

Hunt の定理について (Semigroup の構成)

東大理 田中 洋

§ 1. X を locally compact な σ -compact の Hausdorff space とし, $C_K \in X$ 上の compact support をもつ実数値連続函数の全体とし, C_K に supremum norm $\|\cdot\|$ により C_0 へ完備化したものを C_0 とする. C_K, C_0 の函数で ≥ 0 なるものの全体をそれぞれ C_K^+, C_0^+ とかく. $V \in C_K$ から C_0 の中への linear operator とし, 次の条件を満たすものとする.

1. Weak principle of the positive maximum:

$$f \in C_K, \sup_{x \in X} V f(x) > 0 \Rightarrow \exists \alpha > 0$$

$$\sup_{\{f(x) > 0\}} V f(x) = \sup_{x \in X} V f(x) + \alpha$$

2. $f \in C_K^+ \Rightarrow \exists \alpha > 0 \forall f \in C_0^+.$

もし V の range $V(C_K)$ が C_0 に dense ならば, Hunt の定理 [1: p. 351] により V は C_0 上の連続な semi-

group P_t の積分をかき下す. $V(C_K)$ が C_0 に dense であること
も次のような例がある.

例 (Lion [23]). $X = \{1, 2, 3\}$. このとき C_K
($= C_0$) の基底は 3-vector (a_1, a_2, a_3) で表わされるか
ら, $V \in \text{matrix}$ で表わして

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

とする. これは上にあげた条件 1, 2 をみたしている.

そして $P_t = e^{-t} V$ とすると

$$V = \int_0^\infty P_t \, dt.$$

この例では $V(C_K)$ は C_0 に dense であることが, 2つの
条件がみたされている.

3. $V(C_K)$ は X の実数分離する.

実際には, Hunt の定理は次の形で成立つ (Lion [23]).

定理 $V \in C_K$ から C_0 の中への linear operator で,
条件 1, 2, 3 をみたすとする. このとき, $B(X)$ (= X 上
の有界 Baire 函数の全体) の上の sub-Markovian operators
の半群 $(P_t)_{t \geq 0}$ が存在して,

(α) $f \in C'_0$ ならば, $P_t f(x)$ は $t > 0$ で右連続.

(β) $Vf(x) = \int_0^\infty P_t f(x) dt$, $\forall f \in C_K$, $\forall x \in X$,

が成立する. $\{1, 2\}$ の称な $(P_t)_{t \geq 0}$ は C'_0 上の unique である.

ここで C'_0 は次のように与えられる. X が compact であるかつある $x_0 \in X$ があって $\forall f \in C_K$ に對して $Vf(x_0) = 0$ となる場合には $C'_0 = \{f \in C_0; f(x_0) = 0\}$ とする. その他の場合は $C'_0 = C_0$.

宮本氏の報告にあるように, 条件 1, 2 より V に對して resolvent $(V^\lambda)_{\lambda > 0}$ が定まるので, この $(V^\lambda)_{\lambda > 0}$ なる semigroup を作ればよい. この部分の本質的入口 Ray [4] にあるが, [2], [3] にしたがって詳しく述べる.

§2. 定理の証明.

a) 条件 1, 2 より次のような $(V^\lambda)_{\lambda > 0}$ の存在がわかってゐる.

(i) 各 $V^\lambda (\lambda > 0)$ は C_0 上の C_0 への linear operator

(ii) $\| \lambda V^\lambda \| \leq 1$

(iii) $V^\lambda \geq 0$ ($V^\lambda: C_0^+ \rightarrow C_0^+$)

(iv) $V^\lambda - V^\mu + (\lambda - \mu)V^\lambda V^\mu = 0$, $\lambda, \mu > 0$.

(v) $Vf = V^\lambda(\lambda Vf + f)$, $f \in C_K$.

