

乱流における散逸構造

名大 工学部 桑原 真二

§ 1. まえおき

散逸とは一般に大きい運動の形式から小さい運動の形式へ、最終的には熱運動へエネルギーの移行する現象である。散逸関数(単位体積あたりの散逸)は $\frac{1}{2}(\text{応力} \times \text{変形速度})$ であり、したがって粘性率に比例する。そこで乱流においては渦粘性に比例すると考えられる。

乱流すり流(turbulent shear flow)の中で、みぞの間の Poiseuille 乱流(plane Poiseuille turbulence) = P.P.T.) は種々の乱流機構と包含する、しかも最も単純な流れである。P.P.T. では両壁附近の境界層でつくられた大きい渦が中央部の core flow に放出される。境界層においては強い速度勾配のため、大きい散逸をもたう。core flow においては、放出された渦はもっと小さい渦に遷移し、最後は粘性により消滅する。後者の core flow における散逸過程は乱流特有のものであり、層流にくらべて乱流で散逸が顕著になる原因である。

境界層では壁に接した粘性層から順次に緩和層(buffer layer), 対数層があり、その外に core flow が存在する。

対数層では渦粘性率が壁からの距離に比例し、途中遷移の領域をすぎると、core flow では渦粘性率一定とみなされる。

core flow ではゆるい平均流の変化はあるが、乱れは一樣、等方的とみなしうる。

粘性には速度の不均一性を平等化する作用があり、たとえば不均一な平行な速度場では、不均一性の方向に垂直で、速度に平行な平面を通しての運動量のやりとりにより、平等化の機構が説明できる。分子粘性では分子毎々の運動量が、乱流ではもっと大きい規模の“小さい渦”の運動量がその役割をはたす。そこで小さい渦のふるまいが渦粘性の特性を決定すると考えることができる。

§2. 渦粘性の乱流スケール理論

前節にのべたように、core flow では渦粘性率はほぼ一定であり、それは小さい渦のふるまいでその特性が決定されると考えられる。core flow は空間的にも、時間的にもゆくり変動する平均流（乱れマクロ、T-macro）と乱れ（乱流ミクロ、T-micro）が共存し、お互に相互作用をおこなっている。乱れは一樣、等方的とみなしてよく、したがって乱れの場を Fourier 変換によって表わすことができる。乱れのエネルギーは不均一な平均流からも供給されるが、境界

層からの渦の放出による伝給が主であると考えるので、境界層の厚さ δ に対応する波数 $k_0 (\simeq \delta^{-1})$ の附近にエネルギー・スペクトルの極大値があると考えられる。波数空間に T -macro の対応 k_M をおめれば $k_M \ll k_0$ である。 k_M と k_0 の間に k_1 ($k_M \ll k_1 < k_0$) をとり、これを T -micro と T -macro の境界と考える。これから $k > k_1$ を小さい渦 $k < k_1$ を大きい渦とよびこえる。

Fourier変換された Navier-Stokes (N.-S.) 方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) u_\alpha(k, t) = -i \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\beta \int u_\beta(k', t) u_\gamma(k - k', t) d^3k' \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(k) &= \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2 \\ u_\alpha(k, t) &= \int v_\alpha(x, t) e^{-ik \cdot x} d^3x \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

である。ここで $v_\alpha(x, t)$ は乱れの流速, $u_\alpha(k, t)$ はその Fourier 変換である。(2.1) の右辺を input, 左辺の $\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}$ を output と考えれば, 右辺の “2 点同時刻非線形相互作用” は

$$\left. \begin{array}{l} \text{input} \\ k', t \\ k - k', t \end{array} \right\} \longrightarrow k, t \quad \text{output} \quad (2.3)$$

の形をしている。

もし大きい渦 ($|k| \ll k_1$) のみで

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_T k^2\right) u_\alpha(k, t) = \text{非線形相互作用} \quad (2.4)$$

の形で表わされるならば, v_T は "渦動粘性率" と考えられ
とが出来る。(2.1) の右辺を非斉次項とみなして形式的に種
命する

$$u_\alpha(k, t) = -i \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\beta \int_{-\infty}^t u_\beta(k', t') \\ u_\gamma(k - k', t') e^{-\nu k'^2(t-t')} d^3k' dt' \quad (2.5)$$

