

Poisson方程式の数値計算

日本ビジネスオートメーション(株) 角谷 保

§1. まえがき

Poisson方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2.0$$

について, Gauss-Seidel 法により数値計算を行い, 分割格子数 M , 収斂判定常数 ϵ , 収斂までの繰返し演算回数 K , および ϵ 等と, 演算桁数, 境界条件の差異, 初期値の与え方の差異等との関係を用いてみた。

尚, 領域は右図のような, 2辺が

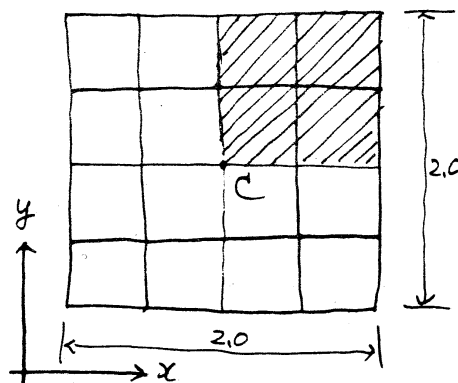
も, x, y 軸に並行な, 辺長 2.0

の正方形で, 対称性から, 実際

の数値計算は斜線部分で行った。

尚, 分割数 M は 2 進分割とし,

演算桁は原則として 11 桁である。



§2. 主な数値実験とその結果

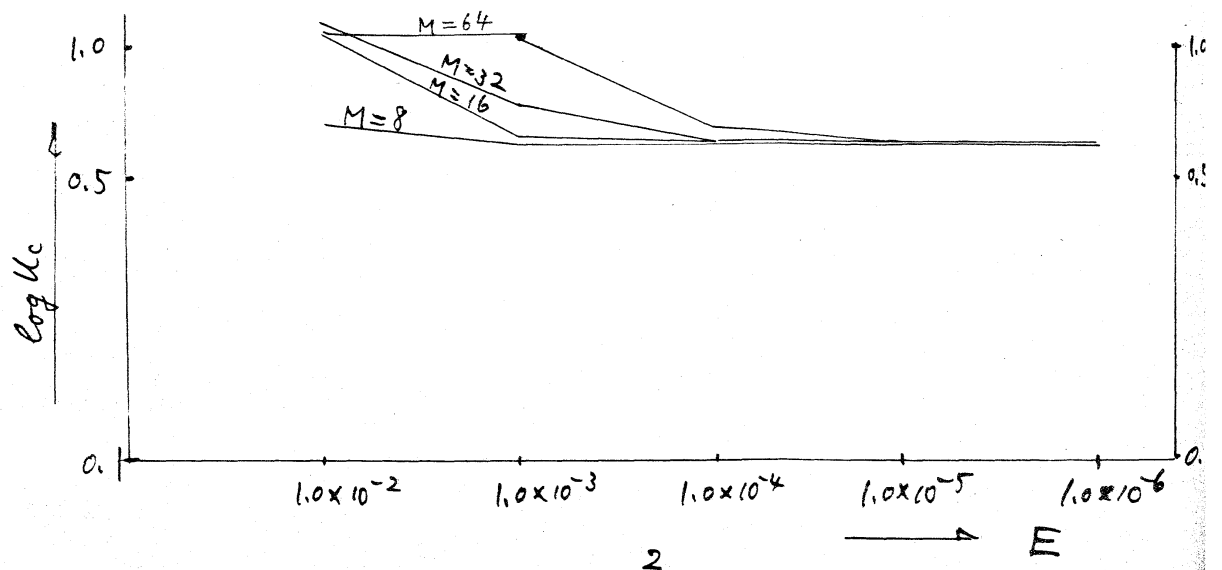
2-1. 解に及ぼす M と E の影響と真値との関係

今, 初期値 $=1.0$, 境界値 $=0.0$, $E=1.0 \times 10^{-2} \sim 1.0 \times 10^{-6}$,
 $M=8 \sim 64$ とすると, 中央 C 点での函数値 u_c は表-1
 及び図-1のように収斂してゆく。今, $E=1.0 \times 10^{-4} \sim 10^{-6}$