よ、2 吉田-Hille の定理によ、 $\overline{V^\lambda(C_0)}$ ($\lambda > 0$ に無関係) の上の positivity preserving strongly continuous contraction semigroup $(K_t)_{t \geq 0}$ が存在する。

$$V^\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t f dt, \quad f \in \overline{V^\lambda(C_0)}$$

となる。以下の λ のような方法で、この (K_t) を B の上まで広げて行く。

b) $\lambda > 0$ に對して

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \{f \in C_0^+ : f \text{ は } \lambda\text{-supermedian}\} \\ &= \{f \in C_0^+ : K V^{k+\lambda} f \leq f \text{ for } \forall k \geq 0 \text{ real}\} \end{aligned}$$

とおく。さらに $E = \bigcup_{\lambda > 0} E_\lambda$ とおき、

$$D = \{f : f = f_1 - f_2, f_1, f_2 \in E\}$$

とおく。次に $\tilde{X} \in X$ が compact であるとき、 $\tilde{X}$ は compact として $X \cup \{\infty\}$ (X が compact のときは、 X の場合) とし、 $C(\tilde{X})$ を $\tilde{X}$ 上の実数値連続函数の集合

とす。 $\tilde{f} \in C(\tilde{X})$ は $\tilde{f} = f + c$ ($f(\infty) = 0$, c は実数) と一意にかけらるから、 $C(\tilde{X}) = C_0 \cup \{\text{constant functions}\}$ と考えらる。このように $\tilde{X}$ の場合、

$B = D \cup \{\text{constant functions}\} (\subset C(\tilde{X}))$ とおく

と, 明らかに $\tilde{D}$ は vector space である. 更に,
 $\tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{D}$ ならば $\tilde{f} \vee \tilde{g}, \tilde{f} \wedge \tilde{g} \in \tilde{D}$ であることは
 直接計算よりわかる. $\tilde{D} \ni \tilde{f} = f + c$ ($f \in D$,
 c は const.) とすると, $f = f_1 - f_2$, $f_1, f_2 \in E$ と
 かける, 且つ

$$(f+c)^+ = (f+c) \vee 0$$

$$= \begin{cases} f_1 + c - (f_1 + c) \wedge f_2, & c \geq 0 \text{ のとき} \\ f_1 - f_1 \wedge (f_2 - c) & c < 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

とすることがわかるように

$$(f_1 + c) \wedge f_2 \in E \subset D \quad (c \geq 0 \text{ のとき})$$

$$f_1 \wedge (f_2 - c) \in E \subset D \quad (c < 0 \text{ のとき})$$

であるから $(f+c)^+ \in \tilde{D}$. 同様

$$\tilde{D} \ni \tilde{f} = f + c, \tilde{D} \ni \tilde{g} = g + c'$$

とすると,

$$\tilde{f} \vee \tilde{g} = (f - g + (c - c'))^+ + g + c' \in \tilde{D}$$

$$\tilde{f} \wedge \tilde{g} = -(g - f + (c' - c))^+ + g \in \tilde{D}.$$

結局, $\tilde{D}$ は vector lattice である.

① 以下を命題, $\forall x \in X$ に対し $\forall f(x) > 0$ と
 なるような $f \in C_K^+$ が存在することは仮定する (これは

成立する場合については、最後に注意を与える)。

(v) より $V(C_k) \subset V^1(C_0) \subset D$ であるから、 D の X の
 稠密性を示す、即ち $\tilde{D} \subset C(X)$ は $\tilde{X}$ の稠密性を示す、
 constant functions を含む vector lattice である。そして
 $\tilde{D}$ は $C(X)$ の dense, 1 を含む、 D は C_0 の dense である。

d) $\forall f \in C_0$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} kV^k f(x) = \hat{f}(x)$ (pointwise) が
 存在する。特に $f \in V^1(C_0)$ ならば $\hat{f} = f$ 。

まず $f \in E_\lambda$ とする。 $k' \geq k > 0$ に対して (iv) より
 $k'V^{k'+\lambda} f - kV^{k+\lambda} f = (k' - k)V^{k'+\lambda} (f - kV^{k+\lambda} f) \geq 0$,
 したがって $kV^{k+\lambda} f \uparrow \exists \hat{f}$, $k \uparrow \infty$ 。

