

On Connes' Work (3)

Ⅲ型 Factor の分類

東工大理 中 神 祥 臣

前に引き続き Connes の学位論文の第 4, 5 章を紹介する。
主として σ -finite な Ⅲ_λ 型 Factor, $\lambda \in [0, 1)$ に対する次のよ
うな構造定理が調べられている: Factor M が Ⅲ_λ 型であるた
めには, Ⅱ_λ 型 von Neumann 代数 N の上に或る条件をみたす
自己同型写像 θ が与えられ $M \sim N \otimes_\theta \mathbb{Z}$ となることが必要十分
である。これは竹崎により得られた, Factor M が Ⅲ 型である
ための完全条件は, N 上に或る条件をみたす 1 径数自己同型
群 θ_t , $t \in \mathbb{R}$ が与えられ $M \sim N \otimes_\theta \mathbb{R}$ であるという定理とよく
似ている。この定理がこのような形をとるまでには, 荒木,
竹崎, 富田等による幾つかの仕事や話があったことを指適し
ておこう。

§ 0. 準備

von Neumann 代数は常に σ -finite とし, (自己)同型写像

は常に $*$ (自己) 同型写像を考える. f. n. とは faithful normal のことである. I_n 型 Factor を F_n と表わす.

これから本論に入るための準備をする.

定義. von Neumann 代数 M 上の自己同型写像を θ とする.
 $\theta^n e = e$ かつ $\theta^n \upharpoonright M_e$ が inner となるような射影 $e \in M \cap M'$ の内で最大のものを $p(\theta^n)$ で表わす. すべて $n \neq 0$ に対し $p(\theta^n) = 0$ のとき, θ は free であるという.

定義. 局所コンパクトな可換群 G から von Neumann 代数 $\{N, \mathcal{H}\}$ 上の自己同型写像群の中への ^{弱連続な} 準同型写像を θ とする.
 $\xi \in L^2(G, \mathcal{H})$ に対し $I(x)\xi(s) = \theta_s(x)\xi(s)$, $U_t\xi(s) = \xi(s+t)$, $x \in N$, $s, t \in G$ としたとき, $I(N) \cup \{U_s : s \in G\}$ により生成される $L^2(G, \mathcal{H})$ 上の von Neumann 代数 $N \otimes_0 G$ を N と G の 接合積 という. (I, U) を (N, G) から $N \otimes_0 G$ への canonical map, I を canonical injection という. 特に $G = \mathbb{Z}$ のときには $\theta_n = \theta^n$ などの規約を使う.

Combes [Compositio Math. 23 (1971), 49-77, Th 3.4] によれば, von Neumann 代数 M 上の semi-finite f. n. weight φ に対し次の条件は同値である:

- a) $\varphi \upharpoonright M_\varphi$ は M_φ 上の semi-finite f. n. trace ;
 b) M から M_φ 上への f. n. 条件付期待値 E_φ があって $\varphi = \varphi \circ E_\varphi$;
 c) 互に直交した台を持つ M 上の n. 正値 1 次形式の集合 $\{e_i : i \in I\}$ により, $\varphi(x) = \sum_{i \in I} e_i(x)$, $x \in M_+$;
 d) M から M_φ への σ_φ -不変な f. n. 条件付期待値がある.

G が discrete な場合, $M = N \otimes_0 G$ の元は次のように行列表示される $I(x) = (I(x)_{s,t})$, $U_r = (U_r)_{s,t}$;

$$I(x)_{s,t} = \begin{cases} \sigma_s(x) & st^{-1} = e \\ 0 & st^{-1} \neq e \end{cases} \quad (U_r)_{s,t} = \begin{cases} 1 & st^{-1} = r \\ 0 & st^{-1} \neq r \end{cases}$$

この場合, $y = (y_{s,t}) \in M$ に対し, $I(y_{e,e}) \in I(N)$ を対応させる写像は f. n. 条件付期待値である.

定義. von Neumann 代数 M 上の semi-finite f. n. weight φ が上の条件の一つをみたすとき strictly semi-finite という.

上の c) により von Neumann 代数上には常に strictly semi-finite f. n. weight φ がある. さらに d) により M から M_φ 上への f. n. 条件付期待値がある. 次に学位論文のオ 4 章より前に得られた結果を思い起しておこう. そこでは局所ユニバースな加群 R とその双対群 $\hat{R} = R^*$ の関係を $\langle \tau, \lambda \rangle = \lambda(\tau)$,

$t \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}$ で与えてある. 特に断わらない限り, ここでも同いように扱うことにする. 従って $f \in L^1(\mathbb{R})$ の Fourier 変換 $\hat{f}$ は $\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \lambda^{it} dt$ で与えられるし, $Sp(\sigma^t) = \sigma(\Delta_0) \cap \mathbb{R}_+^*$ となる.

定理. M を Factor, φ を M 上の semi-finite f. n. weight とすると $S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \Gamma(\sigma^t) (\equiv \bigcap_{t \in M_\varphi} Sp(\sigma^t))$.

定理 $\lambda > 0$, M を Factor, N を $N' \cap M \subset N$ なる M の semi-finite な部分 von Neumann 代数, E を M から N 上への f. n. 条件付期待値, $\mathcal{U} \in M = (N \cup \mathcal{U})''$ なる $\mathcal{U}(E)$ の部分群, τ を N 上の semi-finite f. n. trace, $p_u = d\tau_u/d\tau$ ($u \in \mathcal{U}$, $\tau_u(\lambda) = \tau(u\lambda u^*)$) とする. 次の条件は同値である.

- a) $\lambda \in S(M)$;
- b) 任意な $\varepsilon > 0$ と $e \in N \cap N'$ に対し 0 でない射影 $d \in N \cap N'$, $d \leq e$ と $u \in \mathcal{U}$ が存在して, $udu^* \leq e$ かつ $\sigma(p_u^{-1}Nd) \subset (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$.

§ 1. 学位論文の第 4, 5 章の主要結果.

M を Factor とする. 第 3 章の結果によれば $S(M) \cap \mathbb{R}_+^*$ は $\mathbb{R}_+^*$ の乗法に関する閉部分群である. したがって $S(M)$ とし

で考えられる形は $\{0\}$, $\{1\}$, $\{\lambda^n: n \in \mathbb{Z}\}^-$ ($\lambda \in [0, 1)$), $\mathbb{R}_+$ のいずれかである. $S(M) = \{\lambda^n: n \in \mathbb{Z}\}^-$ のとき M を III_λ 型, $S(M) = \mathbb{R}_+$ のとき III_0 型と呼ぶことにする. M が III_λ 型 ($\lambda \in [0, 1]$) の場合は, いずれも $0 \in S(M)$ であるから, M は III 型である.

命題 1.1. von Neumann 代数 N 上の free な自己同型写像 θ が $N \cap N'$ 上へ ergodic に作用し, N から Factor M の中へ同型写像 I が次の条件を満たしているものとする:

- a) $I(N)' \cap M \subset I(N)$;
- b) M から $I(N)$ 上へ f. n. 条件付期待値がある;
- c) $I(\theta x) = X I(x) X^*$, $x \in M$ なる M の $u = \pm 1$ X が存在して $M = (I(N) \cup \{X\})''$.

このとき M から $N \otimes_{\theta} \mathbb{Z}$ 上への一意的同型写像 J が存在して $(J \circ I, U)$ は $(N, \mathbb{Z})$ から $N \otimes_{\theta} \mathbb{Z}$ への canonical map で $J(x) = U_1$.

証明. b) の条件付期待値を E とする. もし他に f. n. 条件付期待値 E' がある, E' とする. $I(N)$ 上の semi-finite f. n. weight ψ に対し, $\tilde{\psi} = \psi \circ E$ と $\tilde{\psi}' = \psi \circ E'$ は M 上の semi-finite f. n. weight である. $x \in I(N)$ ならば $\sigma_t^{\tilde{\psi}}(x) = \sigma_t^{\psi}(x) = \sigma_t^{\tilde{\psi}'}(x)$.

であるから intertwining operator $u_t = u_t^{\tilde{\varphi}\varphi'}$ を使えば, $u_t x = x u_t$ となるから, $x \in M_+$ に対し $u_t \in I(N)' \cap M \subset I(N)$ を適用して

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}'(\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(x)) &= \varphi(E'(\sigma_t^{\tilde{\varphi}}(x))) = \varphi \circ E'(u_t \sigma_t^{\tilde{\varphi}'}(x) u_t^*) \\ &= \varphi(u_t E'(\sigma_t^{\tilde{\varphi}'}(x)) u_t^*) = \varphi \circ E'(\sigma_t^{\tilde{\varphi}'}(x)) = \tilde{\varphi}'(\sigma_t^{\tilde{\varphi}'}(x)) = \tilde{\varphi}'(x).\end{aligned}$$

Pedersen and Takesaki [The Radon-Nikodym theorem for von Neumann algebras. Preprint, TH 5.12] により $\tilde{\varphi}' = \tilde{\varphi}(h \cdot)$, $u_t = h^{it}$ となるような正値作用素 $h \in M_{\tilde{\varphi}}$ が一意に存在する. $h^{it} \in I(N)' \cap M \subset I(N)$ であるから $h \in I(N) \cap I(N)'$. $I(N)$ 上で $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}'$ であるから $h = 1$, 即ち, $\varphi \circ E = \varphi \circ E'$. これは φ の選り方によらないから $E = E'$. ここで $E''(x) = X^* E(X \pi X^*) X$, $x \in M$ とすれば, E'' は M から $I(N)$ への f. n. 条件付期待値となる. 上の結果により $E'' = E$ となるから, $E(X \pi X^*) = X E(x) X^*$, $x \in M$ である.

$M_1 = N \otimes_{\theta} \mathbb{Z}$ とし, (I_1, U) を $(N, \mathbb{Z})$ から M_1 への canonical map とする. θ は N 上で free, $N \cap N'$ 上で ergodic であるから, M_1 は Factor になり $I_1(N)' \cap M_1 \subset I_1(N)$ をみたす. E_1 を M_1 から $I_1(N)$ への f. n. 条件付期待値とする. $I_1(\theta x) = U_1 I_1(x) U_1^*$ かつ $M_1 = (I_1(N) \cup \{U_1, 1\})''$ は接合積の作り方から明らかである.

N 上の f. n. state φ に対し, M, M_1 上の f. n. state $\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_1$ をそれぞれ $\tilde{\varphi} = \varphi \circ I \circ E$, $\tilde{\varphi}_1 = \varphi \circ I_1 \circ E_1$ で与え, それ等から導かれる M, M_1 の GNS 表現を $\{\pi, \mathcal{H}, \xi\}, \{\pi_1, \mathcal{H}_1, \xi_1\}$ とする.

