

The calculation of the McKay-Thompson series for a 4A element of the Monster based on a new frame

島倉 裕樹 (Hiroki Shimakura)

東京大学大学院数理科学研究科
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo
e-mail: shima@ms.u-tokyo.ac.jp

本稿では, $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 上の符号に関するムーシャイン加群の分解を与え, それを用いたモンスター単純群の共役類 4A の McKay-Thompson 級数の明示的な表示を与える. 詳細は [Sh] をご覧頂きたい. 頂点作用素代数の一般論は [Bo, FLM, MN], $\mathbb{Z}_6$ 上の符号に関する基本的な定義等は [BDHO, DHS] を参照した.

頂点作用素代数 (VOA) の公理は Borcherds, Frenkel らによって与えられて, 研究されてきた. 特にムーシャイン加群 ($V^\natural$) は, VOA の最も重要な例の一つであり, その自己同型群はモンスター単純群である. $V^\natural$ は, 部分頂点作用素代数 (部分 VOA) として中心電荷 $1/2$ のヴィラソロ VOA $L(1/2, 0)$ の 48 個のコピーのテンソル積を含んでいて, その加群としての $V^\natural$ の既約分解を用いて, $V^\natural$ の構造について研究がなされている ([DGH]).

$L(1/2, 0)$ は中心電荷 $1/2$ の W_2 代数であるので, W_n 代数のユニタリ系列の最初元について, 同様の考察をするべきである ([Ma]). 本稿では特に, 中心電荷 1 の W_4 代数について考える.

ノルム 6 の元で生成される一次元格子 L から構成される格子 VOA を V_L とする. 中心電荷 1 の W_4 代数は格子 L の自己同型 -1 から誘導される V_L の自己同型の固定部分空間 V_L^+ として実現される. [DN] より, 既約 V_L^+ -加群は

$$\{V_L^\pm, V_{\alpha/2+L}^\pm, V_{\alpha/3+L}, V_{\alpha/6+L}, V_L^{T_i, \pm} | i = 0, 1\}$$

の 10 個のいずれかと同型である.

V_Λ^+ をリーチ格子 Λ から構成される格子 $\text{VOA } V_\Lambda$ の Λ の自己同型 -1 から誘導される V_Λ の自己同型の固定部分空間として, $V_\Lambda^{T_i, +}$ を V_Λ の twisted 加群 V_Λ^T の位数 2 の自己同型による固定部分空間としたときに, ムーシャイン加群は $V^\natural = V_\Lambda^+ \oplus V_\Lambda^{T_i, +}$ として構成される

Λ の部分集合で, 24 個の互いに直交するノルム 6 の元たちの ± 1 倍した集合を 6-frame と呼ぶことにする. 6-frame を考えることで, V_Λ^+ は部分 VOA として V_L^+ の 24 個のコピーのテンソル積を含むことがわかる. また, $V^\natural$ の $(V_L^+)^{\otimes 24}$ -加群としての分解は直接計算できる. その表示は $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 上の符号を用いると見やすくなる.

Λ の自己同型群は 6-frame の集合上に作用するので, その軌道により同値類を定め, $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 上の長さ 24 の extremal Type II 符号の集合上に座標の置換と任意の成分の -1 倍で移りあうの符号を同値として同値類を定める. 符号から格子を構成する Construction A を $\mathbb{Z}_6$ 上に拡張した対応を考えることで次の命題を得る.

命題 1. 6-frame の同値類と $\mathbb{Z}_6$ 上の長さ 24 の extremal Type II 符号の同値集合との間に一対一対応がある.

次が主定理である.

定理 2. C を $\mathbb{Z}_6$ 上の長さ 24 の extremal Type II 符号として, $C_2 = \{(c_1, \dots, c_{24}) \in C \mid c_i = 0 \pmod{3} \text{ for all } i\}$ と置き, 二進符号と見る.

