \mathcal{O}$ をみたす $\mathcal{B}$ の faithful normal finite trace $\mathcal{F}$ が存在することをいう。

Proposition 1.1. ([4], [5], [10]). $\mathcal{L}_+$ は ε_0 に對して、 $\mathcal{L}$ の finite maximal subdiagonal 環である。

しかしながら、§3 で、 $\mathcal{L}_+$ が σ -weakly closed subalgebra として maximal になるかどうか議論する。よく知られているように $L^\infty(T)$ (T は単位円) の中の Hardy 空間 H^∞ は $L^\infty(T)$ の maximal σ -weakly closed subalgebra になり、すべての不変部分空間の形が決定されている。さらに、weak* Dirichlet 環の場合に maximality が Muhly [8] などによって、必要十分条件が調べられている。そこで、invariant subspace の形の研究において、maximality を調べることは重要であり、 $\mathcal{L}_+$ の maximality と invariant subspace の形を示すことを目標とする。

§2. この節では不変部分空間について調べる。

$\mathcal{M}$ を $\mathcal{L}^2$ の closed subspace とする。 $\mathcal{M}$ が left (or right)-invariant といふ $\mathcal{L}_+ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ (or $\mathcal{R}_+ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$) をみたし、 $\mathcal{M}$ が 2-sided

invariant とは. left かつ right-invariant のことをいう。

M が reducing とは $L(M) \subseteq M$. また M が pure とは

$\bigcap_{n \geq 0} L^n M = (0)$ をみたす. M が full とは $\bigcup_{n \geq 0} L^n M$ が L^2 で dense とする。

今 M を Laplace pure left-invariant subspace とする。 $\mathcal{F} = M \ominus L_1 M$ とおくと, $L(M)M \subseteq M$, $L(M)L_1 M \subseteq L_1 M$ であるから, $L(M)\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$. $\xi = \zeta$: P を L^2 から $\mathcal{F}$ の $\perp$ への projection とすると, $P \in L(M)'$. $\xi = \zeta$:

Theorem 2.1. M_1 と M_2 を L^2 の pure left invariant subspace とする。 P_i を L^2 から $M_i \ominus L_1 M_i (= \mathcal{F}_i)$ の $\perp$ への projection ($i=1,2$) とする。このとき $L(M)'$ において, $P_2 \preceq P_1$ ならば: $M_2 = VM_1$ をみたす $\mathcal{R}$ の partial isometry が存在する。

Proof. $L(M)'$ において, $P_2 \preceq P_1$ であるから, $P_2 = WW^*$, $W^*W \leq P_1$ をみたす $L(M)'$ の partial isometry W がある。 $K_i = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} L^n M_i$ は L を reduce するから, V を K_i 上で定義すればよい。 M_i は pure 故 $K_i = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L^n \mathcal{F}_i$ であるから

$$V\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} L^n \xi_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L^n W \xi_n \quad (\xi_n \in \mathcal{F}_1)$$

$$V|_{K_i^\perp} = 0$$

と定義すると, V は $\mathcal{R}$ の partial isometry かつ $M_2 = VM_1$ をみたす。 //

Corollary 2.2. M が factor, M が L^2 の pure left invariant

とする。このとき $M = VH^2$ をみたす $\mathcal{R}$ の partial isometry V が存在する。

Proof. P を L^2 から $M \ominus L_s M$ への projection. P_0 を L^2 から $H^2 \ominus L_s H^2$ への projection とする。 M は factor 故 $L(M)$ も factor. 従って, $P \leq P_0$ 又は $P \geq P_0$ が成り立つ。 $P \leq P_0$ ならば, Theorem 2.1 から, O.K. $P_0 \leq P$ ならば $H^2 = VM$ をみたす $\mathcal{R}$ の partial isometry V があつた。 L_s と V は可換故

$$VL^2 \supseteq V\left(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} L_s^n M\right) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} L_s^n VM = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} L_s^n H^2 = L^2$$

従つて, V は co-isometry. よって, $\mathcal{R}$ は finite 故 V は unitary operator. よって, $M = V^*H^2$ が成り立つ。 //

Corollary 2.3. $M = VH^2$ (V は $\mathcal{R}$ の partial isometry) とする。このとき, M が full であることと V が unitary operator であることは同値。

§3. この節では, $\mathcal{L}_+$ が $\mathcal{L}$ の maximal σ -weakly closed subalgebra になることと, invariant subspace の形が決定されることとの同値性を示す。