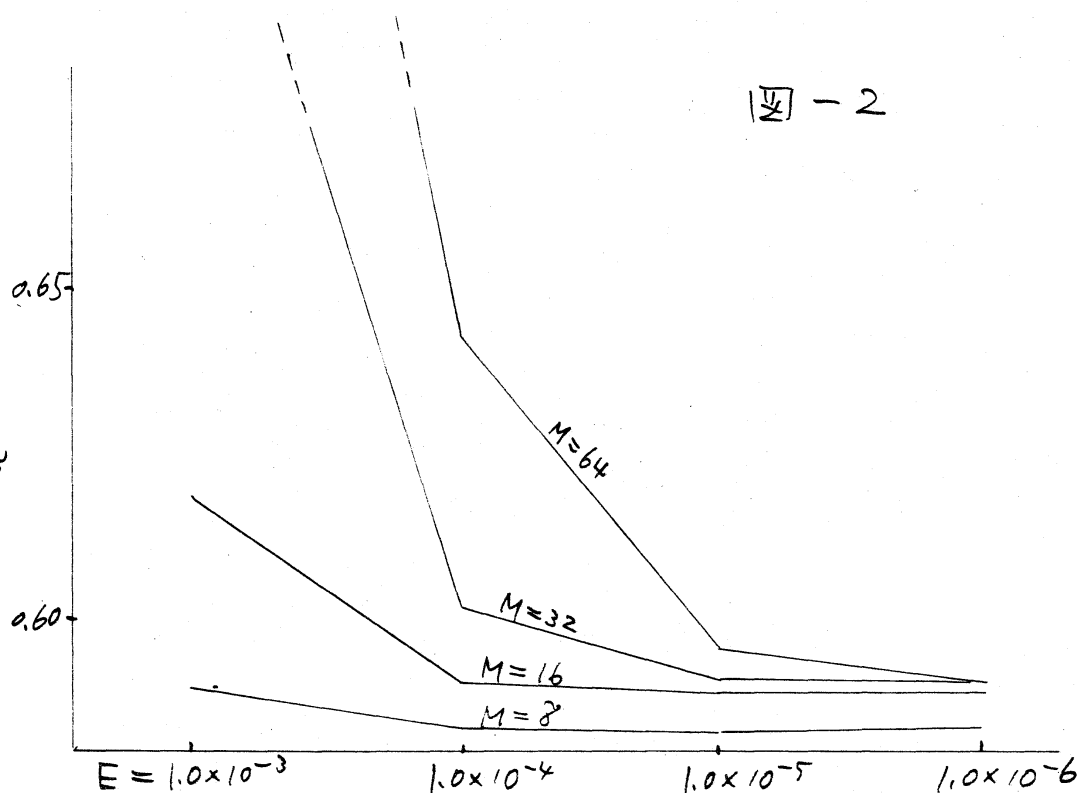
表-1

		u_c				
$M \backslash E$		1.0×10^{-2}	1.0×10^{-3}	1.0×10^{-4}	1.0×10^{-5}	1.0×10^{-6}
8		0.66205	0.58968	0.58295	0.58233	0.58227
16		1.02243	0.61900	0.59057	0.58786	0.58760
32		1.10399	0.74249	0.60135	0.59014	0.58904
64		1.03955	1.08500	0.64254	0.59419	0.58975

図-1



の部分拡大すると、図-2のようになり、 M の値による u_c の収斂値は異なるようである。いま、この M による u_c の



収斂値が、図-3のように $u_c - M$ 図を考えると、真の値（これは解析解により $u_c = 0.589371$ と求められている）へ M の増大につれて近付いているように見える。若しこれが真ならば、解析解によらずに或程度迄推定しえよう。

今、念の為、演算桁数を8桁に下げて11桁の分と比べてみたが、この M に関係する u_c の収斂値は、この程度では、表-2に示すように、解や演算回数に殆ど影響を及ぼすことが示