(1) 部分 VOA としての次のような埋め込みが存在する.

$$V^\natural \supset V_\Lambda^+ \supset (V_L^+)^{\otimes 24}.$$

(2) V_Λ^+ は $(V_L^+)^{\otimes 24}$ -加群として次のように分解される:

$$V_\Lambda^+ \cong \bigoplus_{c \in C_2} \bigoplus_{\substack{e_i \in \{\pm\} \\ \prod e_i = +}} \bigotimes_{i=1}^{24} V_{c_i \alpha/2 + L}^{e_i} \oplus \frac{1}{2} \bigoplus_{c \in C \setminus C_2} \bigotimes_{i=1}^{24} V_{c_i \alpha/2 + L}.$$

(3) $V_\Lambda^{T,+}$ は $(V_L^+)^{\otimes 24}$ -加群として次のように分解される:

$$V_\Lambda^{T,+} \cong \bigoplus_{c \in C_2} \bigoplus_{\substack{e_i \in \{\pm\} \\ \prod e_i = -}} \bigotimes_{i=1}^{24} V_L^{T_{c_i}, e_i}.$$

この定理の応用としてモンスター単純群の共役類 4A の McKay-Thompson 級数の明示的な表示を与える.

V_L^+ のフュージョン規則は [Ab] で決定されている. それを用いて次のような命題を得る (cf. [Ma]).

命題 3. V_L^+ のフュージョン代数上で

$$\begin{aligned} & 1 \quad \text{on } \{V_L^\pm, V_{\alpha/3+L}\}, \\ & -1 \quad \text{on } \{V_{\alpha/2+L}^\pm, V_{\alpha/6+L}\}, \\ & \sqrt{-1} \quad \text{on } \{V_L^{T_0, \pm}\}, \\ & -\sqrt{-1} \quad \text{on } \{V_L^{T_1, \pm}\} \end{aligned}$$

により定義される線形写像は自己同型である.

Γ を V_L^+ の既約加群全体の集合として,

$$V^{\natural} = \bigoplus_{(W_1, \dots, W_{24}) \in \Gamma^{24}} m_{W_1, \dots, W_{24}} W_1 \otimes \cdots \otimes W_{24}$$

のような既約分解が与えられたとする.

各既約加群上に、テンソル積の i 番目の V_L^+ 加群に対応するスカラー倍 (cf. 命題 3) をする $V^{\natural}$ の線形写像を σ_i と置く. すると, σ_i はフュージョン積を保つので次のような命題を得る.

命題 4. σ_i は $V^{\natural}$ の位数 4 の VOA としての自己同型である.

注意 5. $([Ma])$ σ_i は共役類 $4A$ に属している.

リーチ格子の 6-frame の例を一つ与える. Q を $\mathbb{F}_{23}$ の平方剰余の集合として, $Q_i = \{i+j \in \mathbb{F}_{23} | j \in Q\}$ と置く. 簡単な計算により, 次の命題を得る.

命題 6. i, j を $\mathbb{F}_{23}$ の異なる元とする.

- (1) $|Q_i \cap Q_j| = 5$.
- (2) 次のうちの丁度一つが成立する:
(I) $i \in Q_j$, (II) $j \in Q_i$.

次のような二進 Golay 符号の生成元を考える (cf. [CS]):

$$\begin{aligned} A_1 &= \Omega, \\ A_i &= \{1\} \cup \{2+j | j \in Q_{i-2}\}, \quad (i = 2, \dots, 24), \end{aligned}$$

ただし, $\{2+j | j \in Q_{i-2}\}$ は Ω の部分集合とみなす. 命題 6 より, 次のような命題を得る.

命題 7.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}\alpha_{\Omega} + \alpha_1, \\ x_i &= -\frac{1}{2}\alpha_{A_i} + \frac{1}{4}\alpha_{\Omega} + \alpha_i, \quad (i = 2, \dots, 24) \end{aligned}$$

としたとき, $\{\pm x_1, \dots, \pm x_{24}\}$ は 6-frame.