Theorem 3.1. 次の5つの条件は同値。

- (1) M は factor である。
- (2) $\mathcal{L}_+$ は $\mathcal{L}$ の maximal σ -weakly closed subalgebra である。

(3). H^2 の $\mathcal{A}$ の 2-sided invariant subspace は $VH^2 = WH^2$ (V は $\mathcal{R}$ の unitary operator, W は $\mathcal{L}$ の unitary operator) の形にかけらる。

(4). L^2 の $\mathcal{A}$ の non-reducing 2-sided invariant subspace は full か pure である。

(5). L^2 の $\mathcal{A}$ の pure-left invariant subspace は VH^2 (V は $\mathcal{R}$ の partial isometry) の形にかけ。かつ $(\mathcal{L}$ の center) $\cap$ ($L(M)$ の center) $= \{1\}$ をみたす。

今, α を M の identity automorphism とすると, $\mathcal{L}$ と $L^{\infty}(\mathbb{T}) \otimes M$ ($\mathbb{T}$ は 単位円) は同型, さらに $\mathcal{L}_+$ と $H^{\infty}(\mathbb{T}) \otimes M$ も同型になる。
 よって Theorem 3.1 から, 次の Corollary を得る。

Corollary 3.2. M は factor であることと $H^{\infty}(\mathbb{T}) \otimes M$ が $L^{\infty}(\mathbb{T}) \otimes M$ の maximal $\leftarrow$ -weakly closed subalgebra であることは同値。

さて, Theorem 3.1 の証明をうごたいが, 証明が長いので, この証明のなかで, 非常に困難な (1) $\Leftrightarrow$ (2) の証明をうごえる。
 そのため, 次の 4 つの Lemma を必要とする。

Lemma 3.3. $\mathcal{B}$ を finite von Neumann 環で, $\mathcal{O}$ を $\mathcal{B}$ に属する finite maximal subdiagonal algebra とする (従って, $\mathcal{B}$ 上に $\tau \circ \varepsilon = \tau$ をみたす faithful, normal, normalized trace τ が存在する)。このとき, もし, $k \in \mathcal{B}$ かつ $k^{\perp} \in L^2(\mathcal{B}, \tau)$ ならば $k = uy$ をみたす $\mathcal{O}$ の $\pi(y)$ と $\mathcal{B}$ の unitary operator u が

存在する。

この結果は Arveson [1, Theorem 4.2.1] を一般化したものである。すなわち、 $\mathcal{B}$ の regular element は $\mathcal{B}$ の unitary operator と、 $\mathcal{O}$ の regular element の積にかけることと示した。ここでは、その証明を直すことにより、示すものの、省略する。

Lemma 3.4. $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}$, τ を Lemma 3.3 の通りとする。 $\mathcal{C}$ を $\mathcal{O}$ を含む $\mathcal{B}$ の proper σ -weakly closed subalgebra とする。このとき、 $[\mathcal{C}]_2 \neq L^2(\mathcal{B}, \tau)$ 、但し $[\mathcal{C}]_2$ は $L^2(\mathcal{B}, \tau)$ における $\mathcal{C}$ の closure である。

Proof. $\mathcal{C}$ は $\mathcal{B}$ の proper σ -weakly closed subalgebra 故 $\tau(ax) = 0$ ($\forall x \in \mathcal{C}$) をみたす $L^2(\mathcal{B}, \tau)$ の元 $a (\neq 0)$ がある。 a の極分解を $a = |a|^* v = |a|^{\frac{1}{2}} |a|^{\frac{1}{2}} v$ とする。このとき、 $f(\lambda) = \begin{cases} 1 & (0 \leq \lambda \leq 1) \\ \frac{1}{\lambda} & (\lambda > 1) \end{cases}$ なる $[0, \infty)$ 上の有界な連続実数関数に対して、 $k = f(|a|^{\frac{1}{2}})$ とおく。このとき、 $k \in \mathcal{B}$ かつ、 $k^{-1} \in L^2(\mathcal{B}, \tau)$ がある。 $\Sigma = \mathcal{C}$ 。Lemma 3.3 から、 $k = uy$ をみたす $\mathcal{B}$ の unitary operator u と $\mathcal{O}$ の元 y がある。そして、 $k|a|^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{B}$ 故 $0 \neq ya = u^* k |a|^{\frac{1}{2}} |a|^{\frac{1}{2}} v \in L^2(\mathcal{B}, \tau)$

さらに、

$$(x, a^* y^*) = \tau(y a x) = \tau(a x y) = 0 \quad (\forall x y \in \mathcal{C})$$

