

PW型リーマン面上のHardy族について —

不変部分空間定理が成立する場合としない場合

北大 理 林 実樹広
(Mikihiro Hayashi)

1. R を平面領域, 又は定数でない有界正則関数をもつようなリーマン面とする. 以下では, 平面領域に限, ておいても十分であるから, 単一領域と呼ぶことにする. 領域 R が単位円 $\{ |z| < 1 \}$ の場合, Hardy族 $H^p(R)$ の (弱*) 閉不変部分空間 M (本講では, $H^\infty(R)$ -加群のこととこう呼ぶ) は, 内部関数 ϕ を用いて,

$$(1.1) \quad M = \phi H^p(\mathbb{D})$$

と表わされる. これは $p = 2$ の場合に, ヒルベルト空間上の作用素の不変部分空間を考察して Beurling が与えた結果である. R が多重連結な領域とした場合, $H^p(R)$ の不変部分空間 M の最大共通内部因子を ϕ とすると,

$$(1.2) \quad M \subseteq \phi H^p(R, \phi_f^{-1})$$

となることはすぐわかる. ここで, 内部関数 ϕ は一般には多価であり, ϕ_f は ϕ の周期である. $H^p(R, \phi_f^{-1})$ は多価 H^p 関数の族で内部関数 ϕ と逆の周期をもつものの全体である. ϕ と $H^p(R, \phi_f^{-1})$ の元の周期が互いに打消し合って $\phi H^p(R, \phi_f^{-1})$ が

1価となり, $H^p(R)$ の不変部分空間を構成することに注意した。
 1). 領域 R が有限連結の場合, (1.2) で等号が成立することは
 60年代に示されている。70年代になって, Neville^[7]により,
 ある種の無限領域の場合には (1.2) で等号となること
 が示され, その結果は, 荷見[2,3], Neville[8]により更に
 拡張された。同じ頃, Widom は次の性質をみたす領域 R の
 特徴付けを立えていた ([9,10])

(1.3) すべての周期 δ について, $H^\infty(R, \delta)$ が 0 以外の元を含む。

リーマン球と全平面という特殊な場合を除けば, (1.3) から
 $H^\infty(R)$ が定数でない元を含むことがすぐになる。 ($\because$

$H^\infty(R, \delta) \cap H^\infty(R, \delta^{-1}) \subseteq H^\infty(R)$)。また, Neville, 荷見等
 により考えられた領域も (1.3) をみたすものであつた。年代
 が遡るにつれて, 50年代に Parnau は次の条件を満たす領域を
 考えている。 $G(z, \zeta)$ を R 上の Green 関数, 1点 ϕ を固定し
 て,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (G(z, \phi) + i^* G(z, \phi)) \quad , \quad \text{但 } \phi \text{ は共役調和関数,}$$

の零点を a_n , その位数を c_n としたとき

$$(1.4) \quad \sum_n c_n G(\phi, a_n) < \infty$$

が成立する。Widom による (1.3) の特徴付けにはこの (1.4) が現
 われる。厳密に言えば, (1.3) と (1.4) の間には相異があるが,

本質的に同値であることが、荷見[3]により示されている。
以下では、(1.3)と(1.4)を区別せずこれを α をみたす領域を
Parreau-Widom型(略して, PW型)と呼ぶことにする。(注:
領域 R が双曲型で、ポテンシャル論的に正則な場合には(1.3)
と(1.4)は同値である)。

さて問題は, PW型で一般に(1.2)において等号が成立するか
どうかである。以下で、必ずしも等号の成立しない場合が
あることを示す。同じ例で、H. and M. Rieszの定理の拡張
も成立しないことがわかるので合わせて述べることにする。