$E(X^{i-k}) = 0$, $E_1(U_{j-k}) = 0$ ($j \neq k$) であるから, 任意な $x_n, \dots, x_1, x_2, \dots, x_n$ に対し

$$\begin{aligned} \|\pi(\sum_{j=-n}^n I(x_j) X^j) \xi\|^2 &= \sum_{j=-n}^n \sum_{k=-n}^n \varphi(X^{-k} I(x_k^* x_j) X^j) \\ &= \sum_{j=-n}^n \sum_{k=-n}^n \varphi \circ I^{-1} \circ E(X^{-k} I(x_k^* x_j) X^j) \\ &= \sum_{j=-n}^n \sum_{k=-n}^n \varphi \circ I^{-1}(X^{-k} I(x_k^* x_j) E(X^{i-k}) X^k) \\ &= \sum_{j=-n}^n \varphi \circ I^{-1}(X^{-j} I(x_j^* x_j) X^j) \\ &= \sum_{j=-n}^n \varphi(\theta^{-j}(x_j^* x_j)) = \|\pi_1(\sum_{j=-n}^n I_1(x_j) U_j) \xi_1\|^2 \end{aligned}$$

となる. $\xi = \xi_1$ から $\mathcal{H}_1$ への対応 γ を

$$\gamma \pi(\sum_{j=-n}^n I(x_j) X^j) \xi = \pi_1(\sum_{j=-n}^n I_1(x_j) U_j) \xi_1$$

により与えられ, well defined で同型写像となる. $J = \pi_1^{-1} \circ$

$\text{ad } \gamma \circ \pi$ とすれば, J は M から M_1 上への同型写像である. $x \in N$ ならば

$$\begin{aligned} J \circ I(x) &= \pi_1^{-1} \circ \text{ad } \gamma \circ \pi(I(x)) = \pi_1^{-1}(\gamma \pi(I(x)) \gamma^{-1}) \\ &= \pi_1^{-1}(\pi_1(I_1(x))) = I_1(x) \end{aligned}$$

$$J(X) = \pi_1^{-1} \circ \text{ad } \gamma \circ \pi(X) = \pi_1^{-1}(\gamma \pi(X) \gamma^{-1}) = \pi_1^{-1}(\pi_1(U_1)) = U_1.$$

命題 1.2. $\lambda \in [0, 1)$, M を III $_{\lambda}$ Factor, φ [resp. ψ] を M 上の strictly semi-finite [resp. semi-finite] f. n. weight とする.

a) $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap M \subset M_{\varphi}$ なる $\mathcal{O}$ がある. このとき $M'_{\varphi} \cap M \subset M_{\psi}$ となる.

b) $M_{\varphi} \subset M_{\psi}$ であるための完全条件は $\psi = \varphi(\lambda \cdot)$ となる.

$h \eta M_\varphi \cap M'_\varphi$ が存在することである.

証明. a) の証明を三つの部分に分ける.

1) 1 が $\sigma(\Delta_\varphi)$ で孤立している場合.

$\mathcal{O}$ が $M_\varphi = M(\sigma, \mathbb{H})$ で極大可換ならば $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap M_\varphi \subset \mathcal{O}' \cap M$

$\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap M_\varphi$ とすれば, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \cap M$. もし $x \in \mathcal{O}' \cap M$ かつ $x \notin M_\varphi$ なる $x \neq 0$ があったとする. $y \equiv \sigma(f)x \neq 0$ なる $f \in L^1(\mathbb{R})$ で f の台が十分小さいものを選ぶ. 1 は孤立点だから $y^*y, yy^* \in \mathcal{O}' \cap M_\varphi = \mathcal{O}$. $y = u|y|$ とすれば, $u \in \mathcal{O}'$, $u \notin M_\varphi$, $e \equiv u^*u \in \mathcal{O}$, $e' \equiv uu^* \in \mathcal{O}$. したがって $e = e'$. φ は strictly semi-finite だから, $0 < \varphi(e_0) < +\infty$, $e_0 \leq e$ なる $e_0 \in M_\varphi$ がある. $u_0 \equiv ue_0$ とすれば $\varphi(u_0^*u_0) = \varphi(u_0u_0^*)$ となり $u_0 \notin M_\varphi$ と矛盾する.

$\varphi \upharpoonright M_\varphi$ は M_φ 上の semi-finite f. n. trace になるから, M_φ には 1 の分割 $\{e_i : i \in I\}$ で $0 < \varphi(e_i) < +\infty$ なるものがある.

$\varphi_i = \varphi e_i$, $M_i = M_{e_i}$ とする. $T_0 \equiv 2\pi / \log \lambda \in T(M)$ かつ $e_i \sim 1$ であるから, $T_0 \in T(M_i)$. したがって各 $i \in I$ に対し, M_i 上の state φ_i と $h_i \eta M_i \cap M_{\varphi_i}$ が存在して $\varphi_i = \varphi_i(h_i \cdot)$ かつ $\sigma_{T_0}^{\varphi_i} = 1$ となる. h_i のスペクトル射影を含む $M_i \cap M_{\varphi_i}$ の極大可換代数を $\mathcal{O}_i$ とする. このときは $\mathcal{O}'_i \cap M_{\varphi_i} = \mathcal{O}'_i \cap M_{\varphi_i}$ となるから, $\mathcal{O}_i$ は M_i, φ_i で極大可換になる. 1 は $\sigma(\Delta_{\varphi_i})$ で孤立しているか

ら, 1) より $\mathcal{O}_L = \mathcal{O}'_L \cap M_L$ となる. 各 $L \in I$ について和をとると,
 $\mathcal{O} \subset M_\varphi$ かつ $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap M$ となる.

3) M が III₀ Factor の場合.

φ を M 上の strictly semi-finite f. n. weight とする. ここで
 M が Factor の場合には $S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \Gamma(\sigma^\varphi)$ である. ことを
 想起しよう. $\sigma = \sigma^\varphi$ とする. 任意な $e_0 \in M_\varphi$, $0 < \varphi(e_0) < \infty$ と 1 の
 コンパクトな近傍 $V \subset \mathbb{R}_+^*$ に対し, $0 \neq e, e_1 \in M_\varphi$, $e \leq e_0$
 が存在して

$$Sp \sigma^e \subset V \cdot Sp \sigma^{e_1}, \quad Sp \sigma^{e_1} \subset V \cdot Sp \sigma^e$$

が成り立つ. $\{V \cdot Sp \sigma^{e'} : e' \in M_\varphi \cap M_{e_0}, V \text{ は 1 のコンパクト近傍}\}$ は フィルター-base となり

$$\Gamma(\sigma) = \bigcap_{e' \in M_\varphi} V \cdot Sp(\sigma^{e'}) = \bigcap_{e' \in M_\varphi \cap M_{e_0}} V \cdot Sp(\sigma^{e'}) = \Gamma(\sigma^{e_0}).$$

M は III₀ Factor, すなわち, $\Gamma(\sigma^{e_0}) = S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \{1\}$ であるから, 任
 意な $\varepsilon_0 > 0$ に対し $Sp \sigma^e \subset ([e^{-\varepsilon_0}, e^{-\varepsilon_0}] \cup [e^{\varepsilon_0}, e^{\varepsilon_0}])^c$ となるような e
 $\in M_\varphi \cap M_{e_0}$, $e \neq 0$ がある. ここで $N = M_e(\sigma^e, [e^{-\varepsilon_0}, e^{\varepsilon_0}])$ とす

れば, N は M_e の部分代数になり, N 上では $Sp \sigma^e \subset [e^{-\varepsilon_0}, e^{\varepsilon_0}]$

Aversen [On groups of automorphisms of operator algebras. To appear J. Functional Analysis] による

である. したがって, $\tau \wedge \sigma_t^e(H) = H$, $\|H\| \leq \varepsilon_0/2$, $\sigma_t^e(x) = e^{itH} x e^{-itH}$,

$x \in N$ となるような $H = H^*$, $H \in N$ がある. ここで $\sigma_t^e(x) = e^{-itH}$

$\sigma_t^e(x) e^{itH}$, $x \in N$ とすれば $Sp_{\sigma^e}(x) \subset \{1\}$ となる. さらに $M_e \otimes F_2$

上で

$$\tilde{\sigma}_t^e \left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \sigma_t^e(x_{11}) & \sigma_t^e(x_{12}) e^{itH} \\ e^{-itH} \sigma_t^e(x_{21}) & \sigma_t^e(x_{22}) \end{pmatrix}, \quad x_{ij} \in M_e$$

とすれば, $x \in M_e(\sigma^e, (e^{-2\varepsilon_0}, e^{2\varepsilon_0})^c)$ に対し

$$Sp_{\sigma^e}(x) = Sp_{\sigma^e} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \right) = Sp_{\sigma^e} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \subset Sp_{\sigma^e} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Sp_{\sigma^e}(x) Sp_{\sigma^e} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ところで, $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し

$$\widetilde{\sigma}(f) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}} f(t) \widetilde{\sigma}_t \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) dt = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{f}(e^H) & 0 \end{pmatrix}$$

であるから $Sp_{\widetilde{\sigma}} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \sigma(e^H) \subset [e^{-\frac{\varepsilon}{2}}, e^{\frac{\varepsilon}{2}}]$, したがって $Sp_{\sigma^e}(x) \subset (e^{-\varepsilon_0}, e^{\varepsilon_0})^c$. また $N \cup M_e(\sigma^e, [e^{-\varepsilon_0}, e^{\varepsilon_0}])$ は M_e で weakly total φ の定数倍を調整して であるから, $Sp_{\sigma^e}(x) \cap (e^{-\varepsilon_0}, e^{\varepsilon_0}) = \{1\}$, $x \in M_e$. M_e は a f. n. state ψ を $\psi = \varphi_e(e^{-H} \cdot)$ で定義すれば, $\sigma_t^\psi = \sigma_t^e$ かつ $\sigma(\Delta_\psi) \cap [e^{-\varepsilon_0}, e^{\varepsilon_0}] = \{1\}$ となり, 1 は $\sigma(\Delta_\psi)$ で孤立しているから, M_e に対し 1) を適用できる. $1-e$ が 0 でない場合は $1-e$ を改めて e_0 として上の議論を繰り返せば, M に対する証明を得る.