とする。そこで (2.5) に於いて非線形相互作用は

$$\left. \begin{array}{l} k', t' \\ k - k', t' \end{array} \right\} \xrightarrow{t' = -\infty \sim t} k, t \quad (2.6)$$

の形とする。 (2.1) の $u_\gamma(k - k', t)$ の所に (2.5) の表式を入
れれば

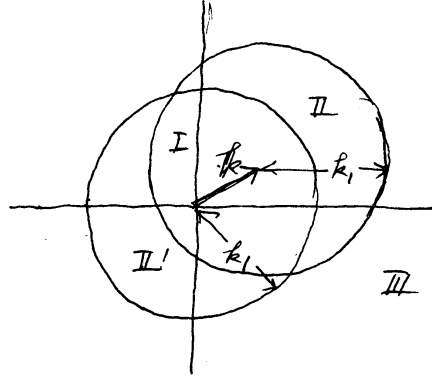
$$\left. \begin{array}{l} k'', t' \\ k - k' - k'', t' \end{array} \right\} \xrightarrow{-\infty \sim t} k - k', t \left\{ \begin{array}{l} k, t \\ k - k', t \end{array} \right\} \longrightarrow k, t$$

になる。

$$\begin{array}{ccc} \text{input} & & \text{output} \\ \begin{array}{l} k', t \\ k'', t' \\ k - k' - k'', t' \end{array} & \left\{ \begin{array}{l} -\infty \sim t \end{array} \right. & k, t \end{array} \quad (2.7)$$

の形になる。これを 3 重 2 時刻非線形相互作用とよぶこ
とにする。

(2.1) における k' の種分を定めてみる。原点と k と中心とある半径 k_1 の 2 球によって k -空間を I, II, II', III に分割する (Fig. 1)。 k' は I, II' にあるとき T-macro, II, III にあるとき, T-micro, $k-k'$ は I, II にあるとき



T-macro, II', III にあるとき Fig. 1. k -空間の分割

T-micro に属する $k-k'$ とになる。この分割によって

$$\left. \begin{aligned} k' \text{ in I} &\iff k-k' \text{ in I} \\ k' \text{ in II} &\iff k-k' \text{ in II'} \\ k' \text{ in II'} &\iff k-k' \text{ in II} \\ k' \text{ in III} &\iff k-k' \text{ in III} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

の関係がある。 $k', k-k'$ が II または II' にあるときは T-micro に属する方を, III にあるときはその一方 k と k' の (2.5) の表式を代入すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) u_\alpha(k, t) = & -i \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\beta \left[\int_I u_\beta(k', t) \right. \\ & u_\gamma(k-k', t) d^3 k' - i \int_{-\infty}^t \int_{II+III} \int \Delta_{\beta\lambda}(k') k'_\mu u_\lambda(k'', t') \\ & u_\mu(k'-k'', t') u_\gamma(k-k', t) e^{-\nu k'^2(t-t')} d^3 k'' d^3 k' dt' \\ & - i \int_{-\infty}^t \int_{II'} \int \Delta_{\alpha\lambda}(k-k') (k_\mu - k'_\mu) u_\beta(k', t) u_\lambda(k'', t') \\ & \left. u_\mu(k-k'-k'', t') e^{-\nu(k-k')^2(t-t')} d^3 k'' d^3 k' dt' \right] \quad (2.9) \end{aligned}$$

としよう。

以下の理論の展開のために次の基本的仮定を導入する：

- 1) T-macro と T-micro の分離は明確にして、対応する特性時間 t_{mac} , t_{mic} の間には

$$t_{mac} \gg t_{mic} \quad (2.10)$$

の関係がある。

- 2) T-macro は一様, T-micro は一様, 等方的である。

- 3) $t_{mac} \gg t_{mean} \gg t_{mic}$ (2.11)

を満足する時間 t_{mean} の間での平均として $\langle \rangle$ を定義する。

以上の仮定から導かれる 2, 3 の基本的結果をのべる。

それぞれ T-macro, T-micro に関連した量 Q, g の種の平均を

$$\langle Qg \rangle \cong Q(t) \langle g \rangle \quad (2.12)$$

のように近似する。さらに 2) の T-micro の一様, 等方性から k -空間の 2 点 2 時刻速度相関に対して

$$\langle u_\alpha(k, t) u_\beta(k', t') \rangle = \Delta_{\alpha\beta}(k) \Phi(k, t, t') \delta^3(k+k') \quad (2.13)$$