2. 上で用いた記号の定義を述べておく。領域 R の中に1
点 $\odot$ を固定する。 $\odot$ を基点とする基本群を $\pi_1(R)$ 、 $\pi_1(R)$ から
 $\mathbb{T} = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ への群準同型(characterと呼ぶ)を $\pi_1(R)^*$
で表わす。 R 上の多価有理型関数で、 $|f|$ が1値となるものの
周期は $\pi_1(R)^*$ の元を用いて完全に記述できる。すなわち、
点 $\odot$ における関数要素 f_0 を決めて、 f は f_0 の解析接続^{全体}とみな
す。 $\odot$ を起点とする閉曲線 C に沿って f_0 の解析接続を f_C
とすると

$$(2.1) \quad f_C = \gamma_f(C) f_0$$

という関係がある。ここで、 $\gamma_f \in \pi_1(R)^*$ で、 f によって決ま
る character である。前節で述べた、内部関数 f の周期 γ_f

とはこの character のことである. $\sigma \in \pi_1(R)^*$ とおいたとき
に, σ を character とする多価関数 f で,

$$(2.2) \quad |f|^p \leq u, \quad u: \text{調和} \quad (0 < p < \infty)$$

$$|f| \text{ 有界} \quad (p = \infty)$$

となるものの全体を $H^p(R, \sigma)$ で表わす.

$$\|f\|_p = \inf \{ u(0)^{1/p} : u \text{ は (2.2) をみたす} \}$$

とかくと, これは $H^p(R, \sigma)$ の p -norm になる. R が単位円の

とせば, 0 として原点を取れば, 普通の L^p -norm に一致する.

3. はじめに述べた領域 R は次のようにして作くる. 単位
円 $\mathbb{D} = \{ |z| < 1 \}$ に含まれ, 原点に収束するような円周族の列

$$\Delta_n = \{ z : |z - \alpha_n| < r_n \}$$

で, 互いに共通分をもたないものを考える.

$$R = \mathbb{D} - \{0\} - \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$$

とかくと, α_n, r_n を適当にとることにより

$$(3.1) \quad R \text{ は PW 型}$$

$$(3.2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_n}{\alpha_n} < \infty$$

を満たすものを作れば同様の達成されたことになる. 実際,

$$M = \{ f \in H^\infty(R) : f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z} dz = 0 \}$$

とかくと, M は $H^\infty(R)$ の弱*閉イデアルとなることを (3.1) に

より保障される。また、 M の最大共通内部因子 z とすると $z \equiv \text{const.}$ となる。これは、仮に $z \neq \text{const}$ とすると、原点が極大イデアル空間の中で弱*閉 $\text{analytic disc } W$ の中心となることをかきめせる。 $\hat{z}$ が W と定数でないことはすぐわかるので、正則関数 z の閉写像ということより $\hat{z}(W)$ が $z=0$ の近傍を含むことになり事実には反する。従って、 M は (1.2) で等号の成立しない不変部分空間である。

α_n, r_n の選び方であるが、収束級数 $\sum d_n < \infty$ ($0 < d_n < 1$) を一つ固定する。次に $\alpha_n = 2^{-\nu_n}$ (ν_n : 自然数の増加列), $r_n = d_n \alpha_n$ とおく。 ν_n が十分速く発散すると R が PW 型になることが示される。一方 (3.2) は ν_n のとりきによりなり。

R が PW 型であることを示すには次のようにする。

$$I_n = [\alpha_n - r_n, \alpha_n + r_n]$$

とすると、

$$\tilde{R} = \mathbb{D}^2 - \{0\} - \bigcup_n I_n \quad (\mathbb{D}^2: 1-2 \text{ 次元球})$$

という補助的領域を考える。 $R \subset \tilde{R}$ であることから、 $\tilde{R}$ が PW 型ならば R も PW 型となることから (1.3) により示される。

$\tilde{R}$ を考えたのは、 $\tilde{R}$ 上の Green 関数は具体的に書くことができるためである。これを評価して $\nu_1 \rightarrow \infty, \nu_2 \rightarrow \infty, \nu_3 \rightarrow \infty$ のとき、

$$\sum \tilde{G}(\infty, a_n) \rightarrow 0$$

を示めせる. 従って, Perreau の条件 (1.4) が満たれる. かわ
しい計算については [6].

