

Navier-Stokes 方程式の定常解について

京大 理 数学教室 池部豊生

この報告は, 1964 年 4 月 New York で開かれた *Applications of Non-linear Partial Differential Equations in Mathematical Physics* に関する symposium における R. Finn の報告の, 恐らくは多分に誤解を含んだ, 抄訳に過ぎない。したがって, Navier-Stokes 方程式の数学的取扱いに興味を持られる方は, この方面の専門家でない筆者の報告などよりは, 流体物理学者にとっても極めて readable であるし, また殆んどいたる所で available であると思われる, Finn の原論文 [1] を読んでいただきたい。また非定常の問題も含めて数学的な Navier-Stokes 方程式の理論を取ったものとしては Ladyzhenskaya の本 [2] がある。

さて問題にある定常解が満たすべき方程式は

$$(1) \quad \nu \Delta \vec{w} - \vec{w} \cdot \nabla \vec{w} - \nabla p = -\vec{f}(\vec{x}),$$

$$(2) \quad \nabla \cdot \vec{w} = 0$$

である。ここに $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ は位置ベクトル, $\vec{w} = \vec{w}(\vec{x})$ は $\vec{x}$ における流体粒子の速度, $p = p(\vec{x})$ は圧力, $\vec{f}$ は外力, ν は粘性係数と密度の比, 方程式 (1) は力の平衡関係を示すもので, (2) は連続の方程式である。以下 $\nu=1$ として議論する。

§1. 内部問題

Σ を十分滑らかな有界閉曲面とし、その内部を Ω で表わす。問題は

$$(3) \quad \vec{u}|_{\Sigma} = \vec{u}^* \quad (\text{境界上で与えられた値 } \vec{u}^* \text{ をとる})$$

を満たす (1), (2) の解を求めよというのである。 ϕ については境界条件を与えない。これは (附加定数を除いて) $\vec{u}(\vec{x})$ によって定まるべきものである。また $\vec{u}^*$ は勝手に与えることはできない。 (2) が要求するように

$$(4) \quad \int_{\Sigma} \vec{u}^* \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \quad (\vec{n} \text{ は } \Sigma \text{ 上の法線ベクトル})$$

を満たさなければならぬ。

1.1. 線形理論. 内部境界問題の最初の研究は Lichtenstein^[3] および Odqvist^[4] に負う。Odqvist は (1) において非線形項のない同次方程式

$$(5) \quad \Delta \vec{u} - \nabla \phi = 0$$

と連続の方程式

$$(6) \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

とからなる系に対して、調和函数に対する potential 論に類似する "hydrodynamical potential theory" を展開した。potential 論における Green 函数に当るものが、ここでは (未知函数が単独ではないので) Green "tensor" $G(\vec{x}, \vec{y})$ である。また圧力 ϕ に対するものとして同様な性格の "pressure

vector" $\vec{p}(\vec{x}, \vec{y})$ も得られる。

1.2. 非線形問題 $\vec{u}_0(\vec{x})$ を線形問題

$$(7) \quad \Delta \vec{u} - \nabla p = -\vec{f}(\vec{x}), \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{u}|_{\Sigma} = \vec{w}^*$$

の解とする。いま

$$(8) \quad \vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}_0(\vec{x}) + \sum_{j=1}^{\infty} \vec{u}_j(\vec{x}) \lambda^j$$

とおいて, $\vec{u}(\vec{x})$ に対する積分方程式

$$(9) \quad \vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}_0(\vec{x}) + \lambda \int G \cdot \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \, dy$$

に代入すれば, $\{\vec{u}_j(\vec{x})\}$ に関する漸化式が得られる。Odqvist [4] による G に対する評価式を用いれば, λ を十分小として (8) が収束し, かつ Σ 上では $\vec{w}^*$ をとることがわかる。積分方程式 (9) は

$$(10) \quad \Delta \vec{u} - \nabla p = -\vec{f}(\vec{x}) + \lambda \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}, \quad \nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \vec{u}|_{\Sigma} = \vec{w}^*$$

と同値であつて, $\vec{w} = \lambda \vec{u}$ は (1), (2), (3) の解を与える。

1.3. Leray の結果. Leray [5] の結果は " $\vec{w}^*$ が (4) を満足するならば, 問題 (1), (2), (3) は少なくとも一つの解をもつ" というのである。これは後に Leray および Schauder によつて定式化された不動点定理 [6] の先駆となすものであつた。その証明はここでは詳しく述べないが, (1), (2) を

満足する $\vec{w}$ の Dirichlet 積分

$$(11) \quad \int_G |\nabla \vec{w}|^2 dx = \|\vec{w}\|^2$$

に関する, ある *a priori* な評価に基づいている。Leray [5] において提出された方法は, 後に E. Hopf によって更に明確化され, 発展させられた [7]。この結果は 2 次元の Navier-Stokes 方程式に対しても成立つが, 4 次元以上の場合には重大な困難があるようである。