対応する $\mathbb{Z}_6$ 上の長さ 24 の extremal Type II 符号を用いて, $V^{\natural}$ の分解を考える.

$$\begin{aligned} a_i &= \text{ch} V_{i\alpha/2k+L} = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} q^{3(j+i/2k)^2} \quad (0 \leq i \leq 3), \\ b &= (\text{ch} V_L^+ - \text{ch} V_L^-) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j q^{j^2} \end{aligned}$$

と置く. 命題 4 で得られた $4A$ 元に対応する McKay-Thompson 級数を考えて次を得る.

$$\begin{aligned}
T_{4A}(q) = & \frac{1}{2}a_0^{24} + \frac{1}{2}b^{24} - \frac{1}{2}a_3^{24} + 24a_2^{24} - 24a_1^{24} \\
& + \frac{253}{2}a_0^{16}a_3^8 - \frac{253}{2}a_0^8a_3^{16} + 2024a_0^{15}a_2^9 - 2024a_1^9a_3^{15} \\
& + 4048a_0^7a_2^9a_3^8 - 4048a_0^8a_1^9a_3^7 + 6072a_0^4a_2^{12}a_3^8 - 6072a_1^4a_2^8a_3^{12} \\
& + 6072a_0^{12}a_1^8a_2^4 - 6072a_0^8a_1^{12}a_2^4 + 6072a_1^2a_2^{16}a_3^6 - 6072a_0^6a_1^{16}a_2^2 \\
& + 6072a_1^8a_2^{16} - 6072a_1^{16}a_2^8 + 8096a_0^{13}a_1^6a_2^3a_3^2 - 8096a_0^2a_1^3a_2^6a_3^{13} \\
& + 12144a_0^3a_2^{21} - 12144a_1^{21}a_3^3 + 24288a_0^2a_1^2a_2^{14}a_3^7 - 24288a_0^7a_1^{14}a_2^1a_3^2 \\
& + 30912a_0^{12}a_2^{12} - 30912a_1^{12}a_3^{12} + 36432a_0^{12}a_1^5a_2^4a_3^3 - 36432a_0^3a_1^4a_2^5a_3^{12} \\
& + 42504a_0^8a_1^2a_2^8a_3^7 - 42504a_0^7a_1^8a_2^1a_3^8 + 85008a_1^5a_2^{16}a_3^3 - 85008a_0^3a_1^{16}a_2^5a_3^2 \\
& + 97152a_0^5a_1^{11}a_2^7a_3^7 - 97152a_0^1a_1^5a_2^7a_3^{11} + 97152a_0^{11}a_1^7a_2^5a_3^1 - 97152a_0^7a_1^{11}a_2^1a_3^5 \\
& + 99176a_0^6a_2^{18} - 99176a_1^{18}a_3^6 + 121440a_0^{11}a_1^4a_2^5a_3^4 - 121440a_0^4a_1^5a_2^4a_3^{11} \\
& + 121440a_0^9a_1^2a_2^6a_3^6 - 121440a_0^6a_1^7a_2^2a_3^9 + 121440a_0^9a_2^{15} - 121440a_1^{15}a_3^9 \\
& + 161920a_0^1a_1^3a_2^{15}a_3^5 - 161920a_0^5a_1^{15}a_2^3a_3^1 + 178112a_0^{10}a_1^3a_2^6a_3^5 - 178112a_0^5a_1^6a_2^3a_3^{10} \\
& + 267168a_0^9a_1^8a_2^7 - 267168a_1^7a_2^8a_3^9 + 364320a_0^3a_1^2a_2^{13}a_3^6 - 364320a_0^6a_1^{13}a_2^2a_3^3 \\
& + 655776a_0^{10}a_1^6a_2^6a_3^2 - 655776a_0^2a_1^6a_2^6a_3^{10} + 655776a_0^6a_1^2a_2^{10}a_3^6 - 655776a_0^6a_1^{10}a_2^2a_3^6 \\
& + 680064a_0^1a_1^6a_2^{15}a_3^2 - 680064a_0^2a_1^{15}a_2^6a_3^1 + 850080a_0^3a_1^8a_2^{13} - 850080a_1^{13}a_2^8a_3^3 \\
& + 1457280a_0^2a_1^7a_2^{14}a_3^1 - 1457280a_0^1a_1^{14}a_2^7a_3^2 + 1493712a_0^6a_1^8a_2^{10} - 1493712a_1^{10}a_2^8a_3^6 \\
& + 1578720a_0^2a_1^4a_2^{14}a_3^4 - 1578720a_0^4a_1^{14}a_2^4a_3^2 + 1845888a_0^9a_1^5a_2^7a_3^3 - 1845888a_0^3a_1^7a_2^5a_3^9 \\
& + 1845888a_0^7a_1^3a_2^9a_3^5 - 1845888a_0^5a_1^9a_2^3a_3^7 + 2404512a_0^4a_1^3a_2^{12}a_3^5 - 2404512a_0^5a_1^{12}a_2^3a_3^4 \\
& + 2428800a_0^8a_1^7a_2^8a_3^1 - 2428800a_0^1a_1^8a_2^7a_3^8 + 2610960a_0^8a_1^4a_2^8a_3^4 - 2610960a_0^4a_1^8a_2^4a_3^8 \\
& + 5829120a_0^3a_1^5a_2^{13}a_3^3 - 5829120a_0^3a_1^{13}a_2^5a_3^3 + 6509184a_0^5a_1^7a_2^{11}a_3^1 - 6509184a_0^1a_1^{11}a_2^7a_3^5 \\
& + 7164960a_0^5a_1^4a_2^{11}a_3^4 - 7164960a_0^4a_1^{11}a_2^4a_3^5 + 7504992a_0^7a_1^6a_2^9a_3^2 - 7504992a_0^2a_1^9a_2^6a_3^7 \\
& + 9512800a_0^4a_1^6a_2^{12}a_3^2 - 9512800a_0^2a_1^{12}a_2^6a_3^4 + 10565280a_0^6a_1^5a_2^{10}a_3^3 - 10565280a_0^3a_1^{10}a_2^5a_3^6.
\end{aligned}$$

