

$\mathcal{P}(\omega)/\text{finite}$ 上の limits

阪府大総 加茂静夫 (Shizuo Kamo)

$\mathcal{P}(\omega)$ 上の quasi-order $\leq^*$ を, $x \leq^* y$ となるのは $x \setminus y$ が finite のとき, で定める. $x <^* y$ は, $x \leq^* y$ かつ not $y \leq^* x$ を意味する. quasi-order $\leq^*$ による $\mathcal{P}(\omega)$ 上の同値関係を $\sim$ で表わす. ω の部分集合からなる k -sequence $X = \langle x_\alpha \mid \alpha < k \rangle$ が, k -limit であるとは, X が $<^*$ -下降列であり, 任意の ω の無限部分集合 Y に対して, $\exists \alpha < k$ (not $y <^* x_\alpha$) が成り立つこととする. 定義からすぐわかるように, 適当な cardinal k について, k -limit が存在する. そこで, 連続体仮説の下で, ω_1 は, limit が存在する唯一の cardinal となる. 更に, 連続体の濃度が ω_2 ($2^\omega = \omega_2$) の場合には, 次の (A) $\sim$ (C) の可能性が考えられる. (A) $\exists \omega_1\text{-limit} + \neg \exists \omega_2\text{-limit}$. (B) $\neg \exists \omega_1\text{-limit} + \exists \omega_2\text{-limit}$. (C) $\exists \omega_1\text{-limit} + \exists \omega_2\text{-limit}$. (A) $\sim$ (C) のそれぞれが $2^\omega = \omega_2$ と整合することは, よく知られている. まず, (A) をみたす model は, 連続体仮説の成り立つ universe に対して,

ω_2 個の Cohen real を加える generic extension により得られる。
 又, (B) は マルティンの公理と $2^\omega = \omega_2$ から導かれる。更に,
 (B) の model に ω_1 個の Cohen real を加える generic extension による
 model では (C) が成り立つ。では, 連続体の濃度 ($= 2^\omega$) が大
 きい場合はどうなるか。この論文ではそれについて考えるが,
 $\exists k$ -limit なら, $\exists cf k$ -limit が成り立つから, regular cardinal
 の limit に制限して考察を行う。そして, 次の結果を証明す
 る。

定理 (一般連続体仮説) n を自然数とし, $\kappa_0, \dots, \kappa_n$ と
 λ は regular cardinal で $\omega_1 \leq \kappa_0 < \dots < \kappa_n \leq \lambda$ をみたすとする。
 このとき, poset P で, 次の (i) から (iv) をみたすものが存在する。

- (i) P は countable chain condition をみたす,
- (ii) $\Vdash_P "2^\omega = \check{\lambda}"$,
- (iii) $m = 0, 1, \dots, n$ に対して, $\Vdash_P "\exists \check{\kappa}_m$ -limit" となる。
- (iv) θ が $\kappa_0, \dots, \kappa_n$ 以外の regular cardinal なら, $\Vdash_P "\neg \exists \check{\theta}$ -limit"

となる。

以下, この定理の証明のため, 一般連続体仮説を仮定し,
 $\kappa_0, \dots, \kappa_n, \lambda$: regular cardinals & $\omega_1 \leq \kappa_0 < \dots < \kappa_n \leq \lambda$
 とする。 $k = \kappa_n$, $\bar{k} = \kappa_0$ と記す。

<< poset P の構成 >> T_ξ ($\xi < \kappa$) による k -stage finite
 support iteration S_ξ ($\xi < \kappa$) を ξ に関する induction で次の様に

定める. ここで各 $\xi < \kappa$ に対して, $G|\xi$ は V -generic on $\mathcal{P}_\xi$ を,
 G_ξ は $V[G|\xi]$ -generic on T_ξ を表わす.

1). $\xi = 0$ のとき.

$$T_0 = 2^{<\omega} (= \{t; \exists k < \omega (t: k \rightarrow 2)\}),$$

$$a_0 = b_0 = \{k < \omega; \exists t \in G_0 (t(k) = 1)\}$$

とする.