一方, resolvent equation (iv) より

$$kV^k f = kV^{k+\lambda} f + \lambda V^{k+\lambda} (kV^k f) \quad \text{であるから}$$

$$kV^k f \longrightarrow \hat{f}, \quad k \uparrow \infty$$

これは $f \in D$ に対して成立するが、さらに $\overline{D} = C_0$,
 $\|kV^k\| \leq 1$ に注意すると、 $f \in C_0$ に対して成立する。

e) $\forall t > 0, \forall f \in C_0$ に対して $\lim_{k \rightarrow \infty} K_t kV^k f(x)$ が存在
 する (pointwise)。

$t > 0, x \in X$ を固定して考えると、写像 $f \mapsto K_t f(x)$
 は $\overline{V^1(C_0)}$ の上の norm $\|\cdot\|_t$ を与える positive linear

functional である, かつ Hahn-Banach の定理によ
り, C_0 の上の norm が $|\int \cdot|$ となる positive linear
functional に拡張出来る. これから得る (Radon)
measure $\mu_{t,x}$ とかくと, Lebesgue の convergence
theorem によつて

$$K_t kV^k f(x) = \mu_{t,x}(kV^k f) \longrightarrow \mu_{t,x}(\hat{f}), \quad k \uparrow \infty.$$

§) $f \in C_0$ に対して $P_t f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} K_t(kV^k f)(x)$ と
おくと, P_t は X 上の positive (Radon) measure (total
mass ≤ 1) であるから, P_t は $f \in B$ に対して定義
出来る. $t > 0, f \in C_0$ を固定すると $P_t f(x)$ は連続函
数 $K_t(kV^k f)(x)$ の極限であるから, Baire の可測である.
また同様の理由で, $P_t f(x)$ は (t, x) の函数として
Baire の可測である. これらのことは $f \in B$ に対して
成り立つ. また明らかに $f \in \overline{V^1(C_0)}$ ならば $P_t f = K_t f$
である. このことに注意すると, $t, t' > 0$ に対して

$$\begin{aligned} P_{t'} P_t f(x) &= P_{t'} \lim_{k \rightarrow \infty} K_t kV^k f(x) \\ (f \in C_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} P_{t'} K_t kV^k f(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} K_{t'} K_t kV^k f(x) \end{aligned}$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} K_{t'+t} k V^k f(x) = P_{t'+t} f(x)$$

∴ 4) $f \in B$ には $\exists t$ 1 $\forall t$ $P_t, P_t f(x) = P_{t'+t} f(x)$ がい
 える, 即ち $(P_t)_{t \geq 0}$ は B 上の semigroup である。

g) $f \in C_0$ には $\exists t$ 1 $\forall t$ $V^\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x) dt, \lambda > 0.$

また $f \in C_K$ には $\exists t$ 1 $\forall t$ $V f(x) = \int_0^\infty P_t f(x) dt.$

$f \in C_0$ である。

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x) dt &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\lambda t} K_t k V^k f(x) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} V^\lambda k V^k f(x) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k-\lambda} (V^\lambda - V^k) f(x) = V^\lambda f(x) \end{aligned}$$

よって $f \in C_K$ である。

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x) dt = V^\lambda f(x) = V f(x) - \lambda V^\lambda V f(x)$$

∴ 2) $\lambda \downarrow 0$ であるとき, $\lambda V^\lambda V f(x) \rightarrow 0$ がい
 になる。 $g \in C_K^+$ であるとき $\lambda V^\lambda g \leq \lambda V g \rightarrow 0, \lambda \downarrow 0.$

よって $f \in C_K$ には $\exists t$ 1 $\forall t$ $\lambda V^\lambda g \rightarrow 0, \lambda \downarrow 0.$ ∴ 2),

$\| \lambda V^\lambda \| \leq 1$ であるとき, $g \in C_0$ には $\exists t$ 1 $\forall t$ $\lambda V^\lambda g \rightarrow 0,$

$\lambda \downarrow 0$ がいえる。 よって $f \in C_K$ には $\exists t$ 1 $\forall t$

$$\lambda V^\lambda V f(x) \rightarrow 0, \lambda \downarrow 0.$$

h) $f \in C_0$ であるとき, $P_t f(x)$ は $t > 0$ には $\exists t$

連続である ($\forall x \in X$).