よって、 $a^* y^* \in [\mathcal{C}]_2^\perp$ 。ゆえに、 $[\mathcal{C}]_2 \neq L^2(\mathcal{B}, \tau)$ //

Lemma 3.5. M を factor とする。 $\mathcal{B}$ を $\mathcal{L}_+$ を含む $\mathcal{L}$ の $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ -invariant σ -weakly closed subalgebra とする。このとき、 $\mathcal{B} = \mathcal{L}_+$ 又は、 $\mathcal{B} = \mathcal{L}$ 。

Proof. $\mathcal{B} \neq \mathcal{L}_+$ と仮定、 $\mathcal{B}$ は $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ -invariant 故、 $E_n(x) \in \mathcal{B}$ ($\forall x \in \mathcal{B}$)。 $\xi = \zeta$ 、 $\mathcal{B} \neq \mathcal{L}_+$ 故、 ある $n < 0$ に $\exists$ x 、 $E_n(x) \neq 0$ を満たす $x \in \mathcal{B}$ があつ。 従つて、 $E_n(x) = L_y L_s^n (y \in M)$ の形に可ける。 しかし、

$$L(M) L_y L(M) L_s^n = L(M) L_y L_s^n L(M) \subseteq \mathcal{B}$$

$L(M) L_y L(M)$ は $L(M)$ の 2-sided ideal 故 M は finite factor 故 M は algebraic simple。 従つて、 $L(M) L_y L(M) = L(M)$ 。 $\xi = \zeta$ 、 $L(M) L_s^n \subseteq \mathcal{B}$ 、 $L(M) \ni 1$ 故、 $L_s^n \in \mathcal{B}$ 。 $\xi = \zeta$

$$L_s^* = L_s^{-1} = L_s^n L_s^{-(n+1)} \in \mathcal{B}.$$

こゝから、 $\mathcal{B} = \mathcal{L}$ //

Lemma 3.6. M が factor で $\mathcal{L}$ が factor でないとする。このとき、 $\mathcal{Z}(\mathcal{L}) \cong L^0(\mathbb{T})$ 、 $\mathcal{Z}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}_+ \cong H^0(\mathbb{T})$ 、 但し、 $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ の center である。

Proof. M は factor で $L(M)$ は $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ に β_t して、 $\mathcal{L}$ の fixed point algebra 故、 $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ 上 ergodic である。 $\mathcal{L}$ は separable 故、 $\mathcal{Z}(\mathcal{L}) = L^0(X)$ (X はある standard Borel space)。この同型によつて、 $\{\beta_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ を $L^0(X)$ の $*$ -automorphism group とし考へる。 Mackey の定理 [6] から、

$$[B_t(\varphi)](x) = \varphi(x+t) \quad (\varphi \in L^1(X))$$

をみたす $\mathbb{R}$ から X 上の measurable action がある。但し、 x を t による translation を $x+t$ とかく。 $\{B_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は $\mathcal{L}$ 上 ergodic periodic 故 Rohlin [14] の結果から、 $X = \Pi$ (null set を除いて) でその対応によって、induced される measure は normalized Lebesgue measure になる。 Π 上の $\mathbb{R}$ の action は普通の rotation で $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}_+$ は non-negative spectrum をもつ function からなるから、これは $H^2(\Pi)$ と同型になる。 //

Proof of (1) $\Rightarrow$ (2) of Theorem 3.1.

$\mathcal{B}$ を $\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$ をみたす σ -weakly closed subalgebra とする。 Lemma 3.4 から、 $[\mathcal{B}]_2 \neq L^2$ 、明らかに $[\mathcal{B}]_2$ は 1 を含むから、non-reducing 2-sided invariant subspace である。今 $[\mathcal{B}]_2 = V H^2$ (V は $\mathcal{R}$ の unitary operator) を示せば十分。

実際 $V^*[\mathcal{B}]_2 = H^2$ より、

$$\begin{aligned} [\mathcal{B}]_2 &= V^* V [\mathcal{B} H^2]_2 = V^* [V \mathcal{B} H^2]_2 = V^* [\mathcal{B} V H^2]_2 \\ &= V^* [\mathcal{B} [\mathcal{B}]_2]_2 = V [\mathcal{B}]_2 = H^2 \end{aligned}$$