2). $\xi = \eta + 1$ のとき.

$$T_\xi = 2^{<\omega},$$

$$b_\xi = \{k < \omega; \exists t \in G_\xi (t(k) = 1)\},$$

$$a_\xi = a_\eta \cap b_\xi$$

とする.

3). ξ が limit のとき.

$$T_\xi = (\mathcal{P}_{<\omega}(\omega) \times \mathcal{P}_{<\omega}(\xi), \leq),$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ただし, } T_\xi \text{ の order は,} \\ (u, \alpha) \leq (v, \beta) \iff u \supset v \ \& \ \alpha \supset \beta \ \& \ u \setminus v \subset \bigcap_{\eta \in \beta} a_\eta \end{array} \right)$$

$$a_\xi = b_\xi = \bigcup \{u; \exists \alpha ((u, \alpha) \in G_\xi)\}$$

とする.

$S_\xi (\xi \leq \kappa)$ は, 定理の (iii) を成り立たせるための poset である.

次の補題 1 ~ 2 が成り立つ.

補題 1. $\xi < \eta < \kappa$ とすると,

$$\Vdash_{\eta+1} "a_\eta \not\subset \phi \ \& \ a_\eta <^* a_\xi"$$

である。

補題 2. $\forall \theta \leq \bar{\kappa} (\theta \geq \omega_1, \text{regular} \Rightarrow \Vdash_{\theta} " \langle \dot{a}_\xi \mid \xi < \check{\theta} \rangle : \check{\theta}\text{-limit} ")$

補題 3. S_κ は countable chain condition をみたす。更に,

$\forall W \subset S_\kappa (|W| = \omega_1 \Rightarrow \exists W_1 \subset W (|W_1| = \omega_1 \ \& \ W_1 : \text{pairwise compatible}))$ が成り立つ。

補題 2 より, poset $\bar{P}$ を,

$$\bar{P} = S_{\kappa_0} \times \cdots \times S_{\kappa_n} \times \{f : \exists \alpha < \lambda (|\alpha| < \omega \ \& \ f : \alpha \rightarrow 2)\}$$

で定めれば, $\bar{P}$ は定理の (i) ~ (iii) をみたす。そこで, 以下, $\bar{P}$ を拡張して, (i) ~ (iv) をみたす poset P をつくる。

directed set $I = (I, \leq)$ を,

$$I = \kappa_0 \times \cdots \times \kappa_n \times \mathcal{P}_{<\kappa}(\lambda)$$

$$(\xi_0, \dots, \xi_n, A) \leq (\eta_0, \dots, \eta_n, B) \iff \xi_0 \leq \eta_0 \ \& \ \cdots \ \& \ \xi_n \leq \eta_n \ \& \ A \subset B$$

で定める。

$X \subset \mathcal{P}(\omega)$ が strong finite intersection property (sfip) を持つとき, poset $R_X = (\mathcal{P}_{<\omega}(\omega) \times \mathcal{P}_{<\omega}(X), \leq)$ を,

$$(u, \alpha) \leq (v, \beta) \iff u \supset v \ \& \ \alpha \supset \beta \ \& \ u \setminus v \subset \bigcap \gamma$$

で定める。 R_X は strong countable chain condition をみたす poset であり, G を V -generic on R_X とし, $a = \bigcup \{u : \exists \alpha ((u, \alpha) \in G)\}$ とおくと, $a \subset \omega \ \& \ a \neq \emptyset \ \& \ \forall \alpha \in X (a \leq^* \alpha)$ が成り立つ。

各 $\bar{i} = (\xi_0, \dots, \xi_n, A) \in I$ に対して, $\mathcal{Q}_\alpha(\bar{i})$ ($\alpha < \bar{\kappa}$) による $\bar{\kappa}$ -stage finite support iteration $\mathcal{P}_\alpha(\bar{i})$ ($\alpha \leq \bar{\kappa}$) を次の induction により