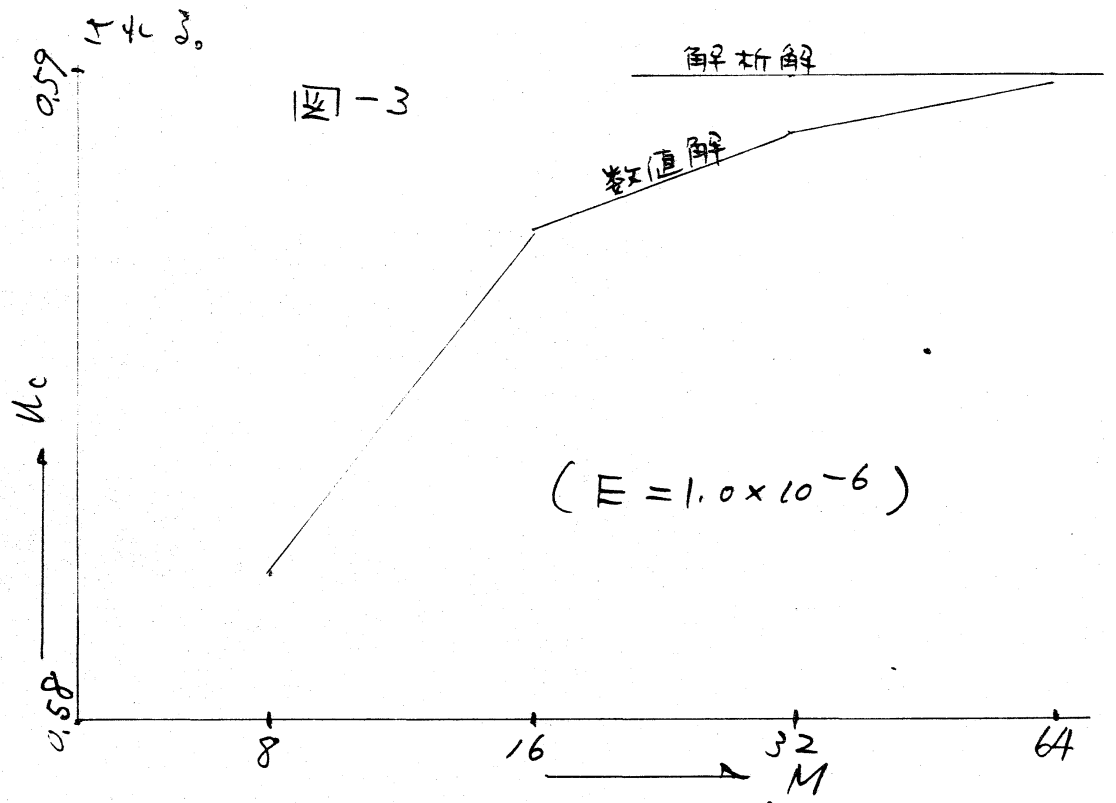


表-2

E	8 本桁		11 桁	
	k	u_c	k	u_c
1.0×10^{-2}	39	1.022430	39	1.022431
1.0×10^{-3}	177	0.619004	177	0.619005
1.0×10^{-4}	298	0.590571	298	0.590571
1.0×10^{-5}	417	0.587865	417	0.587865
1.0×10^{-6}	536	0.587596	536	0.587596

2-2. Eとkとの関係

今、初期値1.0、境界値0.0としてEとkとの関係を調べ

ると表-3のようになる。表-3から、1)精度を10倍ずつ上

表-3 Kの値, ()内は ΔK

E \ M	8	16	32	64
1.0×10^{-6}	150 (29)	536 (119)	1.860 (497)	6.295 (1.917)
1.0×10^{-5}	121 (29)	417 (119)	1.583 (481)	4.378 (1.975)
1.0×10^{-4}	92 (30)	298 (121)	902 (521)	2.403 (1.950)
1.0×10^{-3}	62 (30)	177 (138)	381 (319)	453 (471)
1.0×10^{-2}	32	39	62	82
(ΔM)	($\Rightarrow 30$)	($\Rightarrow 120$)	($\Rightarrow 480$)	($\Rightarrow 1920$)

げると, Mは等差数列的に変化する。ロ) Eが小さくなるにつれて, ΔM は分割数の平方に比例してくる。等がわかる。いま, 一桁乱数を格子番号に対応させて, 考えている実をランダムにえらばせてみると, 表-4を得る。この表から, 一

表-4 Kの値 (M=16)

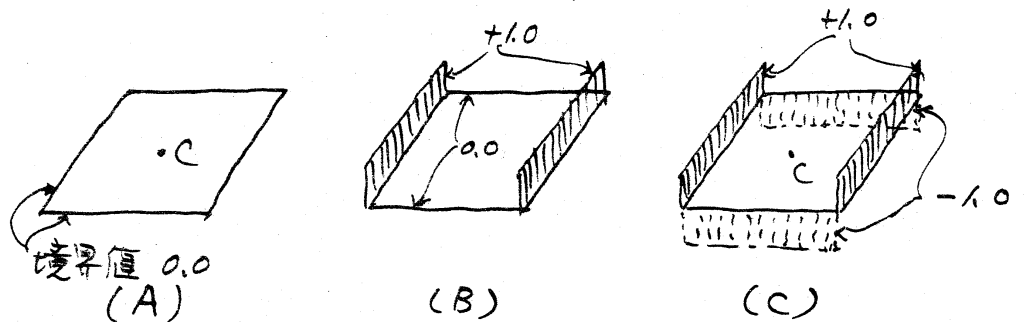
E	一桁乱数使用	普通の G. S. 法	比
1.0×10^{-3}	21,928 ($\Delta K=8,254$)	$177 \times (\frac{16}{2})^2 = 11,328$ 換算	1.93
1.0×10^{-4}	30,182 ($\Delta K=8,642$)	$298 \times (") = 19,072$	1.58
1.0×10^{-5}	38,824	$417 \times (") = 26,688$	1.45

