

三重対角行列の準位統計と直交多項式の漸近公式

東大・理 永尾 太郎

厳密な対称性をもたないハミルトニアン行列のエネルギー準位統計のモデルとして三重対角エルミート行列の固有値問題

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & & & \\ b_0^* & a_1 & b_1 & & \\ & b_1^* & a_2 & b_2 & \\ & & b_2^* & \ddots & \\ & & & \ddots & b_{N-2} \\ & & & & b_{N-2}^* & a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{N-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{N-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

を考える。有限次の表現をもつハミルトニアンの準位統計は常に上の形の固有値問題の解に帰着され、固有値 λ の分布を調べることになる。従っていかなる準位統計の性質もその特別な場合として導かれるはずである。ハミルトニアンが対称性をもたないので固有値に縮退がない。そのために以下の性質を仮定する。

$$b_j \neq 0 \quad j = 0, \dots, N-2. \quad (2)$$

このとき固有値に縮退がないことが証明される。またこのときには固有値が対応する直交多項式の零点になることがわかる（ハミルトニアン行列の特性多項式が直交多項式になる）。

ここでは最も簡単な例として古典直交多項式に関連した三重対角化行列

(1) Jacobi model

$$A_n = -\frac{(a+b-1)(a-b)}{(a+b+n-1)(a+b+n)},$$

$$B_n = \frac{4n(2a+n-1)(2b+n-1)(2a+2b+n-2)}{(2a+2b+2n-3)(2a+2b+2n-2)^2(2a+2b+2n-1)},$$

(2) Laguerre model

$$A_n = a + n,$$

$$B_n = \frac{n(2a + n - 1)}{4},$$

(3) Hermite model

$$A_n = 0,$$

$$B_n = \frac{n}{2}$$

を考える。ただし

$$b_0 = \sqrt{B_1}e^{i\theta_0}, b_1 = \sqrt{B_2}e^{i\theta_1}, \dots, b_{N-2} = \sqrt{B_{N-1}}e^{i\theta_{N-2}},$$

$$a_0 = A_0, a_1 = A_1, \dots, a_{N-1} = A_{N-1}$$

である。 θ_j は任意の実数にとれる。

この場合には、顕著な性質として固有値の最近接間隔分布がデルタ関数で表されることが対応する直交多項式の漸近形¹⁾から証明される²⁾。すなわち最近接間隔は固有値列全体を通して一定であり、固有値分布のゆらぎがない。このようなゆらぎの喪失は一次元の調和振動子や井戸型ポテンシャルのような理想化された量子系のモデルで見られるものであるが、自然界ではほとんどの場合観測されない。よく知られた直交多項式はハミルトニアン行列の特性多項式としては例外的であることがわかる。自然界に存在する固有値分布のゆらぎを生じるのはどのような性質の直交多項式であるかが将来の興味深い問題である。

参考文献

- 1) G. Szegő, *Orthogonal Polynomials* (American Mathematical Society, 1959).
- 2) T. Nagao and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jpn. **62** (1993) No. 1.