よって、 $\mathcal{B} = \mathcal{L}_+$ を得る。

$[\mathcal{B}]_2 = V H^2$ を示すには Corollary 2.3 から、 $[\mathcal{B}]_2$ は fullかつ pure を示せば十分。 $H^2 \subseteq [\mathcal{B}]_2$ 故、 $[\mathcal{B}]_2$ は full である。 $[\mathcal{B}]_2$ が pure を示すには、 $\mathcal{B}$ を含む $\mathcal{L}$ の proper σ -weakly closed subalgebra におきかえる必要がある。今、 $\mathcal{B} = [\mathcal{B}]_2 \cap \mathcal{L}$ とお

くと、 $\mathcal{B}$ は $\mathcal{B}[B]_2 \subseteq [B]_2$ をみたす $\mathcal{L}$ の proper σ -weakly closed subalgebra になる。何と云へば $[B]_2$ は non-reducing 故。
 $\mathcal{B}$ は $\mathcal{L}$ の proper subalgebra である。もちろん、 $\mathcal{B} \subseteq \widehat{\mathcal{B}}$ 。
 $L^2 \subseteq L^1$ 故。 $\mathcal{B}$ における σ -weakly に収束する net は L^2 の weak topology で収束する。 $[B]_2$ は L^2 で weakly closed 故。任意のこのような net は $[B]_2$ の中に極限をもつ。従って、 $\widehat{\mathcal{B}}$ は σ -weakly closed、さらに、 $\widehat{b} \in \widehat{\mathcal{B}}$ を固定して、

$$\mathcal{M} = \{ b \in [B]_2 : \widehat{b} b \in [B]_2 \}$$

とおくと、 $\mathcal{M}$ は $[B]_2$ の closed subspace で $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ 。従って、 $[B]_2 = \mathcal{M}$ 故。 $\widehat{b}[B]_2 \subseteq [B]_2$

さて、 $[B]_2$ が pure であることを示すために、 $P_\infty \in L^2$ から、 $\bigcap_{n \geq 0} L_n^\perp[B]_2$ の上への projection を取る。このとき、 $P_\infty = 0$ を示せばよい。 $\bigcap_{n \geq 0} L_n^\perp[B]_2$ は reducing subspace 故。 $P_\infty \in L' = \mathcal{R}$ 。さらに、 $[B]_2$ は R_f で invariant 故 $\bigcap_{n \geq 0} L_n^\perp[B]_2$ も R_f -invariant。そこで、 $R_f P_\infty R_f^* \leq P_\infty$ 。 R は finite であるから、 $R_f P_\infty R_f^* = P_\infty$ 。また $[B]_2$ は $R(M)$ を reduce するから、 $\bigcap_{n \geq 0} L_n^\perp[B]_2$ も reduce する。そこで、 $P_\infty \in \mathcal{L}$ 。以上より、 $P_\infty \in \mathcal{Z}(\mathcal{L})$ 。さらに、

$$P_\infty = P_\infty \cdot 1 \in P_\infty L^2 = \bigcap_{n \geq 0} L_n^\perp[B]_2 \subset [B]_2$$

よって、 $P_\infty \in \mathcal{Z}(\mathcal{L}) \cap \widehat{\mathcal{B}}$ が成り立つ。

今、 $\mathcal{L}$ が factor なら、 $P_\infty = 0$ で $[B]_2$ が pure がわかる。
 よって、 $\mathcal{L}$ が factor でないを仮定する。 $\mathcal{Z}(\mathcal{L}) \cap \widehat{\mathcal{B}}$ は $\mathcal{Z}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}_+$

を含む $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ の σ -weakly closed subalgebra である。 $\mathcal{E} = \mathcal{L}$ 。

Lemma 3.6 と $H^{\infty}(\mathbb{T})$ は $L^{\infty}(\mathbb{T})$ での maximal σ -weakly closed subalgebra であることから, (i) $\mathcal{Z}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{B} = \mathcal{Z}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}_+$ である (ii)。

$\mathcal{Z}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{B} = \mathcal{Z}(\mathcal{L})$ である。

Case (i) $P_{\mathcal{B}} \in \mathcal{Z}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{L}_+ \cong H^{\infty}(\mathbb{T})$ 故, $H^{\infty}(\mathbb{T})$ の function の support は 0 と 1 であるから, $P_{\mathcal{B}} = 0$ 。

Case (ii). $\mathcal{Z}(\mathcal{L}) \cap \mathcal{B} = \mathcal{Z}(\mathcal{L})$ 故 $\mathcal{B} \supset \mathcal{Z}(\mathcal{L})$ 。 $\mathcal{E} = \mathcal{L}$ だと $\mathcal{L}_+$ と $\mathcal{Z}(\mathcal{L})$ によって生成された $\mathcal{L}$ の σ -weakly closed subalgebra となる。 $\mathcal{L}$ は $\mathcal{L}_+ \subsetneq \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \subsetneq \mathcal{L}$ となる $\mathcal{L}$ の $\mathcal{B}$ -invariant subalgebra である。これは, Lemma 3.5 に 矛盾 //

Proof of (2) $\Rightarrow$ (1) of Theorem 3.1.