1.4. Ladyzhenskaia の寄与 [8, 2]。Ladyzhenskaia は Leray の存在定理の一つの variant を得たが, その方法は函数解析に基づいていた。

彼女は Navier-Stokes 方程式の *generalized solution* というものを導入したが, この考え方はその後の研究においても屢々現われる。問題 (1), (2), (3) の *generalized solution* $\vec{w}(\vec{x})$ とは, 境界値 $\vec{w}^*$ をとる G で滑らかな勝手な *solenoidal* (divergence-free) な函数 $\vec{a}(\vec{x})$ に対して, $\vec{u} = \vec{w} - \vec{a}$ が函数空間 $\mathcal{H}$ に属し ($\mathcal{H}$ は G で無限回微分可能で, *solenoidal* かつ境界 (無限遠方も境界と考える) の近傍で恒等的に 0 となるような函数の全体を Dirichlet norm (11) で完備化したものである。あらくいえば Dirichlet norm (11) が有限な *solenoidal* な函数の全体といつてもよからう。 $\mathcal{H}$ は Hilbert 空間になる), かつ

$$(12) \quad \int_G \{ \nabla(\vec{u} + \vec{a}) \cdot -(\vec{u} + \vec{a}) \cdot (\vec{u} + \vec{a}) \} \nabla \vec{\Phi} dx = - \int_G \vec{f} \cdot \vec{\Phi} dx$$

がすべての $\vec{\Phi} \in \mathcal{H}$ に対して満足されていることである。さて $\vec{u}$ が *generalized*

solution であるとするれば、これが $\mathcal{D}$ における ^{ある} 非線形方程式の解でなければならぬことが結論される。この非線形方程式の解の存在をいうのには、先に触れた Leray-Schauder 不動点定理による。Leray がその存在を示した解は classical solution であるから、その点では Ladyzhenskaja の gen. soln. よりよいわけであるが、彼の場合には Green Tensor に関する色々面倒な評価が必要——いわば古典的——であったのが、彼女の取扱いは函数解析の手法を用いることによつて、全体の見通しをよりよくしている。更に gen. soln. を問題とすることによつて、例えば angular point をもつたような領域に対しても、方法が適用される。gen. soln. が古典的な解になるかという問題については、領域内部での regularity を示すことはさほど困難ではないが、境界までこめた regularity については、Green Tensor に関する Odqvist による評価を用いる以外の方法では、まだ示されていないようである。

1.5. Shinbrot の寄与. 前述の Ladyzhenskaja の方法は次元が 4 以上になるとうまく行かない。Shinbrot [9] はある修正を行つて、Ladyzhenskaja の方法を 4 次元でも成立するように拡張した。

1.6. Fujita の寄与 [10]. Fujita はその gen. soln. の定義に於いて、Ladyzhenskaja が (12) がすべての $\vec{v} \in \mathcal{D}$ に対して成立することを要求したのに対して、(12) が滑らかな境界の近傍で 0 となる solenoidal な $\vec{v}$ に対してだけ要求した。 $n \leq 4$ (n は空間の次元) では両者は一致するが、 $n > 4$ では

$\vec{u} \in \mathcal{H}$ としたのでは (12) の非線形項の繰積分の存在さえわからない。

Fujita は Galerkin の方法によつて解の近似列を構成することにより、問題を有限次元の問題に帰着し、そこで有限次元空間における Brouwer の不動点定理を使うことによつて、先ず近似解の存在を示し、次いで極限操作によつて求める解の存在を示した。不動点定理は近似解の段階だけで使う。また彼の方法は僅かの修正によつて $n > 4$ の場合にも適用でき、外部問題に対しても、自然な解の構成法を与える。

1.7. gen. soln. の regularity. 内部 regularity については、前にも触れたように、 $\vec{f}$ に対する適当な仮定の下に肯定的に解決されている ($n=2, 3$). 例えば Fujita [10] を参照されたい。境界までこめた regularity については、 Σ も $\vec{u}^*$ も滑らかならば、解は境界までこめて滑らかであることが知られている。証明は Green Tensor の評価を用いる以外には知られていない。 $n > 3$ の場合には、gen. soln. の regularity については何も知られていない。

1.8. 一意性. 粘性係数 ν を復元させる。 ν が十分大きければ、解は一意的である (例えば Finn [11])。 ν が減少すれば、一意性が破れるであろうという予想が長く行なわれてきた。最近 Velte は実際に multiple solutions の存在を示した (今井教授による。文献は多分 1966 年の *Archive for Rational Mechanics and Analysis*)。 Velte はこれ以前にも Navier-Stokes と関連の深い問題に対して解の bifurcation を示した [12]。

§2. 外部問題.