が成り立つ。また $Q(k, t), g(k', t)$ をふくむ積分は 1) の仮定から次のように近似する：

$$\int_{-\infty}^t Q(k, t') g(k', t') dt' \cong Q(k, t) \int_{-\infty}^t g(k', t') dt' \quad (2.14)$$

さて $|k| \ll k_1$ を考慮し, (2.12) の近似をもちいす

(2.9) は

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) u_\alpha(k, t) = & -i \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\gamma \int_{\text{I}} u_\beta(k', t) u_\gamma(k-k', t) \\
 & d^3k' - \int_{-\infty}^t \int_{\text{II}} \Delta_{\alpha\beta}(k) \Delta_{\beta\lambda}(k') k_\gamma k'_\mu \langle u_\lambda(k', t') u_\mu(k' \\
 & - k'', t') \rangle u_\gamma(k-k', t) e^{-\nu k'^2(t-t')} d^3k'' d^3k' dt' \\
 & - \int_{-\infty}^t \int_{\text{II}'} \Delta_{\alpha\beta}(k) \Delta_{\beta\lambda}(k-k') k_\gamma (k_\mu - k'_\mu) u_\beta(k', t) \\
 & \langle u_\lambda(k'', t') u_\mu(k-k'-k'', t') \rangle e^{-\nu(k-k')^2(t-t')} \\
 & d^3k'' d^3k' dt' - \int_{-\infty}^t \int_{\text{II}} \Delta_{\alpha\beta}(k) \Delta_{\beta\lambda}(k') k_\gamma k'_\mu \\
 & \langle u_\lambda(k'', t') u_\mu(k'-k'', t') u_\gamma(k-k', t) \rangle e^{-\nu k'^2(t-t')} \\
 & d^3k'' d^3k' dt' \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

と存す。

(2.15) の k'' の積分にあたって, 前と同様に k -空間の分割を行うが, この場合は k' の II と II' があるから II' に属する k'' によって Fig. 2 のような分割は存す。更に近似 (2.12) 及び 同様, 等式性 (2.13) をもちいすと (2.15) は