定める. ここで, 各 $\alpha < \bar{\kappa}$ に対して, $G|\alpha$ は V -generic on $P_\alpha(i)$ を表す. まず,

$$Q_0(i) = S_{\aleph_0} \times \cdots \times S_{\aleph_n} \times \{f; \exists \alpha < A(|\alpha| < \omega \ \& \ f: \alpha \rightarrow 2)\}$$

とし, $0 < \alpha < \bar{\kappa}$ に対して, $V[G|\alpha]$ において,

$$Q_\alpha(i) = \text{the finite product of } \langle R_x \mid x \in \Gamma_\alpha(i) \rangle,$$

(ただし, $\Gamma_\alpha(i) = \{X \subset \mathcal{P}(\omega); |X| < \kappa \ \& \ X \text{ は sfp を持つ}\})$

とする. $P(i) = P_{\bar{\kappa}}(i)$ とおく.

各 stage α で $Q_\alpha(i)$ が countable chain condition をみたすから, $P(i)$ も countable chain condition をみたす. 又, $i \leq j$ のとき, $Q_0(i)$ が $Q_0(j)$ の complete な subposet になることと, $Q_\alpha(i), Q_\alpha(j)$ ($0 < \alpha < \bar{\kappa}$) の定めきから, $P(i)$ は $P(j)$ の complete な subposet になる. そこで, poset P を,

$$P = \bigcup_{i \in I} P(i)$$

で定める. P が定理で求める poset となることをみていく.

« P は countable chain condition をみたすこと »

I が σ -closed な directed set であることと, $P(i)$ ($i \in I$) が countable chain condition をみたすことから, 容易に導かれる.

« $\Vdash_P \aleph^\omega = \aleph^\lambda$ となること »

まず, $|P| \leq \sum_{i \in I} |P(i)| \leq \kappa \cdot |I| = \lambda$ だから,

$$\Vdash_P \aleph^\omega \leq \aleph^\lambda$$

である.

便宜のため, 各 $p \in P$ に対して, $p(0) = (\Delta_0^p, \dots, \Delta_n^p, f^p)$ と記す.

今, $Q = \{ p \in P; \text{supp}(p) = \{0\} \ \& \ \forall m \leq n (\Delta_m^p = \emptyset) \}$ とおくと,

$Q \cong \{ f; \exists \alpha < \lambda (|\alpha| < \omega \ \& \ f: \alpha \rightarrow 2) \}$ となるから,

" $\Vdash_Q$ " $\lambda^\vee$ 個の Cohen real over $V^\vee$ が存在する"

が成り立つ. これと, Q が P の complete subposet であることより,

" $\Vdash_P$ " $\lambda^\vee$ 個の Cohen real over $V^\vee$ が存在する"

が成り立つ. そこで, " $\Vdash_P$ " $2^\omega \geq \lambda^\vee$ " である.

<< $\forall m \leq n (\Vdash_P \text{"} \exists \kappa_m^\vee \text{-limit" })$ について >>

P が countable chain condition をみたすことと, I が σ -closed により次の補題が成り立つ.

補題 4. α を P -name とし, " $\Vdash_P \alpha < \omega$ " とすると, 適当な $i \in I$ と $P(i)$ -name $\bar{\alpha}$ で " $\Vdash_P \alpha = \bar{\alpha}$ " となるものがある.

$\forall m \leq n (\Vdash_P \text{"} \exists \kappa_m^\vee \text{-limit" })$ を示すため,

$m \leq n \ \& \ G : V\text{-generic on } P$

とする. $H = \{ \Delta_m^p; p \in G \} \subset S_{\kappa_m}$ とおく. このとき,

H は V -generic on S_{κ_m} となるから, $S_\xi (\xi \leq \kappa_m)$ と同時に

定めた names $a_\xi, b_\xi (\xi < \kappa_m)$ の解釈がある. それ等を, $a_\xi^H,$

$b_\xi^H (\xi < \kappa_m)$ とする. $X = \langle a_\xi^H \mid \xi < \kappa_m \rangle$ とおく. X が,