外部問題, すなわち有界閉曲面 Σ の外に種たれる領域 E における Navier-Stokes の解を求める問題では, 新たな困難が現われる. この場合には無限遠における境界条件を設定しなければならない. 物理的考察による自然なものとしては, $\vec{w} \rightarrow \vec{w}_0 \equiv \text{const}$ が考えられる. Σ 上では条件 (4) の下で $\vec{w} = \vec{w}^*$ を要求する.

内部問題と事変り, $n=2$ と $n=3$ の問題では著しい違いが現われる. $n=2$ の場合の方が困難である. 以下では $n=3$ の場合に話を限る.

2.1. Dirichlet 積分有限な解. $\vec{f}(\vec{x}) \in L_2(E)$ としよう. $\vec{w}(\vec{x})$ が (1), (2) の解で

$$(13) \quad \int_E |\nabla \vec{w}|^2 dx < \infty$$

を満たすならば, $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ のとき $\vec{w}(\vec{x}) \rightarrow \vec{w}_0$ となるような vector $\vec{w}_0$ が存在する (Finn [11, 13]).

2.2. 無限遠において連続な解. $\vec{w}(\vec{x})$ を $\vec{f} \in L_\beta(E)$ ($\beta > 2$) に対する (1) (2) の解で, $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ のとき $\vec{w}(\vec{x}) \rightarrow \vec{w}_0$ であるとしよう. このとき $\nabla \vec{w} \rightarrow 0$ である. ここで (13) は仮定していない. この結果は Finn [14] による.

2.3. Class P.R. の解. E における解 $\vec{w}(\vec{x})$ が class P.R. (Physically Reasonable) に属するとは, ある $\varepsilon > 0$ とある vector $\vec{w}_0$ が存在して,

$|\vec{w}(\vec{x}) - \vec{w}_0| < \text{Const. } r^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}$ ($r \rightarrow \infty$) が成立つことである。 $\vec{f}$ をポテンシャルカとし, $\vec{w}$ を P.R. 解としよう。すると $\vec{w}_0$ の方向に軸をとった paraboloidal wake region があつて, その内部では $|\vec{w} - \vec{w}_0| = O(r^{-1})$ となることが知られている (Finn [14, 15])。

2.4. 運動エネルギーが ∞ の場合. (1), (2) に対応する同次方程式を考えよう ($\vec{f} = 0$). $\vec{w}(\vec{x})$ は Σ 上で 0 とするこの同次方程式の解で ($\mathcal{E}$ における), 無限遠方で有界であるとする。このとき, いかまる一様流 $\vec{w}_0 (= \text{const.})$ に対しても, これからの disturbance の運動エネルギーは無限大になる。すなわち

$$(14) \quad T \equiv \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} |\vec{w} - \vec{w}_0|^2 dx = \infty.$$

これは Finn [30] の結果である (が trivial な場合を除いての話である)。このことから云える帰結としては, $\vec{w}(\vec{x})$ が同次方程式を全空間でみたしかつ有界であれば, ある constant vector $\vec{w}_0$ に対して $\int |\vec{w} - \vec{w}_0|^2 dx < \infty$ なる場合には, $\vec{w}$ は恒等的に $\vec{w}_0$ に等しい, ことがあげられる。

2.5. class D における解の存在. 今までの外部問題に関する議論では, 解の存在はすべて仮定されてきた。ここでは, 条件 (13) を満たすような解 — これを class D (= Dirichlet) の解という — の存在について述べる。境界値 $\vec{w}_0$ が (4) を満足し, $\|\vec{f}\| \in L_2(\mathcal{E})$ であるとする。このとき, 勝手な (遠方における) 一様流 $\vec{w}_0$ に対して, $\mathcal{E}$ における Navier-Stokes 方程式の解

$\vec{w}(\vec{x})$ で次の条件を満たすものが存在する (一意性は主張しない): (i) Σ 上で $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{w}^*(\vec{x})$, (ii) $\vec{w}(\vec{x})$ は class D に属する, (iii) $\vec{w}(\vec{x}) \rightarrow \vec{w}_0$, $|\vec{x}| \rightarrow \infty$. この結果については, Leray [5], Ladyzhenskaya [2, 8], Finn [11], Fujita [20] などを参照されたい.

class D の解が前に述べた class PR の解であるか, ということは興味ある問題であるが, 無限遠における解の連続性とその偏導関数が 0 に近づく, ということ以上には, class D の解の漸近的振舞については, 何もわかっていない. ところが, $\vec{w}(\vec{x})$ が Dirichlet 積分有限な (13) をみたす勝手な vector 関数で, 無限遠において $\vec{w}(\vec{x}) \rightarrow \vec{w}_0 (= \text{const})$ ならば, 原点より出る殆んどすべての射線 (ray) 上で, $|\vec{w}(\vec{x}) - \vec{w}_0| < Cr^{-\frac{1}{2}}$ である. ここで $\vec{w}(\vec{x})$ は必ずしも Navier-Stokes 方程式の解でなくてもよいことに注意されたい. この結果は Finn [11] による.