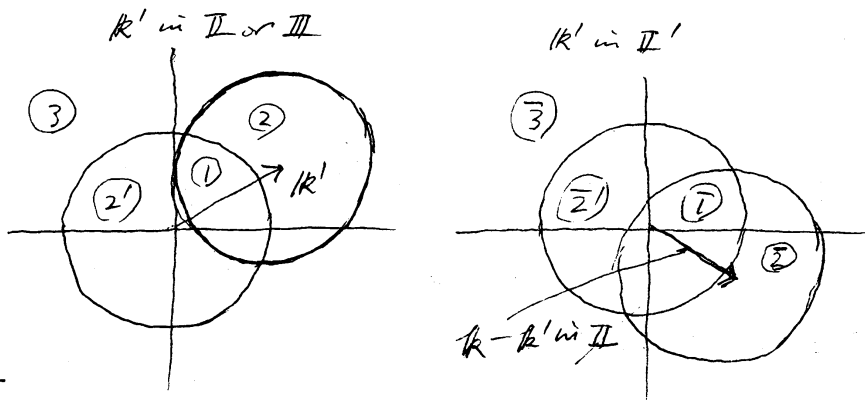


Fig. 2

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_T k^2\right) u_\alpha(k, t) = & -i \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\gamma \int_{\mathbb{I}} u_\beta(k', t) u_\gamma(k-k', t) d^3k' \\
& - \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\gamma \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{II}} \int_{\mathbb{I}} \Delta_{\beta\lambda}(k') k'_\mu u_\lambda(k'', t') \\
& u_\mu(k'-k'', t') u_\gamma(k-k', t) e^{-\nu k'^2(t-t')} d^3k'' d^3k' dt' \\
& - \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\gamma \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{II}'} \int_{\mathbb{I}'} \Delta_{\gamma\lambda}(k') k'_\mu u_\beta(k', t) u_\lambda(k'', t') \\
& u_\mu(k-k'-k'', t') e^{-\nu(k-k')^2(t-t')} d^3k'' d^3k' dt' \\
& - \Delta_{\alpha\beta}(k) k_\gamma \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{II}} \int_{\mathbb{I}} \Delta_{\beta\lambda}(k') k'_\mu \langle u_\lambda(k'', t') \\
& u_\mu(k'-k'', t') u_\gamma(k-k', t) \rangle e^{-\nu k'^2(t-t')} d^3k'' d^3k' dt'
\end{aligned}
\tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
\nu_T = \nu \left(1 + \frac{8\pi}{15} \int_{-\infty}^t \int_{k_1}^{\infty} k'^4 \Phi(k', t, t') (t-t') e^{-\nu k'^2(t-t')} dk' dt' \right. \\
\left. + \frac{8\pi}{15} \int_{-\infty}^t \int_{k_1}^{\infty} k'^2 \Phi(k', t, t') e^{-\nu k'^2(t-t')} dk' dt' \right. \\
\left. - \frac{2\pi}{15} k_1^3 \int_{-\infty}^t \Phi(k_1, t, t') e^{-\nu k_1^2(t-t')} dt' + O(k/k_1) \right)
\end{aligned}
\tag{2.17}$$

とある。\$\nu_T\$ は渦動粘性率とよばれるべきもので、その主要項は第2項である。すなわち \$\nu \simeq 0\$ なら \$\Phi(k_1, t, t') \simeq 0\$ と考えれば

$$\nu_T = \frac{8\pi}{15} \int_{-\infty}^t \int_{k_1}^{\infty} k'^2 \Phi(k', t, t') dk' dt' \tag{2.18}$$

とある。

§3. 外力のある Burgers 方程式の解析

§2でのべたように、core flow の乱れは境界層からの渦の放出とその渦が小形化して最終に熱運動となる散逸過程

とみなすことが出来る。境界層の厚さの程度の渦が放出されると考えられるから、 k -空間において δ^+ 程度の波数領域にエネルギー・スペクトルの最大値があり、さらにエネルギー-1/2 がつて力のやま出しがあると考えることが出来る。偶然力のあつ Fourier 変換された $N-S$ 方程式を数値的に解くことにより $\bar{u}(k, t, t')$ をおめ ν_T を計算する事が可能であろう。しかし、偶然力の性質、Reynolds 数といくらに与えるかということ、境界層からの渦の放出機構、渦の放出と core flow における散逸との平衡機構等をしらなければ解決しない問題である。

そこでこのでは手始めとして、外力のあつ Burgers 方程式:

$$\frac{\partial u(k, t)}{\partial t} = -\frac{1}{R} k^2 u(k, t) - i k \int_{-\infty}^{\infty} u(k', t) u(k-k', t) dk' + f(k, t) \quad (3.1)$$

の初期値問題を考える。 $k = \Delta k \ell$ ($\ell = -L, \dots, L$) のメッシュを/で

$$\frac{du_\ell}{dt} = -\frac{1}{R} (\Delta k)^2 \ell^2 u_\ell - i (\Delta k)^2 \ell \sum_{\ell'=-L}^L u_{\ell'} u_{\ell-\ell'} + f_\ell(t) \quad (3.2)$$

を基礎方程式とする。ここでは $\Delta k = 0.2$ ととり、偶然力は $k = 0.6, 0.8, 1.0$ ($\ell = 3, 4, 5$) でのみ与えられる (ただし $f(-k) = f(k)^*$)

$$\left. \begin{aligned} \langle f_3^2 \rangle &= \langle f_4^2 \rangle = \langle f_5^2 \rangle = \frac{1}{3} \\ \langle f_3 f_4 \rangle &= \langle f_4 f_5 \rangle = \langle f_5 f_3 \rangle = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

その確率分布は正規分布である

$$P[f_l] = \frac{3}{\pi} e^{-f_l^* f_l} \quad l = 3, 4, 5 \quad (3.4)$$

ととり。又偶然力はその値を時間 0.6, 0.8, 1 だけ保持するとして、その分布は

$$P(\tau=0.6) = P(\tau=0.8) = P(\tau=1) = \frac{1}{3} \quad (3.5)$$

とあり。この計算でもういふ偶然力の時間についての変化は Fig. 4(a) に示してあり。

R (Reynolds 数) = 20, $\Delta k = 0.2$, Δt (時間区隔) = 0.02, L (この Fourier 成分の数) = 20 のばあ
の Fourier 成分の消長が、実数値を横軸、虚数値を縦軸と
する相図として Fig. 3 に、実数値、虚数値そのものの時間
的發展を Fig. 4.(b) に示した。