$V[G]$ において, κ_m -limit となることを示すが, まず, 補題 1

より, X は長さ κ_m の $<^*$ -下降列である. そこで,

$V[G] \models \forall y < \omega (y \neq \emptyset \Rightarrow \exists \xi < \kappa_m (\text{not } y <^* a_\xi^H))$ "

を示せばよい。それを示すため、 $y \in V[G]$ を、 $y \subset \omega$ &
 $y \neq \emptyset$ となる set とする。補題4により、

$$y \in V[G \cap P(i)]$$

となる $\bar{i} = (\xi_0, \dots, \xi_m, A) \in I$ が存在する。 $\delta = k_m + 1$ とおく。

このとき、 b_δ^H は Cohen real over $V[G \cap P(i)]$ となるから、

$$y \setminus b_\delta^H \neq \emptyset$$

である。これと、 $a_\delta^H \subset b_\delta^H$ より、 $y \setminus a_\delta^H \neq \emptyset$ 。

$$\therefore \text{not } y \leq^* a_\delta^H$$

$$\ll \forall \theta: \text{regular} (\forall m \leq n (\theta \neq k_m) \Rightarrow \Vdash_P " \neg \exists \check{\theta}\text{-limit} ") \gg$$

背理法で示すため、

$$(1) \quad \theta: \text{regular} \ \& \ \forall m \leq n (\theta \neq k_m)$$

$$(2) \quad \Vdash_P " \langle y_\delta \mid \delta < \check{\theta} \rangle: \check{\theta}\text{-limit} "$$

とする。各 $\delta < \theta$ に対して、 $\bar{i}_\delta = (\xi_0^\delta, \dots, \xi_n^\delta, A^\delta) \in I$ と $\alpha_\delta < \bar{\kappa}$

を、 y_δ が $P_{\alpha_\delta}(\bar{i}_\delta)$ -name となるようにとっておく。このとき、

$$(1) \text{ により、 } (\xi_0, \dots, \xi_n) \in k_0 \times \dots \times k_n, \alpha < \bar{\kappa} \text{ で}$$

$$D = \{ \delta < \theta; \xi_0^\delta \leq \xi_0 \ \& \ \dots \ \& \ \xi_n^\delta \leq \xi_n \ \& \ y_\delta: P_\alpha(\bar{i}_\delta)\text{-name} \}$$

が cofinal in θ となるものがとれる。

Case 1. $\theta < \kappa$ のとき。

$$A = \bigcup_{\delta \in D} A^\delta \text{ とおく。 } |A| \leq \sum_{\delta \in D} |A^\delta| < \kappa \text{ となる。 } \therefore$$

$$\text{で、 } \bar{i} = (\xi_0, \dots, \xi_n, A) \text{ とおくと、}$$

$$i \in I \ \& \ \forall \delta \in D (y_\delta: P_\alpha(i)\text{-name})$$

となる。そこで、 $P_\alpha(i)$ -name X を、

$$\Vdash_{P_\alpha(i)} "X = \{y_\delta; \delta \in D\}"$$

で定めれば、 $\Vdash_{P_\alpha(i)} "X \in \Gamma_\alpha(i)"$ となるから、 $P_{\alpha+1}(i)$ -name C で、

$$\Vdash_{P_{\alpha+1}(i)} "C \subset \omega \ \& \ C \neq \emptyset \ \& \ \forall x \in X (C \leq^* x)"$$

となるものが存在する。 D は θ で cofinal だから、

$$\Vdash_P "C \subset \omega \ \& \ C \neq \emptyset \ \& \ \forall \delta < \theta^\vee (C \leq^* y_\delta)"$$

となる。これは、(2) と矛盾する。

Case 2. $k < \theta$ のとき。

各 bijection $\varphi: \lambda \rightarrow \lambda$ に対して、 φ を canonical に拡張した
 $\{f: \exists x \subset \lambda (|x| < \omega \ \& \ f: x \rightarrow 2)\}$ 上の permutation $\hat{\varphi}$ が得ら
 れるが、それを更に、 P 上の permutation にまで拡張できる。
 この事実と、 Δ -system lemma によりこの場合は矛盾となる。