$g \in C_0^+$ とする. f, g の結果を用いて

$$\begin{aligned} \int_t^\infty e^{-\lambda s} P_s g \, ds &= e^{-\lambda t} P_t \int_0^\infty e^{-\lambda s} P_s g \, ds \\ &= e^{-\lambda t} P_t V^\lambda g = e^{-\lambda t} K_t V^\lambda g \end{aligned}$$

よって $e^{-\lambda t} K_t V^\lambda g$ は $t > 0$ の continuous decreasing function である. $(\lambda, d), e)$ により $f \in E_\lambda$ ならば

$$e^{-\lambda t} K_t k V^{k+\lambda} f \uparrow e^{-\lambda t} P_t f, \quad k \uparrow \infty$$

よって,

$$\begin{aligned} V^{k+\lambda} f &= V^\lambda f - V^\lambda k V^{k+\lambda} f \\ &= V^\lambda (f \oplus -k V^{k+\lambda} f) \\ &= V^\lambda g, \quad g = f - k V^{k+\lambda} f \geq 0, \quad g \in C_0 \end{aligned}$$

であるから, $e^{-\lambda t} P_t f$ ($f \in E_\lambda$) は $t > 0$ の数値

列, lower semicontinuous & decreasing である,

したがって right continuous である. よって $f \in D$

に属して $P_t f$ は $t > 0$ につき right continuous である.

D の C_0 に dense であることと, $\|P_t\| \leq 1$ に

注意すると, $f \in C_0$ に属して $P_t f$ は $t > 0$ につき連続である.

注意 X が compact であれば, c) における仮定が成立しているとしても, c) の場合と全く同様である. 次に X が compact ではなくて c) の仮定が成立している場合, 即ちある $x_0 \in X$ (条件 3 によつてこのような x_0 は唯一つ) があり, $\forall f \in C_K$ に對して $Vf(x_0) = 0$ となる場合を考へる. このときは, X のかわりに $X' = X - \{x_0\}$ を考へればよい. $C'_K = \{f \in C_K : f \text{ は } x_0 \text{ のある近傍で } 0\}$ とおくと, C'_K の函数は $C_K(X')$ の函数と見做せるから, $V \in C'_K$ に制限することによつて, $C_K(X')$ 上の operator V' を考へることが出来る. X' において V' を考へると, 条件 1, 2, 3 および c) の仮定がみえさせていることが, 次の 1), 2) によつてわかる.

1) X は x_0 において countable base を持つ (これより特に X' は σ -compact であることがわかる)

2) $\forall \varepsilon > 0$ に對して, x_0 の近傍 U があり, $f \in C_K$, $0 \leq f \leq 1$, $S_f(f \text{ の support}) \subset U$ なる限り $Vf \leq \varepsilon$.

(これより, $V(C'_K)$ が $V(C_K)$ の dense であること, したがつて, $V'(C_K(X'))$ が X' の点を分離することになる).

V' に対応する semigroup $\varepsilon (P'_t)_{t>0}$ があると, 与えられた semigroup $(P_t)_{t>0}$ は次のようにして得られる.

$$P_t f(x) = \begin{cases} P'_t f'(x) & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$$

ただし f' は f の X' の制限である.