今 M が factor ではないと仮定する。 M の center $\in \mathcal{Z}(M)$ にかゝる $\mathcal{E}$ にする。

Case (i) α は $\mathcal{Z}(M)$ 上 ergodic ではないとする。 $0 < a < 1$ と異なる α -invariant projection $e \in \mathcal{Z}(M)$ がある。

$\mathcal{B} \in \mathcal{L}_+$ と $e \in \mathcal{L}$ によって生成された σ -weakly closed subalgebra とすると $\mathcal{B}$ は明らかに $\mathcal{L}_+$ に proper に含まれる $\mathcal{L}$ の σ -weakly closed subalgebra となる。

Case (ii). α は $\mathcal{Z}(M)$ 上 ergodic と仮定する。 $\mathcal{L}_+$ が not maximal を示すために, L^2 の non-reducing left-invariant subspace $\mathcal{M}$ として $\alpha \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ かつ, $\exists x \notin \mathcal{L}_+$ なる $\mathcal{M}$ の $\mathcal{E}$ を

とける。 α は $\mathcal{Z}(M)$ 上で ergodic 故 $e \perp \alpha^{-1}(e)$ 故 $\alpha^{-1}(e) \neq e$ 故 $e \in \mathcal{Z}(M)$ ではない。 今 $(E_n f)(m) = \begin{cases} f(m) & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases} \quad (f \in L^2)$ とおく。 このとき

$\mathcal{M} = \{ f \in L^2 : E_n f = 0 \ (n < -1), e E_{-1} f = E_{-1} f \}$ とおく。 このとき、 $L(M)\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$, $L_g \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ かつ $e \in \mathcal{Z}(M)$ として、 $L_+ \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ ではない。 $L_e L_g^* \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$, $- \bar{g}$. $L_e L_g^* \notin L_+$. 従って、 L_+ は maximal ではない。 //

REFERENCES

- [1] W. B. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math., 89(1967), 578-642.
- [2] W. B. Arveson, On groups of automorphisms of operator algebras, J. Funct. Anal. 15(1974), 217-243.
- [3] H. Helson and D. Lowdenslager, Prediction theory and Fourier series in several variables, Acta. Math., 99(1958), 165-202.
- [4] S. Kawamura and J. Tomiyama, On subdiagonal algebras associated with flows in operator algebras, J. Math. Soc. Japan, 29(1977), 73-90.
- [5] R. I. Loeb and P. S. Muhly, Analyticity and flows in von Neumann algebras, to appear in J. Funct. Anal.
- [6] G. Mackey, Point realizations of transformation groups, Illinois. J. Math., 6(1962), 327-335.

- [7] M. McAsey, P. S. Muhly and K. -S. Saito, Non-self adjoint crossed products, in preparation.
- [8] P. S. Muhly, Maximal weak*-Dirichlet algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 36(1972), 515-518.
- [9] V. A. Rohlin, Selected topics from the metric theory of dynamical systems, Amer. Math. Soc. Trans., 49(1966), 171-240.
- [10] K. -S. Saito, The Hardy spaces associated with a periodic flow on a von Neumann algebra, Tohoku Math. J., 29(1977), 69-75.
- [11] K. -S. Saito, On non-commutative Hardy spaces associated with flows on finite von Neumann algebras, to appear in Tohoku Math. J., 29(1977).
- [12] K. -S. Saito, On maximality of $H^\infty(\alpha)$ in finite von Neumann algebras, Sci. Rep. Niigata Univ. Ser. A, 14(1977), 1-3.
- [13] I. E. Segal, A non-commutative extension of abstract integrations, Ann. Math., 57(1953), 401-457.
- [14] M. Takesaki, The structures of a von Neumann algebras with a homogeneous periodic state, Acta. Math., 131(1973), 79-121.
- [15] M. Takesaki, Duality for crossed products and the structures of von Neumann algebras of type III, Acta. Math., 131(1973),

249-310.

- [16] G. Zeller-Meier, Sur produits croises d'une C^* -algebre par un groupe d'automorphismes, J. Math. Pure et Appli., 47 (1968), 101-239.