6) $M_\psi \subset M_\varphi$ とする. a) によれば $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap M \subset M_\psi$ なる $\mathcal{O}$ があるから $M_\psi' \cap M \subset \mathcal{O}' \cap M \subset M_\psi$. $x \in M_\psi$ に対し $x = \sigma_t^\psi(x) = u_t^{\psi\psi} \sigma_t^\varphi(x) u_t^{\psi\psi*} = u_t^{\psi\psi} x u_t^{\psi\psi*}$ であるから $u_t^{\psi\psi} \in M_\psi' \cap M \subset M_\psi \subset M_\varphi$. $x \in M_\tau$ に対し

$$\psi(x) = \psi(\sigma_t^\psi(x)) = \psi(u_t^{\psi\psi} \sigma_t^\varphi(x) u_t^{\psi\psi*}) = \psi(\sigma_t^\varphi(x))$$

となるから, 命題 1.1 の証明でも使った Pedersen and Takesaki の定理により, $\psi = \varphi(h \cdot)$ となるような $h \in M_\psi$, $h^{it} = u_t^{\psi\psi}$ があるか

ら $h \in M_\varphi \cap M'_\varphi$ となる. 逆に $h \in M_\varphi \cap M'_\varphi$ で $\psi = \varphi(h \cdot)$ とする.
 $x \in M_\varphi$ に対し $\sigma_t^\psi(x) = h^{it} \sigma_t^\varphi(x) h^{-it} = x$ であるから $x \in M_\psi$ となる.

命題 1.3. $\lambda \in (0, 1)$, $T_0 = 2\pi / \log \lambda$, M を III_λ Factor, φ を M 上の strictly semi-finite f. n. weight とする. 次の条件は同値である.

- a) $\sigma_{T_0}^\varphi = 1$
- b) $\sigma(\Delta_\varphi) = S(M)$
- c) M_φ は Factor
- d) $M'_\varphi \cap M = \mathbb{C}$
- e) ψ が M 上の semi-finite f. n. weight として $M_\varphi \subset M_\psi$ ならば $\psi = \alpha \varphi$, $\alpha > 0$.
- f) M_φ は M からの f. n. 条件付期待値があるような semi-finite von Neumann 部分代数のうちで極大である.

証明. a) $\rightarrow$ b) $\sigma(\Delta_\varphi^{T_0}) = \{1\}$ であるから, $\sigma(\Delta_\varphi) \subset \{\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\} = S(M)$.

b) $\rightarrow$ c) b) により $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} M(\sigma^\varphi, \{\lambda^n\})$ は Factor M で weakly total であるから, 任意な $e_1, e_2 \in M_\varphi$, $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$ に対し, n と $x \in M(\sigma^\varphi, \{\lambda^n\})$ が存在して $e_1 x e_2 \neq 0$ となる. $e =$

$S(e_1 x e_2)$ とすれば, $e \in M_\varphi$. 再び M は Factor であるから, 命題 1.2 の証明 a) の 3) の中のように $\Gamma(\sigma^\varphi) = \Gamma(\sigma^{\varphi e})$ となり, Γ に伴って $M(\sigma^\varphi, \{ \lambda^{-n} \}) \cap M_e \neq \{0\}$ である. $y \in M(\sigma^\varphi, \{ \lambda^{-n} \}) \cap M_e$, $y \neq 0$ に対し $e_1 x e_2 y \in M_\varphi$ かつ $e_1 (e_1 x e_2 y) e_2 \neq 0$ であるから, M_φ は Factor である.

c) $\rightarrow$ d) $M'_\varphi \cap M \subset M_\varphi \cap M'_\varphi = \mathbb{C}$.

d) $\rightarrow$ e) 命題 1.2, b) より $\psi = \varphi(h \cdot)$ なる $h \in M_\varphi \cap M'_\varphi$ がある. d) より $h \in \mathbb{C}$ であるから $\psi = \alpha \varphi$, $\alpha > 0$.

e) $\rightarrow$ f) M_φ を含み, M から α f. n. 条件付期待値 E が存在するような, M の semi-finite な部分 von Neumann 代数を N とする. τ を N 上の semi-finite f. n. trace とすれば, $\psi = \tau \circ E$ は M 上の semi-finite f. n. weight で, $N \subset M_\psi$ を満たす. このとき $M_\varphi \subset M_\psi$ であるから e) が適用できて, $\psi = \alpha \varphi$, $\alpha > 0$ となる. Γ に伴って $N \subset M_\psi = M_\varphi$.

f) $\rightarrow$ a) $T_0 \in T(M)$ であるから, M 上に $\sigma_{T_0}^\psi = 1$ となるような semi-finite f. n. weight ψ が存在して $\psi = \varphi(h \cdot)$, $h \in M_\varphi \cap M'_\varphi$. $x \in M$ に対し $E(x) = T_0^{-1} \int_0^{T_0} \sigma_t^\psi(x) dt$ とすれば, E は M から M_ψ への σ_t^ψ -不変な f. n. 条件付期待値になり, Γ に伴って ψ は strictly semi-finite である. $x \in M_\varphi$ ならば $h^{it} \sigma_t^\psi(x) h^{-it} = x$ となるから, 極大性で $M_\varphi = M_\psi$. ψ は a) をみたしているから e) により $\psi = \alpha \varphi$, $\alpha > 0$ となり, $\sigma_{T_0}^\varphi = \sigma_{T_0}^\psi = 1$ を得る.

定義 1.4. $\lambda \in [0, 1)$, M を III_λ Factor, φ を M 上の strictly semi-finite f. n. weight とする. φ が M 上の generalized trace であるとは, $\lambda \in (0, 1)$ の場合には $\varphi(1) = \infty$ かつ M_φ が Factor; $\lambda = 0$ の場合には 1 が $\sigma(\Delta_\varphi)$ で孤立していて, M_φ が properly infinite となることである.

命題 1.5. $\lambda \in [0, 1)$ とする. III_λ Factor 上には generalized trace がある.

証明. $\lambda \in (0, 1)$. M を III_λ Factor とする. M 上の f. n. state φ を $\sigma_{\varphi_0}^\varphi = 1$ となるように選ぶ. $M \otimes F_\infty$ 上で $\psi = \varphi \otimes \text{Tr}$ とすれば, ψ は strictly semi-finite かつ $\sigma_{\psi_0}^\psi = 1$. $M \otimes F_\infty \sim M$ であるから M 上には generalized trace がある.

次に M が III_0 Factor の場合を考える. φ_0 を M 上の strictly semi-finite f. n. weight とすれば命題 1.2 の a) の 3) の証明のよりに, ある $e \in M_{\varphi_0}$, $e \neq 0$ と M_e 上の f. n. state φ が存在して 1 は $\sigma(\Delta_\varphi)$ で孤立している. $M_e \otimes F_\infty$ 上の strictly semi-finite f. n. weight $\psi = \varphi \otimes \text{Tr}$ に対しても, 1 は $\sigma(\Delta_\psi)$ で孤立しておりしかも $M_\psi = M_{e, \varphi} \otimes F_\infty$ は properly infinite である. $M \sim M_e \sim M_e \otimes F_\infty$ であるから, M 上には generalized trace がある.

定理 1.6. $\lambda \in (0, 1)$ とする.

a) N を II_∞ Factor, τ をその上の semi-finite f.n. trace, θ を N の自己同型写像で $\tau \circ \theta = \lambda \tau$ をみたしているようなものを α とすれば, $N \otimes_\theta \mathbb{Z}$ は III_λ Factor である.

b) M が III_λ Factor ならば a) の条件をみたすような (N, θ) が存在して $M \sim N \otimes_\theta \mathbb{Z}$.

c) $(N_1, \theta_1), (N_2, \theta_2)$ が条件 a) をみたしているとき, $N_1 \otimes_{\theta_1} \mathbb{Z} \sim N_2 \otimes_{\theta_2} \mathbb{Z}$ であるための完全条件は N_1 から N_2 上への同型写像 J があって $J\theta_1 J^{-1}\theta_2^{-1}$ が N_2 の内部自己同型写像になっていることである.

証明. a) N は Factor で, $\tau \circ \theta = \lambda \tau$ であるから, θ は free である. N は Factor であるから, θ は $N \cap N'$ 上で ergodic である. したがって $M \equiv N \otimes_\theta \mathbb{Z}$ は Factor でしかも $I(N)' \cap M \subset I(N)$ かつ $I(\theta x) = U_1 I(x) U_1^*$ となる. たゞし (I, U) は $(N, \mathbb{Z})$ から M への canonical map である. ここで 3 章で得られた, $\mu > 0$ とき, $\mu \in S(M)$ であるための完全条件が任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある n が存在して $\sigma(d\tau \circ \theta^n / d\tau) \subset (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$ であることを想い起せば, $S(M) = \{\lambda^n : n \in \mathbb{Z}\}$, 即ち M は III_λ Factor であることがわかる.

b) 命題 1.5 により, M 上には generalized trace φ がある.

$\lambda\varphi$ も M 上 α generalized trace (" $\sigma_{T_0}^\varphi = \sigma_{T_0}^{\lambda\varphi} = 1$, $T_0 \equiv 2\pi/\log \lambda$ をみたしている. $P \equiv M \otimes F_2$ 上で"

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = \varphi(x_{11}) + \lambda\varphi(x_{22}), \quad x_{ij} \in M$$

とすれば, ψ は P 上 strictly semi-finite f. n. weight (" $\sigma_{T_0}^\psi = 1$ となる. ところで $P \sim M$ は III_λ Factor であるから 命題 1.3 により, P_ψ も Factor である. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P_\psi$ は共に P_ψ で properly infinite であるから, 或る partial isometry $v \in P_\psi$ が存在して, それぞれ initial, final 射影に成っている. このとき $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x^* & 0 \end{pmatrix}$ として得られるユニタリー作用素 $X \in M$ に対し

$$\lambda\varphi(x) = \psi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\right) = \psi\left(v\begin{pmatrix} x & x^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}v^*\right) = \varphi(xxx^*)$$

となる. $N = M_\varphi$, $\theta = \text{ad } X$, $\tau = \varphi|_{M_\varphi}$ とすれば $\tau \circ \theta = \lambda\tau$ であるから, (N, θ) は a) の条件をみたしている. ここで I を N から M_φ の恒等写像とすれば, a) のように θ は N 上で free, N, N' 上で ergodic であるから, $I(N)' \cap M \subset I(N)$. φ は strictly semi-finite であるから M から $I(N)$ には f. n. 条件付期待値がある. 故に

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x^* & 0 \end{pmatrix} = \sigma_\tau^\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x^* & 0 \end{pmatrix}\right) = \sigma_\tau^\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \sigma_\tau^\varphi\left(\begin{pmatrix} x^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^{\frac{1}{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_\tau^\varphi(x^*) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから $X = \lambda^{-it} \sigma_t^{\varphi}(X)$. 任意な $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し $\sigma^{\varphi}(f)X$
 $= \int f(t) \sigma_t^{\varphi}(X) dt = \hat{f}(\lambda^{-1})X$ となるから, $\text{Sp}_{\sigma}(X) = \{\lambda^{-1}\}$. 任
 意な $x \in M(\sigma, \{\lambda^{-1}\})$ に対し, $x = X^{-n}(X^n x) \in X^{-n}I(N)$ である.