般に, このような場合は, 乱数などを使わずにオの繰返回数
が少なりようであるが, その比は, Eが小さくなるにつれて
漸減の傾向にある。

2-3 境界条件を変えてみた場合について。

いま、図-4のようにA, B, C 3つのパターンの境界条件

図-4 境界値の設定



を考える。前と同じく初期値 1.0 とし、 $M=32$ とすると、表-5を得る。表-5から、1) 境界条件が複雑であっても

表-5 Kの値

E	A		B		C	
	K	ΔK	K	ΔK	K	ΔK
1.0×10^{-6}	1,860	477	1,354	478	2,804	476
1.0×10^{-5}	1,383	481	876	482	2,328	474
1.0×10^{-4}	902	521	394	255	1,854	442
1.0×10^{-3}	381	319	139	102	1,412	655
1.0×10^{-2}	62		37		757	

、Kは却って減ることがある。(AとB)、2) 境界条件の如何に拘らず、Eが小さくなれば ΔK は一定値に近付くように思われる。等を取れる。

2-4. 初期設定値を変化させた場合。

いま, $E = 1.0 \times 10^{-4}$, $M = 32$, 境界値 $= 0.0$ として, 初期値を一桁に $+2.0$ から -0.6 まで, 0.2 刻みに変化させてみると, 表-6 のようになり, これを図示すると, 図-5 のようになる。

表-6 K の値

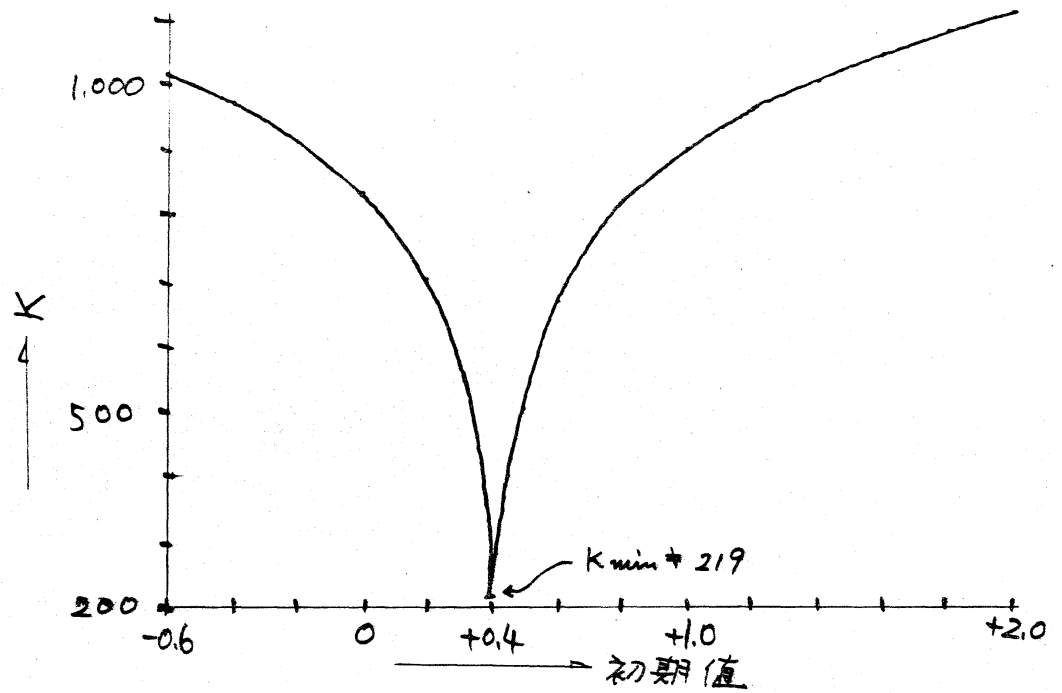
	K	ΔK		K	ΔK
+2.0	1106		+0.6	672	146
1.8	1078	28	0.4	$K_{min} = 219$	453
1.6	1046	32	+0.2	691	-472
1.4	1009	37	0.0	831	-140
1.2	962	47	-0.2	914	-83
1.0	902	60	0.4	973	-59
+0.8	818	84	-0.6	1019	-46
		146			

図-5 からわかることは イ) 初期値をうまくとることによって, くり返し回数 K が非常に違ってくる。ロ) 初期値に対する K の値は, K_{min} に対して大体対称のようである。等である。

§3. あとがき

以上, Poisson 方程式の一例について, 若干の計算

図-5



例を示したが、以上の外に色々の組合せ（例えば、原式の右辺常数項を変えてみる等）を行うこと等によつて、又、種々の事実が明かにされるかもしれない。

以上