上の作りかたにおいて, 更に p_n という非減少自然数列で

$$(3.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

という性質を満たすものであれば, $r_n = d_n \alpha_n^{p_n}$ において R
が PW 型になることを示めせる. このとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n / \alpha_n^{p_n} < \infty, \quad \forall p_n$$

を満たす. $p_n = 1 / \log(1 + \frac{1}{n})$ と取れば (3.3) を満たしてかつ

$p_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) であるから, $z = 0$ における k 階の点微分

$$f^{(k)}(0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z^{k+1}} dz$$

は 0 である. 従って,

$$J_{\infty} = \{f \in H^{\infty}(R) : f^{(k)}(0) = 0 \text{ for all } k\}$$

とかくと, J_{∞} は 0 で T_{∞} -ideal で, J_{∞} の最大共通内部因子
は定数となることを示めせる. 従って, (1.2) における包含
関係は J_{∞} については余次元が無限大になる, という.

4. (1.2) でつねに等号が成立している PW 型の領域では

H. and M. Riesz の定理の一般化を示めせる ([4]).

領域 R が PW 型の時, $H^{\infty}(R)$ のゼロフ境界 $\mathcal{H}(R)$ はリ
ーマン面の理想境界という Wiener の調和境界 $\bar{\omega}(R)$ と一致す
る. $\bar{\omega}(R)$ 上には調和測度と呼ばれる確率測度 ω_2 があつて,

R 上の有界調和関数はすべて

$$(4.1) \quad u(z) = \int_{\mathbb{R}} u(b) d\omega_z(b)$$

と表わすことができる。 ω_z はすべての $z \in R$ について互いに絶対連続なので、

$$P_z(b) = \frac{d\omega_z}{d\omega_0}(b)$$

とみると、これは単位円というポアソン核に対応している。

H. and M. Riesz の定理の一般化は次のように述べられる。

$$(4.2) \quad \mu \in H^\infty(R) \text{ に直交する } \mathbb{R}(R) \text{ 上の測度とす、これは、 } \mu \text{ の Lebesgue 分解 } \mu = \mu_a + \mu_s, \quad \mu_a \ll \omega_0, \quad \mu_s \perp \omega_0 \text{ に対して、 } \mu_a \text{ と } \mu_s \text{ が } H^\infty(R) \text{ に直交する。}$$

前節で与えた例ではこの性質が成り立たない。実際、

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} \frac{f(z)}{z} dz$$

で与えられる測度を $\mathbb{R}(R)$ 上に lift (上げ) すると μ_a とすると、

μ は ω_0 に対して絶対連続である。一方

$$\mu_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_n} \frac{f(z)}{z - a_n} dz$$

で与えられる測度を $\mathbb{R}(R)$ へ lift して、その弱*集積点の一つを μ_s とすると、 μ_s が $z=0$ における (複素) 表現測度となることから、次のようにしてわかる: 与えられた

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w-z} dw - \sum_k \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_k} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

$$= f_0(z) - \sum_k f_k(z)$$

と分解する ([1]). 留数定理により

$$\mu_n(f) = f_0(\alpha_n) - \sum_{k \neq n} f_k(\alpha_n)$$

となる. $\delta, 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(f) = f_0(0) - \sum_k f_k(0) = f(0).$$

μ_s の台は $\widehat{\Sigma}^{-1}(0) \cap \text{III}(R)$ 上にあり, $\omega_0(\widehat{\Sigma}^{-1}(0)) = 0$ であるから,

$\mu_s \perp \omega_0$. $\delta, 2$, $\mu = \mu_a - \mu_s$ は $H^\infty(R)$ に直交するが, μ_a, μ_s は直交しない.