参考文献

- [Ab] T. Abe, Fusion Rules for the Charge Conjugation Orbifold, Preprint.
- [BDHO] E. Bannai, S.T. Dougherty, M. Harada, and M. Oura, Type II Codes, Even Unimodular Lattices, and Invariant Rings, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **45**, (1999), 1194-1205.
- [Bo] R. E. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat'l. Acad. Sci. U.S.A.*, **83**, (1986), 3068-3071.

- [CS] J.H. Conway, N.J.A. Sloane, Sphere Packing, Lattices and Groups, 3rd Edition, Springer, New York, 1999.
- [DGH] C. Dong, R. L. Griess Jr., and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and moonshine module, *Comm. Math. Phys.*, **193**, (1998), 407-448.
- [DHS] S. T. Dougherty, M. Harada and P. Solé, Self-dual codes over rings and the Chinese remainder theorem. *J. Math. Hokkaido Univ.* **28** (1999), 253-283.
- [DN] C. Dong and K. Nagatomo, Representations of Vertex operator algebra V_L^+ for rank one lattice L , *Comm. Math. Phys.*, **202**, (1999), 169-195.
- [FLM] I. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Pure and Appl. Math., Vol.134, Academic Press, Boston, (1988).
- [Ma] A. Matsuo, Norton's Trace Formulae for the Griess Algebra of a Vertex Operator Algebra with Larger Symmetry. Preprint.
- [MN] A. Matsuo and K. Nagatomo, Axioms for a Vertex Algebra and the Locality of Quantum Fields, MSJ-Memoirs 4, Mathematical Society of Japan, (1999).
- [Sh] H. Shimakura, Decomposition of the Moonshine Module with respect to a code over $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Preprint.