$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} M(\sigma, \{\lambda^{-n}\})$ は M で weakly total であるから, $M = (I(N) \cup \{X\})^n$ となる. 命題 1.1 により $M \sim N \otimes_{\theta} \mathbb{Z}$.

c) $M_1 \equiv N_1 \otimes_{\theta_1} \mathbb{Z}$ と $M_2 \equiv N_2 \otimes_{\theta_2} \mathbb{Z}$ を共通の III_λ Factor M で
 考える. τ_j を N_j 上の semi-finite f. n. trace, (I_j, U^{φ_j}) を
 $(N_j, \mathbb{Z})$ から M_j への canonical map, E_j を M_j から $I_j(N_j)$ へ
 の f. n. 条件付期待値とすれば, $\varphi_j \equiv \tau_j \circ I_j^{-1} \circ E_j$ は M_j 上の
 strictly semi-finite f. n. weight である. $x \in I_j(N_j)$ と y
 $\in M_j$ に対し

$$\varphi_j(xy) = \tau_j(I_j^{-1}(E_j(xy))) = \tau_j(I_j^{-1}(x) I_j^{-1}(E_j(y))) = \varphi_j(yx)$$

であるから $I_j(N_j) \subset (M_j)_{\varphi_j}$ となる. θ_j は freeかつ ergodic
 であるから $I_j(N_j)' \cap M_j \subset I_j(N_j)$. したがって $(M_j)'_{\varphi_j} \cap M_j$
 $\subset I_j(N_j)' \cap M_j \subset I_j(N_j) \cap I_j(N_j)' = \mathbb{C}$ となり φ_j は M_j 上の
 generalized trace である. $X_j = U^{\varphi_j}$ とする. 再び $I_j(N_j)' \cap M_j$
 $\subset I_j(N_j)$ であるから, 命題 1.1 の証明のようにして $E_j(X_j x X_j^*)$
 $= X_j E_j(x) X_j^*$, $x \in M_j$ となる. したがって

$$\begin{aligned} \varphi_j(X_j x X_j^*) &= (\tau_j \circ I_j^{-1} \circ E_j)(X_j x X_j^*) = \tau_j \circ \theta_j \circ I_j^{-1} \circ E_j(x) \\ &= \lambda \tau_j \circ I_j^{-1} \circ E_j(x) = \lambda \varphi_j(x). \end{aligned}$$

一方 $P_j = M_j \otimes F_2$ 上で

$$\psi_j \left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \right) = \varphi_j(x_{11}) + \varphi_j(x_{12} x_{22} x_j^*), \quad x_{ik} \in M_j$$

とすれば, $v_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_j \end{pmatrix}$ を使って $\psi_j(x) = (\varphi_j \otimes \text{Tr})(v_j x v_j^*)$ と表わせるから

$$\sigma_t^{\psi_j} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = v^* \sigma_t^{\varphi_j \otimes \text{Tr}} \left(v \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v^* \right) v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_j^* \sigma_t^{\varphi_j}(x_j) & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで $T = \lambda^n$ と $\sigma_t^{\varphi_j}(x_j) = \lambda^{-it} x_j$ とする. 又 E_{φ_j} は $E_{\varphi_j}(x) = T_0^{-1} \int_0^{T_0} \sigma_t^{\varphi_j}(x) dt$, $x \in M_j$ で表わされるから, $n \neq 0$ に対して $E_{\varphi_j}(x_j^n) = T_0^{-1} \int_0^{T_0} \sigma_t^{\varphi_j}(x_j^n) dt = T_0^{-1} \int_0^{T_0} (\lambda^{-in})^{it} x^n dt = 0$ とする. 他方 $I(N_j) \subset (M_j)_{\varphi_j}$ かつ $M_j = (I_j(N_j) \cup \{x_j\})''$ であるから $E_j = E_{\varphi_j}$ となり $I_j(N_j) = (M_j)_{\varphi_j}$ が得られる. さて φ_j は M の generalized trace であるから, $\sigma_t^{\varphi_j}(x) = u_t^{\varphi_j} \sigma_t^{\varphi_j}(x) u_t^{\varphi_j*}$, $x \in M$ なる intertwining operator $u_t^{\varphi_j} \in M$ がある. さらに $\sigma_{T_0}^{\varphi_j} = 1$ であるから $u_{T_0}^{\varphi_j} \in \mathbb{C}$, すなわち, ある $\alpha > 0$ に対して $\alpha T_0 = u_{T_0}^{\varphi_j}$ とする. $P \equiv M \otimes F_2$ 上で (6) のように

$$\psi \left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \right) = \varphi_1(x_{11}) + \alpha \varphi_2(x_{22}), \quad x_{ik} \in M$$

とすれば, ψ は P 上の generalized trace になり, しかも $\alpha \varphi_2(x) = \varphi_1(X x X^*)$, $x \in M$ となるような $\pm$ -タリ-作用素 $X \in M$ がある. T_2 の代わりに $\alpha^{-1} T_2$ を使って改めて φ_2 を定義し直すと, $\varphi_2(x) = \varphi_1(X x X^*)$, $x \in M$ となる. 上と同じようにして

$\sigma_t^{q_2}(X) = u_t^{q_1 q_2} X$ が得られる. ここで $x \in I_2(N_2) = M_{q_1}$ ならば,
 $\sigma_t^{q_2}(X^* x X) = \sigma_t^{q_2}(X^*) \sigma_t^{q_2}(x) \sigma_t^{q_2}(X) = \sigma_t^{q_2}(X^*) u_t^{q_1 q_2} x u_t^{q_1 q_2*} \sigma_t^{q_2}(X) \underset{= X^* x X}{=} \text{と} \text{な}$
 る. ここで $J = I_2^{-1} \circ \text{ad } X^* \circ I_1$ とすれば, J は N_1 から N_2 上への
 同型写像である. また $\text{Sp}_{\text{ort}}((\text{ad } X^*(x_1))x_2^*) \subset \text{Sp}_{\text{ort}}(x_1) \text{Sp}_{\text{ort}}(x_2^*)$
 $= \{1\}$ であるから, $I_2(u) = (\text{ad } X^*(x_1))x_2^*$ なる u = タリー作用素
 $u \in N_2$ がある. したがって $y \in N_1$ に対し

$$\begin{aligned}
 I_2 J \theta_1(y) &= X^*(I_1 \theta_1(y))X = X^* x_1 I_1(y) x_1^* X \\
 &= I_2(u) x_2 x^* I_1(y) X x_2^* I_2(u^*) \\
 &= I_2(u)(I_2 \theta_2 J(y)) I_2(u^*) = I_2(u(\theta_2 J(y)) u^*).
 \end{aligned}$$

ここで $x \in N_2$ に対し $J \theta_1 J^{-1} \theta_2^{-1}(x) = u x u^*$.

この定理と McDuff による II_1 型 Factor は連続濃度以上ある
 という結果を組み合わせれば, 可分なヒルベルト空間上には同
 型でない III_λ Factor が連続濃度以上存在することがわかる.

III_0 Factor に対しても上と同様な定理は成立するが, (4) (c)
 に対応する命題にはこれまでの結果をそのまま適用すること
 ができない. そこでそれに対応する補助定理を用意する.

補助定理 1.7. G を局所コンパクト ^{可換}群, M を Factor, U を
 G から M 上の自己同型写像群の中への準同型写像で M^U が
 properly infinite に成っているようなものとする. $x \in M$ に

対し $e = S^M(x)$, $e' = S^M(x^*)$ とする. もし $(Sp_U(x) - Sp_U(x)) \cap (Sp_U e \cup Sp_U e') = \{0\}$ ならば, initial と final 射影が M^U の中心に含まれるような partial isometry v と M^U の正值自己共役作用素 k が次のように存在する:

- 1) $Sp_U(v) \subset Sp_U(x)$
- 2) $x = vk$
- 3) $vM^U v^* \subset M^U$, $v^* M^U v \subset M^U$

証明. $E = Sp_U(x)$ とおき, x の極分解を $x = u|x|$ とする. x のスペクトルに対し仮定された条件により xx^* , $x^*x \in M^U$, したがって $e = u^*u$, $e' = uu^* \in M^U$. e, e' の M^U の中心での包をそれぞれ c, c' とする. $M_e^U, M_{e'}^U$ は $M^U \cap M^{U'}$ の射影 $d \leq c, d' \leq c'$ を使, て次のように properly infinite な部分と finite な部分に直和分解される:

$$M_e^U = M_{de}^U \oplus M_{(c-d)e}^U, \quad M_{e'}^U = M_{d'e'}^U \oplus M_{(c'-d')e'}^U.$$

$y \in M_e^U$ ならば $uy u^* \in M_{e'}$ となる. $Sp_U(uy u^*) \subset (E - E) \cap Sp_U e' = \{0\}$ であるから $uy u^* \in M_{e'}^U$ である. M_e^U から $M_{e'}^U$ への同型写像 adu は type (型) を保存するから $udeu^* = d'e'$ となる. 仮定により M^U は properly infinite でありかつ σ -finite であるから, $(c-d)(c-e)$ の分割 $\{e_n\}_{n=2}^\infty \subset M^U$ で $e_n \sim e_1 \equiv (c-d)e$ と成るものがある. 同様に $(c'-d')(c'-e')$ の分割 $\{e'_n\}_{n=2}^\infty \subset M^U$

$e_i' \sim e_i' \equiv (c' - d')e_i'$ となるものがある. ここで $w_j, w_j' \in M^U$
 を $w_j^* w_j = e_1, w_j w_j^* = e_j, w_j'^* w_j' = e_1', w_j' w_j'^* = e_j'$ に選ぶ.
 $M_{de}^U, M_{d'e'}^U$ は properly infinite であるから, $w_0, w_0' \in M^U$ が存
 在して $w_0^* w_0 = de, w_0 w_0^* = d, w_0'^* w_0' = d'e', w_0' w_0'^* = d'$ と
 なる. ここで $v \equiv \sum_{j=0}^{\infty} w_j' u w_j^*$ とすれば, $v^* v = c, v v^* = c'$
 かつ $Sp_U v \subset E$ である. e の M^U での中心の値が c であつた
 から $(E - E) \cap Sp_U c = (E - E) \cap Sp_U c' = \{0\}$ となる. したがつて
 $y \in M^U$ に対し $Sp_U(v^* y v) \subset (E - E) \cap Sp_U c = \{0\}$, すなわち,
 $v^* y v \in M^U$. 同様にして $v y v^* \in M^U$ となる. $k \equiv v^* x$ と
 すれば, $Sp_U k \subset (E - E) \cap Sp_U c = \{0\}$ となり $k \in M^U$ かつ $x = v k$
 である. $\checkmark$
 $k \geq 0$

局所コンパクト可換群 G から Factor M の自己同型写像群の
 中への準同型写像 U, V が $U \sim V$ であるとは, G から M の $\mathcal{U}$
 ニタリ一群の中への強連続な写像 u があつて

$$1) \quad u_{t_1+t_2} = u_{t_1} U_{t_1}(u_{t_2}), \quad t_1, t_2 \in G$$

$$2) \quad V_t(x) = u_t U_t(x) u_t^*, \quad x \in M, t \in G$$

をみたすことである.