1) の証明: $f_n \in C_K^+$, $n=1, 2, \dots$ ε $f_n \uparrow \infty$ となるように与えらる. すると x_0 以外の点では $V f_n \uparrow \infty$.

closed な compact であるような x_0 の近傍 U により包み込まれる. このとき $U_n = \{x \in U : V f_n(x) < 1\}$ と

おくと, $\{U_n\}_{n \geq 1}$ は x_0 の近傍系 $\mathcal{U}$ の base を与える. 2) の証明: U_0 ε closed な compact であるような x_0 の近傍とし, $g \in C_K^+$ ε , $0 \leq g \leq 1$,

$g = 1$ on U_0 となるように与えらる. $Vg \in C_0$, $Vg(x_0) = 0$ であるから, x_0 の近傍 U で, $U \subset U_0$ かつ

$\sup_{x \in U} Vg(x) \leq \varepsilon$ となるものが存在する. この U に対応して

$f \in C_K$, $0 \leq f \leq 1$, $S_f \subset U$ なる $\mathbb{R}^d$ 上の $0 \leq f \leq g$

であるから $Vf \leq Vg$. よって

$$\sup_{S_f} Vf(x) \leq \sup Vg(x) \leq \varepsilon$$

complete maximum principle より, $\forall x \in X, Vf(x) \leq \varepsilon$.

一意性の証明

次の二つの補題においては, V は条件 1, 2 をみたすものとする. V は測度による積分で表わされるから非負 Baire 函数に対して V を operate せしめることが出来る.

補題 1. 定数 $a \geq 0$, 非負 Baire 函数 f, g に対して

$$a + Vf(x) \geq Vg(x)$$

" $g(x) > 0$ となる x についての集合において成立する", 同様に " $f(x) > 0$ となる x についての集合において成立する".

これは, continuous kernel V が C_K^+ において complete maximum principle をみたせば, positive universally measurable functions のクラスにおいても complete maximum principle をみたすという Meyer の結果 [3: p. 204] より出る.

今の場合は, 条件 1 より V は C_K^+ において complete maximum principle をみたしている.

補題 2. f, g を非負 Baire 函数とし, $Vf, Vg < \infty$ とする. もし $Vf + f = Vg + g$ が "成立する" ならば $f = g$.

証明. $\tilde{f} = f - f \wedge g$, $\tilde{g} = g - f \wedge g$ とおく

$$V\tilde{f} + \tilde{f} = V\tilde{g} + \tilde{g}$$

とあるが, $\tilde{f} \cdot \tilde{g} = 0$ であるから, $\tilde{f}(x) > 0$

ならば x に對して $V\tilde{f}(x) \leq V\tilde{g}(x)$. 同

様に, $\tilde{g}(x) > 0$ (すなわち $\tilde{f}(x) = 0$) のとき, $V\tilde{f}(x) \leq V\tilde{g}(x)$. 従

って $V\tilde{f} = V\tilde{g}$, $\tilde{f} = \tilde{g}$ である.

最後に uniqueness の証明を述べる. $(P_t)_{t \geq 0}$ は Markov 過程, $(Q_t)_{t \geq 0}$ は定理の結論に
性質をもつ semigroup である.

$$W^\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Q_t f \, dt$$

とある. P_t, Q_t は operate するとは, 測度
命で表わされるから, 積分の順序交換によ
り, 任意の Borel 函数 f に対して

$$\lambda V(V^\lambda f)(x) = \lambda V^\lambda V f(x) = V f - V^\lambda f$$

$$\lambda V(W^\lambda f)(x) = \lambda W^\lambda V f(x) = V f - W^\lambda f$$

より, $V f = (\lambda V + I)(V^\lambda f) = (\lambda V + I)(W^\lambda f)$
補題 2 を用いると, $V^\lambda f = W^\lambda f$ である.

文 献

- [1] Hunt, G. A. Markoff processes and potentials, II.
Illinois J. Math., 1 (1957), 316—362.
- [2] Lion, G. Théorème de représentation d'un
noyau par l'intégrale d'un semi-groupe.
Séminaire Brelot-Choquet-Deny (Théorie du Potentiel)
6^e année, 1962, n° 3.
- [3] Meyer, P. A. Probability and potentials.
(Chapter X)
- [4] Ray, D. Resolvents, transition functions, and
strongly Markovian processes. Annals Math.,
70 (1959), 43—72.