5. Widom は次の問題を考えた.

$$m^p(r) = \sup \{ |f(0)| : f \in H^p(R, r), \|f\|_p \leq 1 \}.$$

領域 R が PW 型ならば

$$(5.1) \quad \inf \{ m^p(r) : r \in \pi_1(R)^* \} > 0$$

となることを示している. 更に, $\pi_1(R)^*$ はコンパクト・アーベル群 $\mathbb{T}^d$ (d は高々可算濃度) に同型であるので, この位相で $\pi_1(R)^*$ を位相空間と考えると, $m^\infty(r)$ が連続という条件が意味をもつ. この条件も Widom が導入したものであり, PW 型の場合には, (1.2) で等号が成立することと, $m^\infty(r)$ が連続となることは本質的に同値であることが示されている.

([5]). 従って、先に述べた例では $w^\infty(r)$ も連続でない。

最後に、まだ未解決と思われる問題を上げておきます。

(5.2) $H^\infty(R)$ は H^p で dense?

(5.3) $w \in L^1(\alpha)$, $w \geq 0$ $n \in \mathbb{Z}$

$$\inf_{f \in H_0^\infty(R)} \int |1 - f| w d\alpha = \left(\frac{1}{m^p(r_{w/p})} \right)^p \exp\left(\int \log w d\alpha\right)?$$

(5.4) $I(R) \neq H^\infty(R)$ ならば常に $\dim H^\infty(R)/I(R) = \infty$?

(5.5) $I(R)$ と $H^\infty(R)$ の間にある弱* 閉不変部分空間全体と $\mathcal{H}^p(R, \sigma_f^{-1})$ と $\mathcal{H}^p(R, \sigma_f^{-1})$ の間にある (弱*) 閉不変部分空間との間には、包含関係を保つような 1:1 対応があるか?

はじめの 2 つは、 R が PW 型で (1.2) で等号が成立していれば成立することはおわか、という ([4]). 一般の PW 型の領域で成立するかどうかわかりません。後の 2 つについては記号の意味を説明する。 $I(R)$ は $H^\infty(R)$ に含まれるイデアルで、その最大^{共通}内部因子が定数という性質をもつもののうち最小のものである。その存在はわか、という。 $\mathcal{H}^p(R, \sigma_f^{-1})$ は $I(R) \mathcal{H}^p(R, \sigma_f^{-1})$ の closed linear span である。

最近、荷見先生による Lecture Note が Springer から出ましたので、興味ある方はぜひとも参考になることと思います。 ([11]).

1. M. Behrens, The corona conjecture for a class of infinitely connected domains, Bull. Amer. Math. Soc. 76(1970), 387-391.
2. M. Hasumi, Invariant subspaces on open Riemann surfaces, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 24,4 (1974), 240-255.
3. _____, Invariant subspaces on open Riemann surfaces, II, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 26,2 (1976), 273-299
4. M. Hayashi, Szegő's theorem on Riemann surfaces, Hokkaido Math. J. 10(1981) Sp., 242-253.
5. _____, Invariant subspaces on Riemann surfaces of Parreau-Widom type, Trans. Amer. Math. Soc. 279(1983), 737-757.
6. _____, An example of a domain of Parreau-Widom type, to appear.
7. C.W. Neville, Invariant subspaces on Hardy classes on infinitely connected plane domains, Bull. Amer. Math. Soc. 78(1972), 857-860.
8. _____, Invariant Subspaces of Hardy Classes on Infinitely Connected Open Surfaces, Memoirs Amer. Math. Soc. Number 160, 1975.
9. H. Widom, The maximum principle for multiple-valued analytic functions, Acta Math. 126(1971), 63-82.
10. _____, H_p sections of vector bundles over Riemann surfaces, Ann. of Math. 94 (1971), 305-324.
11. M. Hasumi, Hardy Classes on Infinitely Connected Riemann Surfaces, LNM #1027, 1983, Springer-Verlag.