定理 1.10 の b) を示すために

補助定理 1.8. 可換な加群 R の双対群 $\hat{R} = R$ を $\langle t, r \rangle = e^{it_r}$,

で対応付ける. M を Factor, U を次の条件をみたすような R から M の自己同型写像群の中への準同型写像とする:

a) $U \neq 1$

b) M^U は properly infinite な von Neumann 代数

c) 0 は $Sp U$ で孤立している.

このとき M の Σ -タリ-作用素 X で $XM^UX^* = M^U$, $M = (M^U \cup \{x\})''$, $Sp_U(X) \subset (0, \infty)$ をみたすものがある.

証明. c) より $Sp U \cap [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] = \{0\}$ をみたす $\varepsilon_0 > 0$ がある.

$C \equiv M^U \cap (M^U)'$, M の partial isometries 全体を M_{pi} , $J \equiv \{v \in M_{pi} : v^*v, vv^* \in C, vM^Uv^* \subset M^U, v^*M^Uv \subset M^U\}$ とし, $v_1 \in J$ が $v_2 \in J$ の拡張に成, ている場合には $v_2 < v_1$ と表わす. さらに

$$E_0 \equiv \{v \in J : Sp_U(v) \subset (\varepsilon_0, \infty), Sp_U(v) - Sp_U(v) \subset [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2]\}$$

$$E_1 \equiv \{v \in E_0 : v_1, v_2 \in E_0, v_1 v_2 < v \text{ ならば } v_1 v_2 = 0\}$$

とする. 証明を 5 つの部分に分ける.

1) 任意な $v \in E_0$, $v \neq 0$ に対し $0 \neq v_1 v_2 \dots v_p < v$ なる $v_j \in E_1$ があることを示す. $Sp_U(v) \subset (0, \varepsilon_0)$ の場合は上が成り立つ. $Sp_U(v) \subset (0, n\varepsilon_0)$, $n \in \mathbb{N}$ をみたす任意な $v \in E_0$, $v \neq 0$ に対して上が成り立つものとする. 今 $v \in E_0$, $v \neq 0$, $Sp_U(v) \subset (0, (n+1)\varepsilon_0)$ とする. $v \notin E_1$ と仮定できるから, $0 \neq w_1 w_2 < v$ なる $w_1, w_2 \in E_0$ がある. $e \equiv w_1^* w_1 \in C$, $w_3 \equiv e w_2 \in E_0$, $f \equiv s(w_2^* w_1^*) \in C$ と置

1) は, $w_3 \neq 0$ かつ $Sp_U(w_3) = Sp_U(w_1^* w_1 w_2) = Sp_U(w_1^* f v) \subset Sp_U(v)$
 $- Sp_U(w_1) \subset (0, (n+1)\varepsilon_0) + (-\infty, -\varepsilon_0) = (-\infty, n\varepsilon_0)$ となるから, 仮定に
 より $0 \neq v_1 \cdots v_p < w_3$ なる $v_j \in \mathcal{E}_1$ がある. $f' = S(v_p^* \cdots v_1^*) \in \mathcal{C}$ と
 すれば $w_1 f' \in \mathcal{E}_0$ かつ $Sp_U(w_1 f') = Sp_U(w_1 w_1^* f v v_p^* \cdots v_1^*) \subset Sp_U(v)$
 $- Sp_U(v_1 \cdots v_p) \subset (-\infty, n\varepsilon_0)$ となるから, 再び仮定により, $0 \neq v_{p+1} \cdots$
 $v_{p+q} < w_1 f'$ なる $v_j \in \mathcal{E}_1$ がある. L_T かつ,

$$0 \neq v_{p+1} \cdots v_{p+q} v_1 \cdots v_p < w_1 f v_1 \cdots v_p < w_1 f w_3 < w_1 w_3 < v.$$

これで帰納法により 1) が示された.

2) i) $u \in \mathcal{J}$ かつ $Sp_U(u) \subset (\varepsilon_0, \infty)$, $Sp_U(u) - Sp_U(u) \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$
 をみたせば, $w \in \mathcal{E}_0$, $w \neq 0$ かつ $w < u$. ii) $v_1, v_2 \in \mathcal{E}_1$
 ならば $v_2^* v_1, v_1 v_2^* \in M^U$. 先ず i) を示す. $g \in L(\mathcal{R})$ を
 $\text{Car } \hat{g} - \text{Car } \hat{g} \subset [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2]$ と $u^*(U(g)u) \neq 0$ をみたすよう
 に選ぶ. $x \equiv U(g)u$, $e = S^M(x)$, $e' = S^M(x^*)$ とすれば, $(Sp_U(x) -$
 $Sp_U(x)) \cap (Sp_U e \cup Sp_U e') = \{0\}$ となるから 補助定理 1.7 により
 $v \in \mathcal{J}$, $k \in M^U$ が存在して $U(g)u = vk$, $Sp_U(v) \subset Sp_U(U(g)u)$
 となる. $k^* v^* u = (U(g)u)^* u \neq 0$ であるから $v^* u \neq 0$.
 $Sp_U(v) \subset Sp_U(U(g)u) \subset Sp_U(u) \cap \text{Car } \hat{g}$ であるから, $v \in \mathcal{E}_0$. L
 かつ $Sp_U(v^* u) \subset Sp_U(u) - Sp_U(u) \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. ここで
 $w \equiv v v^* u \in \mathcal{J}$ とすれば $w \neq 0$ かつ $Sp_U(w) \subset Sp_U(v)$ であ
 るから, $w \in \mathcal{E}_0$ かつ $w < u$ となる. 次に ii) を示す.
 $u = v_2^* v_1$ とする. $Sp_U(u) - Sp_U(u) \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ であるから,

$Sp_U(u) \subset \{0\}$ 又は (ε_0, ∞) 又は $(-\infty, -\varepsilon_0)$ である. $z = z'' Sp_U(u) \subset (\varepsilon_0, \infty)$ と仮定する. i) により $w \in \varepsilon_0, w \neq 0$ があって $w < u$ となるから $v_1 w < v_1 v_1^* v_2 < v_2$ となる. $S(w^*) \leq S(u^*) \leq S(v_1)$ であるから $v_1 w \neq 0$ となり, $v_2 \in \varepsilon_1$ と矛盾する. $Sp_U(u) \subset (-\infty, -\varepsilon_0)$ の場合も同様にして矛盾を生ずるから $v_1^* v_2 \in M^U$ である.

3) $(\varepsilon_1 \cup M^U)'' = M$ を示す.

$$N \equiv \{x \in M : Sp_U(x) - Sp_U(x) \subset [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2]\}$$

とすれば, N は M で weakly total である. $Sp_U(x) \subset (\varepsilon_0, \infty)$ なる $x \in N$ に対して補助定理 1.7 を適用すると, $x = v k$ なる $v \in \varepsilon_0$ と $k \in M^U$ がある. $e \equiv v^* v$, $\mathcal{K} \equiv \{e' \in C : e' \leq e, v e' \in (\varepsilon_1 \cup M^U)''\}$ とすれば, $\mathcal{K}$ は通常の順序により σ -完備集合^{と1)} になり, $\mathcal{K}$ に極大な元 e_1 がある. 極大性_{から} $e_1 = e$ である. したがって $v = v e \in (\varepsilon_1 \cup M^U)''$, $x = v k \in (\varepsilon_1 \cup M^U)''$. これで $(\varepsilon_1 \cup M^U)'' = M$ が示された.

4) $\{v_j\} \subset \varepsilon_1$ を $v_j \neq 0, v_j v_k^* = 0, v_j^* v_k = 0$ ($j \neq k$) をみたすような極大集合とし, $e \equiv \sum v_j^* v_j$, $e' \equiv \sum v_j v_j^*$ とする. もし $1 - e \neq 0$ ならば, a) より $U^{1-e} \neq 1$, すなわち, $Sp_U(z_1) \neq \{0\}$ なる $z_1 \in M_{1-e}$ がある. したがって $Sp_U(x) - Sp_U(x) \subset [-\varepsilon_0/2, \varepsilon_0/2]$ と $Sp_U(x) \subset (\varepsilon_0, \infty)$ をみたす $x \in M_{1-e}$ がある. ここで補助定理 1.7 を適用すると $v^* v, v v^* \leq 1 - e$ なる

$v \in E_0, v \neq 0$ がある. L だから 1) により $w \in E_1, w \neq 0$ があり $w^*w \leq 1 - e$. 2) の ii) によれば $w^*v_j \in M^0$ である. さらに $S(w^*v_j) \leq e_j, S(v_j^*w) \leq 1 - e_j$ だから $S(w^*v_j), S(v_j^*w) \in C$ であるから $w^*v_j = 0, v_j w^* = 0$ は明らかだから $\{v_j\}$ の極大性に矛盾する. L だから $e = 1$. 同様に L' について $e' = 1$ である.

5) 4) で得られた $\{v_j\}$ を使って $X \equiv \sum v_j \in U$ とすれば X は U のユニタリーで $XM^0X^* = M^0$ となる. $v \in E_1$ ならば $X^*v \in M^0$, L だから $v \in XM^0$, 即ち, $M = (M^0 \cup \{X\})''$. さらに $Sp_U(v_j) \subset (E_0, \infty)$ であるから, $Sp_U(X) \subset (E_0, \infty)$.

定理 1.10 の c) を示すために次の補助定理を用意する.

補助定理 1.9. M を III₀-Factor, φ_1 と φ_2 を M 上の generalized trace とする. 任意な $\varepsilon > 0$ に対して次の条件をみたすような $0 \neq v$ partial isometry $v \in M$ がある:

- $e_1 \equiv v^*v \in M_{\varphi_1} \cap M'_{\varphi_1}, e_2 \equiv vv^* \in M_{\varphi_2} \cap M'_{\varphi_2}$
- $j \equiv \text{ad } v \upharpoonright M_{e_1}$ は M_{e_1} から M_{e_2} 上への同型写像で $j(M_{\varphi_1} \cap M_{e_1}) = M_{\varphi_2} \cap M_{e_2}$.

- $\sigma_j \equiv \sigma_{\varphi_j} \upharpoonright M_{e_j}$ とすれば, $x \in M_e$ に対して

$$\text{Log } Sp_{\sigma_2}(jx) \subset \text{Log } Sp_{\sigma_1}(x) + [-\varepsilon, \varepsilon]$$

$$\text{Log } Sp_{\sigma_1}(x) \subset \text{Log } Sp_{\sigma_2}(jx) + [-\varepsilon, \varepsilon].$$

$\sigma_k = \sigma^{\varphi_k}$ とする.