Class D の解の一意性については何も知られていない. 境界値その他の data が十分小さければ, すべての解が一様に互いに近いという結果はあるが (Finn [11]).

2.6. class PR における解の存在. これについてもすつまつした結果は得られていまいようである. 境界値 $\vec{w}^*(\vec{x})$ と constant vector $\vec{w}_0$ の差 $\vec{w}^* - \vec{w}_0$ を考える. これが Σ 上で, 3 階の接線方向の導関数まで含めて, 小さいならば, Σ における PR 解 $\vec{w}(\vec{x})$ で次の条件をみたすものが存在する:
 $\vec{w}(\vec{x}) = \vec{w}^*(\vec{x})$ on Σ , 無限遠で $\vec{w}(\vec{x}) \rightarrow \vec{w}_0$ (Finn [15, 17]).

これと関連して, 一意性についていえることは, 次の Finn [17] の結果

である。 Re^* が Σ 上で十分小さければ、解は、同じ data (Σ 上では Re^* 無限遠では Re) をとる PR 解の中で unique である。ただし PR から はみ出したときには何もわからない。

この後、Finn [1] の論文の内容は、*Flows at low Reynolds' number; Flows at high Reynolds' number; Stationary solutions as limits of nonstationary solutions; Other results; Outlook* と続くのであるが、不案内な道を手探りでこれ以上進むのは危険が増すばかりなので、この辺で話は終りということにさせていただきたい。ただ Finn 自身がいつている次の言葉だけ記しておく。

It is apparent that less is known than is not.

更に彼はいう。

I hope the reader may find on perusing this report still other points of departure for new and fruitful investigations.

ここの "I" は勿論 Finn のことである。Finn の report はいざ知らず、"この" 報告は peruse するにはあまりに雑かつ不完全であることを最後にふ詫びしなければならぬ。

文 献

- [1] R. Finn: Stationary solutions of the Navier-Stokes equations, *Proc. Symp. Appl. Math.*, Vol. 17 (1965), pp 121-153.
- [2] O. A. Ladyzhenskaja: The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon and Breach, New York, 1963.
- [3] L. Lichtenstein: Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik, *Math. Z.*, 32 (1930), pp 608-640.
- [4] F. K. Odqvist: Die Randwertaufgaben der Hydrodynamik, zäher Flüssigkeiten, Norstedt and Söner, Stockholm, 1928; *Math. Z.*, 32 (1930), pp 329-375.
- [5] J. Leray: Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique, *J. Math. Pures Appl.*, 9 (1933), 1-82; Les problèmes non linéaires, *Enseignement Math.*, 35 (1936), 139-151.
- [6] J. Leray et J. Schauder: Topologie et équations fonctionnelles, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 51 (1934), 45-78.
- [7] E. Hopf: Ein allgemeiner Endlichkeitsatz der Hydrodynamik, *Math. Ann.*, 117 (1940-41), 764-775.
- [8] O. A. Ladyzhenskaja: Investigation of the Navier-Stokes equations in the case of stationary motion of an incompressible fluid, *Uspehi mat. Nauk.*, 3 (1959), 75-97.
- [9] M. Shubert: A fixed point theorem and some applications,

- Arch. Rat. Mech. Anal.*, 17 (1964), 255-271.
- [10] H. Fujita: On the existence and regularity of the steady-state solutions of the Navier-Stokes equations, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, 9 (1961), 59-102.
- [11] R. Finn: On the steady-state solutions of the Navier-Stokes equations. III, *Acta Math.*, 105 (1961), 197-244.
- [12] W. Velte: Stabilitätsverhalten und Verzweigung stationärer Lösungen der Navier-Stokeschen Gleichungen, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16 (1964), 97-125.
- [13] R. Finn: On steady-state solutions of the Navier-Stokes partial differential equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 3 (1959), 381-396.
- [14] R. Finn: Estimates at infinity for stationary solutions of the Navier-Stokes equations, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R.P. Roum.*, 3(51) (1959), 387-418; *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. 4, pp. 143-148, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1961.
- [15] R. Finn: On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems, *Arch. Rat. Mech. Anal.* (to appear)
- [16] R. Finn: An energy theorem for viscous fluid motions, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 6 (1960), 371-381.
- [17] R. Finn: On the Stokes paradox and related questions, *Nonlinear problems*, Univ. of Wisconsin Press, Madison, Wis., 1963.