

tight 4-design について

阪大大学院 加納幹雄

R. M. Wilson と D. K. Ray-Chaudhuri によつて Fisher の不等式の拡張である次の定理が証明された

定理 Δ を $2S-(v, k, \lambda)$ design とし

$$v \geq k+5 \quad \Rightarrow \quad b = \text{block の 数} \geq \binom{v}{5}$$

上式で等号の成り立つ design を tight 2S-design と
いう。以下 tight 4-design について

現在知られている tight 4-design は自明な $v-2-$
 $(v, v-2, 1)$ design と M_{23} を自己同型群としてもつ
 $4-(23, 7, 1)$ design (Δ の complementary) だけで
ある。それより自明でない tight 4-design は $4-(23, 7, 1)$
に限る？ のでは否かと思われる。

まず tight 4-design に関して上の両者による次の結果
が基本的である

定理 Δ を $4-(v, k, \lambda)$ tight 4-design とすると

異なる 2 つの block の intersection number は 2 つ

あ、こゝでは

$$X^2 - \left\{ \frac{2(k-1)(k-2)}{(v-3)} + 1 \right\} X + \lambda \left(2 + \frac{4}{k-3} \right) = 0$$

の2根である。

$$\text{Cor} \quad k-3 \mid 4\lambda \quad (\text{及} \lambda=1 \rightarrow 4-(23,7,1))$$

この定理により容易に、 $\lambda=1$ なる tight 4-design は $4-(23,7,1)$

に限る。と、及 $2 \leq \lambda \leq 10$ では自明で、tight 4-design

は存在しないことが確かめられる。

今 μ_2, μ_1 ($\mu_2 > \mu_1$) を異なる2つの block の intersection number とすると次の結果が得られた。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tight 4-design において} \\ 1. \mu_2 - \mu_1 = 1 \quad \text{なる} \quad \text{自明なもの} \\ 2. \mu_2 - \mu_1 = 2 \quad \text{なる} \quad 4-(23,7,1) \text{ design} \\ 3. \mu_2 - \mu_1 = 3 \quad \text{なる} \quad \text{存在しない} \\ 4. \frac{k - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \text{ は整数} \end{array} \right.$$

4. は野田氏に教えてもらった、有力ではなかったと思われる結果

次に1~4. の簡単な証明を述べる

1. $\mu_2 - \mu_1 = 1$ のときは

$$\mu_2 + \mu_1 = \frac{2(k-1)(k-2)}{(v-3)} + 1$$

$$\mu_2 - \mu_1 = \frac{k(k-1)^2(k-2)}{(v-2)(v-3)}$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2} \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{(v-2)(v-3)} \quad \text{より}$$

上の2式と合わせて

$$\{v - (k+1)\} \{v - (k+2)\} = 0 \quad \text{が得られるので } 0 < k$$

2. 3 $\mu_2 - \mu_1 = a$ とおく. 又 $k < \frac{v}{2}$ としてよいので

$$\frac{k(k-1)}{(v-2)} - \frac{(k-1)(k-2)}{(v-3)} < \frac{3}{4}$$

= ねと上の3つの式より

$$T = \frac{(k-1)(k-2)}{v-3} < a^2 - 1$$

又 $\lambda < \frac{T^2}{2}$ = ねから後は Cor を用い, ねは"より"が
逆向きの不等式も用い, な..と計算が大変である.

4. N を $v \times b$ 行列. A_1, A_2 を $b \times b$ 行列 とし

次のように定める. v 点 $a_1, \dots, a_v$, b 塊 $B_1, \dots, B_b$

$$\text{で表わす.} \quad (N)_{ij} = \begin{cases} 1 & a_i \in B_j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$(A_i)_{k,l} = \begin{cases} 1 & |B_k \cap B_l| = \mu_i \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

と おくと

$${}^t N \cdot N = kI + \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2$$

$$J = I + A_1 + A_2$$

$$A_1 A_2 = A_2 A_1, \quad \text{これはカス 恒等}$$

これより A_1, A_2 の固有値を計算し、これが代数的整数であることに注意すればよい。

tight 4-design の決定には程遠いですが、これは興味ある問題だと思います。

参 R. M. Wilson and D. K. Ray-Chaudhuri
 ON t -designs (Generalization of Fisher's inequality)
 to t -design

Amer Math Soc Notices 18 (1971) 805