証明. $\bigwedge \text{Log}(Sp \sigma_k) \cap [-\varepsilon, \varepsilon] = \{0\}$ と仮定できる. $P = M \otimes F_2$ 上
で

$$\psi \left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \right) = \varphi_1(x_{11}) + \varphi_2(x_{22}), \quad x_{ij} \in M$$

とし, $\sigma = \sigma^{\psi}$ とし, M から P への同型写像 I_1, I_2 を

$$I_1(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

で与え, $I_k(\sigma_{k,t}(x)) = \sigma_t(I_k(x))$, $x \in M$ とする. $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
 $f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P_{\psi}$ は, $P_{\psi, t_k} = I_k(M_{\varphi_k})$ であることに注意すれば,

P_{ψ} は properly infinite である. したがって, P_{ψ} は properly infinite
である. t_k の P_{ψ} の中心での台を a_k とすれば, $Sp \sigma^{a_k} = Sp \sigma_k$
となるから, $0 \neq \text{Log } Sp \sigma^{a_k}$ で置き換えていい. P は Factor である

から $f_2 \times f_1 \neq 0$ なる $x \in P$ がある. $g \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$ と

$\text{Log } \text{Car } \hat{g} - \text{Log } \text{Car } \hat{g} \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, $\sigma(g)(f_2 \times f_1) \neq 0$ となるように
選ぶ. $\gamma \equiv \sigma(g)(f_2 \times f_1)$ とすれば, $f_2 \gamma = \gamma = \gamma f_1$ となる. さ

ら $\text{Log } Sp_{\sigma}(\gamma^* \gamma) \subset \text{Log } Sp_{\sigma}(\gamma) - \text{Log } Sp_{\sigma}(\gamma) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$, $Sp_{\sigma}(\gamma \gamma^*)$
 $\subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ であるから, $\gamma^* \gamma, \gamma \gamma^* \in P_{\psi}$ である. $e \equiv s(\gamma)$, e'

$\equiv s(\gamma^*)$ とし, e と e' の P_{ψ} の中心での台をそれぞれ b_1, b_2 と

すれば, $b_j \neq 0$ かつ $b_j \leq a_j$ となる. 再び $(\text{Log } Sp_{\sigma}(\gamma) - \text{Log}$

$Sp_{\sigma}(\gamma)) \cap (\text{Log } Sp \sigma_1 \cup \text{Log } Sp \sigma_2) = \{0\}$ であるから, 補助定理 1.7

により partial isometry $v_i \in P$ が存在して $v_i^* v_i = b_i$, $v_i v_i^* = b_2$,

$Sp_\sigma(v_1) \subset Sp_\sigma(\gamma)$ をみたしてゐる。したがつて, $\gamma \in P_{\mathcal{B}_1} = \mathcal{K} \cap \mathcal{L}$

$$\text{Log } Sp_\sigma(v_1 \gamma v_1^*) \subset \text{Log } Sp_\sigma(\gamma) + [-\varepsilon, \varepsilon]$$

$$\text{Log } Sp_\sigma(\gamma) \subset \text{Log } Sp_\sigma(v_1 \gamma v_1^*) + [-\varepsilon, \varepsilon]$$

となる。 $e_k \equiv I_k^*(b_k f_k) \in M_{P_k}$ とすれば, $b_k f_k$ は P_4 上 properly

infinite である。したがつて $w_k^* w_k = b_k f_k$, $w_k w_k^* = b_k$ なる

$w_k \in P_4$ がある。 $u \equiv w_2^* v_1 w_1$ とすれば, $v^* v = e_1$, $v v^* = e_2$

をみたす $v \in M$ が存在して $u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v & 0 \end{pmatrix}$ と表わせる。 $Sp_{\sigma_1}(x) =$

$Sp_\sigma(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ かつ $Sp_{\sigma_2}(v x v^*) = Sp_\sigma(u \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u^*)$ であるから,

$$\text{Log } Sp_{\sigma_1}(x) - \text{Log } Sp_{\sigma_2}(j x) \subset \text{Log } Sp_\sigma(u) - \text{Log } Sp_\sigma(u)$$

$$\subset \text{Log } Sp_\sigma(v_1) - \text{Log } Sp_\sigma(v_1) \subset [-\varepsilon, \varepsilon].$$

同様にして

$$\text{Log } Sp_{\sigma_2}(j x) - \text{Log } Sp_{\sigma_1}(x) \subset [-\varepsilon, \varepsilon].$$

定理に入る前に induced 自己同型写像を想起しておこう。

中心が non atomic な II_∞ 型 von Neumann 代数 N 上の自己

同型写像 θ が $N \cap N'$ 上で ergodic ならば θ は $N \cap N'$ 上

conservative である。したがつて, 任意な $e \in N \cap N'$ に対し,

e の分割 $\{d_n\}_{n=1}^\infty \subset N \cap N'$ が存在して $j=1, \dots, n-1$ に対し

$e \theta^j(d_n) = 0$, $\theta^n(d_n) \leq e$, $\sum_{n=1}^\infty \theta^n(d_n) = e$ となつてゐる。

こゝとき

$$\theta_e(x) = \sum_{n=1}^\infty \theta^n(x d_n) \quad x \in N_e$$

とすれば, $\theta_e \oplus 1_{(1-e)} \in [\theta]$ である. この θ_e を θ の e 又は N_e 上への induced 自己同型写像 という.

定理 1.10. a) N を $N \cap N'$ が non atomic な II_∞ von Neumann 代数, τ をその上の semi-finite f. n. trace, θ を $N \cap N'$ 上で ergodic な N の自己同型写像で $\tau \circ \theta \leq \lambda_0 \tau$, $0 < \lambda_0 < 1$ をみたしているようなものとすれば, $N \otimes_{\theta} \mathbb{Z}$ は III_∞ Factor である.

b) M が III_∞ Factor ならば a) の条件をみたすような (N, θ) が存在して $M \sim N \otimes_{\theta} \mathbb{Z}$ である.

c) $(N_1, \theta_1), (N_2, \theta_2)$ が a) の条件をみたしているとき, $N_1 \otimes_{\theta_1} \mathbb{Z} \sim N_2 \otimes_{\theta_2} \mathbb{Z}$ であるための完全条件は $e_j \in N_j \cap N_j'$, $e_j \neq 0$ と N_{1,e_1} から N_{2,e_2} 上への同型写像 J が存在して $J\theta_{1,e_1}J^{-1}\theta_{2,e_2}^{-1}$ が N_{2,θ_2} で内部自己同型写像になっていることである. ただし θ_{j,e_j} は θ_j の e_j 上への induced 自己同型写像である.

証明. a) θ は $N \cap N'$ で ergodic でしかも $\tau \circ \theta \leq \lambda_0 \tau$ であるから, $n \neq 0$ に対し $p(\theta^n) \neq 0$, つまり θ は N 上で free である. したがって, $M = N \otimes_{\theta} \mathbb{Z}$ は Factor である. $p_n = d\tau \circ \theta^n / d\tau$ とすれば, $n > 0$ のとき $\tau(p_n \chi) \leq \lambda_0^n \tau(\chi)$,

$\lambda_0^{-n} \tau(x) \leq \tau(\rho_{-n} x)$, $x \in N_+$ である. したがって $n > 0$ に対し
 $0 < \rho_n \leq \lambda_0^n < 1$, $1 \leq \lambda_0^{-n} \leq \rho_{-n}$ となる. $\lambda \in (0, 1)$ と
 すると $\lambda_0^{n_0} < \lambda < 1$ なる $n_0 > 0$ と $\lambda_0^{n_0}, 1 \notin (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ なる ε
 > 0 がある. $N \cap N'$ が non atomic であることと, θ が $N \cap N'$ 上
 ^{θ が free, 従って}
 で ergodic なことから, $\wedge_0$ でない射影 $e \in N \cap N'$ で $e, \theta^{-1}e, \dots$
 $\theta^{-n_0}e$ が互に直交しているものがある. もし $N \cap N'$ が 0 で
 ない射影 d で, ある n' に対し $d \leq e$, $\theta^{n'}d \leq e$, $\sigma(\rho_{-n'} | N_d)$
 $\subset (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)$ が成り立っているとすると, $\lambda + \varepsilon < 1$ である
 ことから, $n' < 0$ でなければならぬ. したがって $\lambda_0^{n_0} \leq$
 $\rho_{-n'} | N_d \leq \lambda_0^{n'}$, すなわち, $-n' < n_0$ であるが, これは $e \theta^{n'} e$
 $= 0$ と矛盾する. したがって第 3 章の定理により $\lambda \notin S(M)$
 となり, $S(M) \subset \{0, 1\}$ が得られる. 次に M が semi-finite
 でないことを示す. もし N 上に θ -不変な semi-finite f.n.
 trace τ_1 が存在したとすると. $h \equiv d\tau/d\tau_1$ が $N \cap N'$ に対し

$$\tau_1(\theta^{-1}h)x = \tau(\theta x) \leq \lambda_0 \tau(x) = \lambda_0 \tau_1(hx), \quad x \in N_+$$
 であるから, $h \leq \lambda_0 \theta h$ となる. $h = \int \lambda de(\lambda)$ とすれば,
 ある n に対して $e \equiv e([\lambda_0^{n+1}, \lambda_0^n]) \neq 0$. したがって, 0 でな
 い $e_1, e_2 \in N \cap N'$ が $e_1, e_2 \leq e$, $e_1 e_2 = 0$ となるように選べ
 る. すべての $k > 0$ に対し $\theta^k e_j \leq e([0, \lambda_0^{n+k}])$ であるから
 $\bigvee_n \theta^n(e_j)$ は θ -不変である. これは θ の ergodic 性と矛盾する.
 したがって, M は III. Factor である.

補) 命題 1.5 により M 上には generalized trace φ がある. $\tau = \varphi \upharpoonright M_\varphi$
 $= \sigma_\varphi$, $N = M_\varphi$, $E = E_\varphi$, I を N から M の中への恒等写像とする.
 もし M が semi-finite でなければ, σ は補助定理 1.8 の条件をすべて満たす. したがって, M のユニタリー作用素 X が
 存在して $XM^\sigma X^* = M^\sigma$, $M = (M^\sigma \cup \{X\})''$, $Sp_\sigma(X) \subset (1, \infty)$ と
 なっている. $\rho \equiv d\tau_X/d\tau$ とすれば, 定理 1.6 の c) の証明の
 中のようにして $\sigma_\tau^\varphi(X) = X\rho^{1/2}$ となる. $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ に対して

$$\sigma_\tau^\varphi(f)X = \int f(t)\sigma_\tau^\varphi(X)dt = \int f(t)X\rho^{1/2}dt = X\hat{f}(\rho^{-1})$$

であるから $Sp_\sigma(X) = \sigma(\rho^{-1})$. したがって $\sigma(\rho^{-1}) \subset (1, \infty)$, す
 なわち, $\sigma(\rho) \subset [0, \lambda_0]$ なる $\lambda_0 < 1$ がある. $\theta x = XxX^*$, x
 $\in N$ とすれば $\tau \circ \theta \leq \lambda_0 \tau$ である. $e \in N \cap N'$, $\theta e = e$ ならば
 $e \in (M_\varphi \cup \{X\})' = M'$ となり, θ は $N \cap N'$ 上で ergodic となる.
 $\tau \circ \theta \leq \lambda_0 \tau$ であるから $\rho(\theta^n) = 0$, $n \neq 0$ となり θ は N の free
 である. 命題 1.2 により $\mathcal{U} = \mathcal{U}' \cap M \subset M_\varphi$ なる $\mathcal{U}$ があるから,
 $M'_\varphi \cap M \subset \mathcal{U}' \cap M = \mathcal{U} \subset M_\varphi$. したがって命題 1.1 により $M \sim$
 $N \otimes \mathbb{Z}$ となる. あとは semi-finite von Neumann algebra N
これを改めて N とす
 が I_∞ 型でないことを示せばよい. もし N が I_∞ 型の部分があれば, すると,
 中心での値が 1 であるような abelian 射影 $e \in N$ が
 ある. $\theta e \neq e$ な場合には $\theta' e = e$ なる $\theta' \in \Sigma_N(\theta)$ を選んで直
から $\theta e = e$ と仮定できる.
 せば θ と θ' は同じ役割を果たしている. $\tau \upharpoonright N_e$ は N_e 上で semi-
 $N_e =$
 finite f.m. trace であるし, θ は $(N \cap N')_e$ 上で ergodic である.

N_e は non atomic であるから, θ は conservative である.

これは $\tau \circ \theta \leq \lambda \tau$ と矛盾する.

(c) τ_j を N_j 上の semi-finite f. n. trace で $\tau_j \circ \theta_j \leq \lambda_0 \tau_j$, $\lambda_0 < 1$ を満たすものとする. $M_j = N_j \otimes_{\theta_j} \mathbb{Z}$, $(I_j, U_j^{(1)})$ を $(N_j, \mathbb{Z})$ から M_j への canonical map, E_j を M_j から $I_j(N_j)$ への f. n. 条件付期待値, $X_j = U_j^{(1)}$, $\varphi_j = \tau_j \circ I_j^{-1} \circ E_j$, $\sigma_j = \sigma^{\varphi_j}$ とし, $\varepsilon > 0$ を $\varepsilon < -\log \lambda_0$ に選ぶ. $M_1 \sim M_2$ であるから $M_1 = M_2 = M$ とできる. M 上で φ_j は strictly semi-finite f. n. weight である. $\rho_n \equiv d\tau_j \circ \theta^n / d\tau_j$ とすれば (b) のように $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$\sigma(f) X_j^n = \int f(t) \sigma_t(X_j^n) dt = X_j^n \hat{f}(\rho_n^{-1})$$

であるから $Sp_{\sigma_j}(X_j^n) = \sigma(\rho_n^{-1})$. ところで $n > 0$ のとき $0 < \rho_n \leq \lambda_0^n$ と $\lambda_0^{-n} \leq \rho_{-n}$ であるから, $Sp_{\sigma_j}(X_j^n) \subset (\lambda_0, \lambda_0^{-1})^c$ となる. 条件付期待値の与え方により $n \neq 0$ に対し $E_j(X_j^n) = 0$ であるから, $X_j^n - E(X_j^n) \in M(\sigma_j, (\lambda_0, \lambda_0^{-1})^c)$ となる. $I_j(N_j) \subset M^{\sigma_j}$ であるから, 任意な $x \in M$ に対して $x - E_j(x) \in M(\sigma_j, (\lambda_0, \lambda_0^{-1})^c)$, つまり, $Sp_{\sigma_j}(x) \setminus \{1\} \subset (\lambda_0, \lambda_0^{-1})^c$ が成り立つ. したがって $Sp_{\sigma_j} \cap (\lambda_0, \lambda_0^{-1}) = (\bigcup_{x \in M} Sp_{\sigma_j}(x)) \cap (\lambda_0, \lambda_0^{-1}) = \{1\}$ となり, $Sp_{\sigma_j} = \sigma(\Delta_{\varphi_j})$ であるから, 1 は $\sigma(\Delta_{\varphi_j})$ で孤立している. 再び定理 1.6 の (c) の証明のように $M_{\varphi_j} = I_j(N_j)$ であるから M_{φ_j} は properly infinite となる. したがって, φ_j は M 上の generalized trace に成っている. ここで補助定理 1.9 を使うと partial isometry

$v \in M$ がある, $v^*v \in M_{\varphi_1} \cap M'_{\varphi_1}$, $vv^* \in M_{\varphi_2} \cap M'_{\varphi_2}$, $j = \text{ad } v \upharpoonright M_{v^*v}$,
 $j(M_{\varphi_1} \cap M_{v^*v}) = M_{\varphi_2} \cap M_{vv^*}$, $z \in M_{v^*v}$ に対し $\text{Log } \text{Sp}_{\sigma_1}(jx) \subset$
 $\text{Log } \text{Sp}_{\sigma_1}(z) + [-\varepsilon, \varepsilon]$ となる. $e_1 = I_1^{-1}(v^*v)$, $e_2 = I_2^{-1}(vv^*)$
 とすれば, $I_1(N_1, e_1) = M_{\varphi_1} \cap M_{v^*v}$, $I_2(N_2, e_2) = M_{\varphi_2} \cap M_{vv^*}$ となる.
 $J = I_2^{-1} \circ j \circ I_1$ とすれば J は N_1, e_1 から N_2, e_2 上への同型写像であ
 る. θ_j は $N_j \cap N'_j$ 上で conservative であるから, e_j の分割
 $\{d_{j,n}\}_{n=1}^{\infty} \subset N_j \cap N'_j$ を使って N_j, e_j 上へ induced 自己同型写像
 $\theta_{(j)} \equiv \theta_j|_{e_j}$ を導くことができる. $N_{(j)} \equiv N_j, e_j$, $M_{(j)} \equiv N_{(j)} \otimes_{\theta_{(j)}} \mathbb{Z}$,
 $\tau_{(j)} \equiv \tau_j \upharpoonright N_{(j)}$, $(I_{(j)}, U_{(j)})$ を $(N_{(j)}, \mathbb{Z})$ から $M_{(j)}$ への canonical
 map, $E_{(j)}$ を $M_{(j)}$ から $I_{(j)}(N_{(j)})$ への f. n. 条件付期待値, $X_{(j)}$
 $= U_{(j)}^{\dagger}$, $\varphi_{(j)} = \tau_{(j)} \circ I_{(j)}^{-1} \circ E_{(j)}$, $\sigma_{(j)} = \sigma_{\varphi_{(j)}}$ とする. 接合積の
 定義の仕方から $X_{(j)} I_{(j)}(N_{(j)}) X_{(j)}^* = I_{(j)}(N_{(j)})$ である.

命題 1.1 を使って $M_{(j)}$ と $M_{I_j(e_j)}$ の間の同型写像を求めるときに,
 命題の条件 a), b), c) を調べる. 補⁽²⁾ 命題 1.2 により
 $I_j(N_j)' \cap M_j \subset I_j(N_j)$ であるから $I_j(N_j, e_j)' \cap M_{I_j(e_j)} \subset I_j(N_j, e_j)$.
 E_j の $M_{I_j(e_j)}$ 上への制限は $M_{I_j(e_j)}$ から $I_j(N_j, e_j)$ 上への f. n. 条
 件付期待値である. $Y_j \equiv \sum_{n=1}^{\infty} X_j^n I_j(d_{j,n})$ とすれば, $I_j(\theta_{(j)} x)$
 $= Y_j I_j(z) Y_j^*$, $z \in N_{(j)}$ である. $(I_j(N_j, e_j) \cup \{Y_j\})'' \subset M_{I_j(e_j)}$ であ
 るから逆向きの包含関係を示そう. $I_j(e_j) X_j^n I_j(e_j) = X_j^n I_j(\theta_j^n$
 $(e_j) e_j)$ となる. $\theta_j^n(e_j) e_j$ は次のような射影 $d \in N_j \cap N'_j$ の和
 で表わせる: $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$, $d \leq d_{j,k_1}$, $\theta_j^{k_1}(d) \leq d_{j,k_2}$, ...

$\theta_j^{k_1+\dots+k_r}(a) \leq d_{k_1}$. また $Y_j I_j(d) = X_j^{k_1} I_j(d)$, $Y_j^2 I_j(d) = Y_j X_j^{k_1} I_j(d)$
 $= Y_j I_j(\theta_j^{k_1} d) X_j^{k_1} = X_j^{k_2} I_j(\theta_j^{k_1} d) X_j^{k_1} = I_j(\theta_j^{k_1+k_2} d) X_j^{k_1+k_2}$, ..., $Y_j^p I_j(d) =$
 $I_j(\theta_j^{k_1+\dots+k_r} d) X_j^{k_1+\dots+k_r} = X_j^n I_j(d)$ となるから $X_j^n I_j(d) \in (I_j(N_{q_1}) \cup \{Y_j\})^n$.

したがって $M_{I_j(e_j)} = (I_j(N_{q_1, e_j}) \cup \{Y_j\})^n$ となる. ここで命題 1.1
を適用すれば, M_{q_1} から $M_{I_j(e_j)}$ 上への同型写像 J_j があって $J_j I_{q_1}$
 $= I_j$, $J_j(X_{q_1}) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{q_1}^n I_j(d_{j,n})$, $\varphi_{q_1} = \varphi_j \circ J_j$ となるが成り立
つ. つまり下の図が可換である.

$$\begin{array}{ccc}
 M_{I_1(e_1)} & \xrightarrow{j} & M_{I_2(e_2)} \\
 \uparrow J_1 & \swarrow I_1 & \nearrow I_2 \\
 N_{q_1} = N_{1, e_1} & \xrightarrow{J} & N_{q_2} = N_{2, e_2} \\
 \swarrow I_{q_1} & & \searrow I_{q_2} \\
 M_{(1)} = N_{(1)} \otimes_{\theta_{(1)}} \mathbb{Z} & & M_{(2)} = N_{(2)} \otimes_{\theta_{(2)}} \mathbb{Z}
 \end{array}$$

ここで $Y_j = J_j(X_{q_1})$ であるが, Y_j は上のような性質を持っている
ので, 以前と同じ論法を繰り返して $I_j(N_{q_1}) = (M_{q_1})_{\varphi_{q_1}}$, したが
って $I_j(N_{1, e_1}) = (M_{I_1(e_1)})_{\varphi_j}$ となり, $\text{adj}(Y_1)$ と $\text{ad } Y_2$ は共に
 $(M_{I_2(e_2)})_{\varphi_2}$ を不変にしている. この場合には, Haga and Takeda
[Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von
Neumann algebra, Preprint 1972, TH4] と同様にして, $I_2(N_{2, e_2})$
上で $\text{adj}(Y_1) \in [\text{ad } Y_2]$ となり, $\bigvee_{n=0}^{\infty} p((\text{ad } Y_2)^{-n} \text{adj}(Y_1)) = 1$
となる. また $I_2(N_{2, e_2})' \cap M_{I_2(e_2)} \subset I_2(N_{2, e_2})$ であるから, 1 の
分解 $\{d_n\}_{n=0}^{\infty} \subset I_2(N_{2, e_2} \cap N_{2, e_2}')$ と $u_n^* u_n = u_n u_n^* = d_n$ なる $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$
 $\subset I_2(N_{2, e_2})$ があって $j(Y_1) d_n = Y_2^n u_n$ となる. 他方上のように

$Sp_{\sigma_j}(x_{q_j}) = \sigma(d\tau_{q_j} \cdot \theta_{q_j} / d\tau_{q_j})$ であって、 T から $Sp_{\sigma_j}(Y_j) \subset (\lambda_0^{-1}, \infty)$.

したがって $n \leq 0$ の場合には $Sp_{\sigma_2}(Y_2^n u_n) = \emptyset$, つまり $Y_2^n u_n = 0$ である. そこで $j(Y_1) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_2^n u_n$ とする. 再び $I_2(N_{2,e_2})$ 上で $\text{ad } Y_2 \in [\text{ad } j(Y_1)]$ であるから, 同様にして partial isometries の集合 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I_2(N_{2,e_2})$ を使って $Y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} j(Y_1) v_n$ と表わせる. いま $m > 1$ に対し $u_m \neq 0$ とする. このとき $n \geq 1$ に対し $E_2(Y_2^* j(Y_1)^n d_m) = 0$ である. したがって

$$\begin{aligned} E_2(d_m) &= \sum_n E_2(Y_2^* Y_2 v_n^* v_n d_m) = \sum_n E_2(Y_2^* j(Y_1)^n v_n d_m) \\ &= \sum_n E_2(Y_2^* j(Y_1)^n d_m) v_n = 0 \end{aligned}$$

となり $u_m \neq 0$ と矛盾する. したがって $j(Y_1) Y_2^* = I_2(w)$ となるようなイタリ-作用素 $w \in N_{2,e_2}$ がある. $y \in N_{1,e_1}$ に対して

$$\begin{aligned} I_2(J \theta_{1,e_1}(y)) &= j I_1(\theta_{1,e_1}(y)) = j(Y_1 I_1(y) Y_1^*) \\ &= I_2(w) Y_2 (j I_1(y)) Y_2^* I_2(w^*) = I_2(w) Y_2 (I_2 J(y)) Y_2^* I_2(w^*) \\ &= I_2(w) I_2(\theta_{2,e_2} J(y)) I_2(w^*) = I_2(w (\theta_{2,e_2} J(y)) w^*), \end{aligned}$$

つまり $J \theta_{1,e_1} J^* \theta_{2,e_2}(x) = w x w^*$, $x \in N_{2,e_2}$ が得られた.

§ 2. その他の結果.

定理 2.1. $\lambda \in (0, 1)$, $T_0 = 2\pi / \log \lambda$, N を Π_{∞} Factor, τ を N 上の semi-finite f. n. trace, θ を N 上の自己同型写像

$\tau \circ \theta = \lambda \tau$ をみたすもの, $M = N \otimes_0 \mathbb{Z}$, E を M から $I(N)$ への f.n. 条件付期待値, $\varphi = \tau \circ I^{-1} \circ E$, $G_0 = \{E_N(\theta^n) : n \in \mathbb{Z}\}$, $G = \{g \in G : gh = hg, h \in G_0\} / G_0$, $t \in \mathbb{R}$ に対し $\delta_t = E_M(\sigma_t^E)$ とする. このとき $\text{Out } M$ から G への準同型写像 δ' が存在して

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n \rightarrow n\tau_0} \mathbb{R} \xrightarrow{\delta} \text{Out } M \xrightarrow{\delta'} G \rightarrow 0$$

が exact である.

定理 2.2. $\lambda \in (0, 1)$, N を II_∞ Factor, θ を N の自己同型写像, $M = N \otimes_0 \mathbb{Z}$, E を M から $I(N)$ への f.n. 条件付期待値とする. M 上の f.n. state ψ は N 上の f.n. state φ と M 上のフリー作用素 u により $\psi_u = \varphi \circ I^{-1} \circ E$ となる.

定理 2.3. Hyperfinite な III_∞ Factor で ITPFI でないものがある.

この定理の証明は Krieger [Inventiones math. 15 (1972), 144-163] の結果へ帰着させる.

§ 3. 竹崎の結果.

定理 3.1. G を局所コンパクト可換群, M を von Neumann

代数, σ を G から M の自己同型写像群の中への弱連続な準同型写像とすれば, $\hat{G}$ から $M \otimes_{\sigma} G$ の自己同型写像群の中への弱連続な準同型写像 θ が存在して $(M \otimes_{\sigma} G) \otimes_{\sigma} \hat{G} \sim M \otimes B(L(G))$ となる.

証明は Takesaki [Dualité dans le produits croisés des algèbres de von Neumann. Preprint] を参照.

以下ではこのとき得られる θ を dual 準同型写像ということにする.

定理 3.2. G を局所コンパクト可換群, M を von Neumann 代数, σ を G から M の自己同型写像群の中への弱連続な準同型写像, θ を $\hat{G}$ から $M \otimes_{\sigma} G$ の自己同型写像群の中への dual 準同型写像とする.

a) G の閉部分群 H に対して

$$\{x \in \hat{G} : \theta_x(x) = x, x \in M \otimes_{\sigma} H\} = H^{\perp}$$

b) $\hat{G}$ の閉部分群 $\hat{H}$ に対して

$$\{x \in M \otimes_{\sigma} G : \theta_x(x) = x, x \in \hat{H}\} = M \otimes_{\sigma} \hat{H}^{\perp}.$$

定理 3.3. φ を von Neumann 代数 M 上の semi-finite

f. n. weight, $\sigma = \sigma^p$, $\mathcal{W}_\varphi = \{x \in M : \varphi(x^*x) < +\infty\}$, $\mathcal{O} = \mathcal{W}_\varphi \cap \mathcal{W}_\varphi^*$ を full (achieved) Hilbert 代数, $\mathcal{O}_0$ を $\mathcal{O}$ の 冪田代数, $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\mathbb{R}, \mathcal{O}_0)$ を 冪田代数 とする. このとき $M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \sim \mathcal{L}(\mathcal{L}_0)$ でこれらは semi-finite である.

定理 3.4. M を properly infinite な von Neumann 代数, φ を M 上の semi-finite f. n. weight, $\sigma = \sigma^p$, $N = M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$, θ を $\widehat{\mathbb{R}}$ ($\langle t, \sigma \rangle = e^{it\sigma}$, $t \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \widehat{\mathbb{R}}$ に関する 双対群) の dual な 準同型, $\widehat{\varphi}$ を $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\mathbb{R}, \mathcal{O}_0)$ から導かれる N 上の canonical weight, $h \in N$ を $\sigma_t^{\widehat{\varphi}} = \text{ad } h^{it}$ なる 正則かつ 正值な 自己共役作用素で $\tau = \widehat{\varphi}(h^{-1} \cdot)$ とする.

a) τ は N 上の semi-finite f. n. trace で $\tau \circ \theta_t = e^t \tau$;

b) $M \sim N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$

c) $N = M^\sigma$

定理 3.5. N を semi-finite な von Neumann 代数, τ を N 上の semi-finite f. n. trace, θ を $\mathbb{R}$ から N の 自己同型写像群 の 中への 弱連続な 準同型写像で $\tau \circ \theta_t = e^t \tau$ をみたすもの, $M = N \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ とする.

a) M が Factor であるための 完全条件は θ が $N \cap N'$ 上で ergodic なことである.

b) M_* が separable なとき, M が III 型であるための完全条件は $N \cap N'$ 上での θ_t の点ノットルが $\mathbb{R}$ の真部分集合になることである.

c) $(N_1, \theta_1), (N_2, \theta_2)$ が上のような条件をみたしているとき, $N_1 \otimes_{\theta_1} \mathbb{R} \sim N_2 \otimes_{\theta_2} \mathbb{R}$ であるための完全条件は N_1 から N_2 上への同型写像 J が存在して, $\theta_1 J^{-1} \theta_2 J$ が N_1 上で内部に成ることである.

定理 3.6. 定理 3.4 において, M_* が separable で M は III 型 Factor とする.

a) N は II_∞ von Neumann 代数である.

b) M が III_1 Factor であるための完全条件は N が II_∞ Factor となることである.

c) M を III_λ Factor とし, $T_\lambda = 2\pi / \log \lambda$ とすれば, $M \otimes_{\theta} (T_\lambda \mathbb{Z})$ は III_λ Factor である.

§4. Connes の問題.

1° $\mathbb{R}$ の部分群 G が可分な predual を持つ Factor M により $T(M) = G$ と表わせるための, G に対する特徴付けを与えよ.

2° 局所コンパクトな可換群 G から Factor M 上の自己同型写像群 α 中への準同型写像 U に対し, $\Gamma(U) = \Gamma(\equiv \hat{G})$ は

$M \otimes UG$ が Factor であるための完全条件か？

3° $\lambda \in (0, 1/2)$ に対し Powers の性質 L_λ は $\lambda(1-\lambda)^{-1} \in S(M)$ と同値か？

4° 概周期的な f.n. state が存在しないような σ -finite Factor は在るか？ (M は III_1 型となる)

5° R_λ ($\lambda \in (0, 1)$) を Powers による Factor とする. M が hyperfinite III_λ Factor ならば, $M \sim R_\lambda$ か？

6° R_∞ を荒木-Woods の Factor とする. M が hyperfinite III_1 Factor ならば, $M \sim R_\infty$ か？

7° ITPFI ではない hyperfinite III 型 factor の中には, どんな2つの III 型 Factor のテンソル積とも同型になっていないようなものがあるか？

8° II 型 α Factor に対し $\text{Out } N$ の中心は trivial か？

補) もし $N \cap N'$ が minimal projection f を持てば $Sp(\sigma f) = \Gamma(\sigma f) = \Gamma(\sigma)$. したがってある表現 σ' が存在して $\sigma' \sim \sigma$, $Sp(\sigma') = Sp(\sigma f)$. 他方 M は III_0 Factor であったから $\{1\} = S(M) \cap \mathbb{R}_+^* = \Gamma(\sigma) = Sp(\sigma')$ となり, これは M が III 型であることと矛盾する. 従って $N \cap N'$ は non atomic である.

補2) Induced 自己同型写像の ergodic 性は例21下 + 時: Ergod 理論入門, に証明がある.