エネルギー分布 $DE_l(t)$, 散逸分布 $DD_l(t)$, エネルギー
伝達分布 $DET_l(t)$ を次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} ED_l(t) &= \frac{1}{2} (u_l(t) u_l(t)^* + u_{-l}(t) u_{-l}(t)^*) \\ &= u_l(t) u_l(t)^* \\ DD_l(t) &= \frac{2}{R} (\Delta k)^2 l^2 ED_l(t) \\ DET_l(t) &= 2 (\Delta k)^2 l \sum_{l'=-L}^L \{ u_l^* u_{l'} u_{l-l'} - u_l u_{l'}^* u_{l-l'}^* \} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

また, (時間) 平均エネルギー分布 $ME_e(t)$, 平均散逸分布 $MD_e(t)$, 平均エネルギー伝達分布 $MET_e(t)$ を

$$\left. \begin{aligned} ME_e(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t ED_e(t') dt' \\ MD_e(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t DD_e(t') dt' \\ MET_e(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t DET_e(t') dt' \end{aligned} \right\} (3.7)$$

とする。Fig. 5 に $t=10$, $t=50$, $t=100$ におけるこれらの分布が示してある。

エネルギー供給率及び平均エネルギー供給率を

$$\left. \begin{aligned} RES(t) &= f_3(t)u_3(t)^* + f_4(t)u_4(t)^* + f_5(t)u_5(t)^* \\ &\quad + c.c. \\ MRES(t) &= \frac{1}{t} \int_0^t RES(t') dt' \end{aligned} \right\} (3.8)$$

と定義する。Fig. 4(c) に $RES(t)$, $MRES(t)$ が示してある。これからすると $MRES(t)$ は $t=2$ 位で殆ど一定値になりようと思われる。

§4. おまけ

§2 において、乱流すり流の core flow における渦粘性率を波数空間における速度 (速度の Fourier 成分) の 2 点 2 時刻の相関によって表わすことを示した。この理論においては、大きい渦 (T-macro) のための小さい渦 (T-micro) の効果を粘性効果と同様な形で取り扱うことがで

また。 v_T の主要項 (2.18) は (2.15) の右辺の最後の項 (積分変数 k' は $T\text{-micro}$ に属する) で k'' と $k'-k''$ の一方が $T\text{-micro}$, 一方が $T\text{-macro}$ に属する時に生じ, その場合は, k'' , $k'-k''$, $k-k'$ の3重相関は ($k-k'$ は必ず $T\text{-micro}$ に属するから) k'' と $k-k'$ 両方は $k'-k''$ と $k-k'$ の2重相関と $T\text{-macro}$ の速度との積に移行する。2重相関は (2.13) によって選択的效果をもっており、結局いずれの1が k'' にも

$$\left. \begin{array}{l} k', t \\ k, t' \\ -k', t' \end{array} \right\} \begin{array}{l} -\infty \sim t \\ \text{~~~~~} \end{array} \rightarrow k, t \quad (4.1)$$

のようなる長2時刻非線形作用の形となる。(4.1)の左辺で k は $T\text{-macro}$ に属し, (2.10)の仮定をもちいて $t' = t$ と考えれば時間積分の外に出て $u(k, t)$ の形をとり、結局 (2.4) の形が与えられる。すなわち非線形項の中から渦粘性項を取り出すことが出来ることになる。

この理論では, $\bar{u}(k, t, t')$ がわかれば渦粘性が決められる。そこで, $\bar{u}(k, t, t')$ を理論的に求める問題がのこる。そのためには、境界からの渦の放出の機構をしらべ、それを波数空間における偶然力の効果として近似して、偶然力のある Fourier 変換された $N-S$ 方程式の解析を必要とする。

この論文ではその手はいわゆる強制力のある Burgers 方程式の初期値問題を解析し、各 Fourier 成分のみならず、エネルギー分布、散逸分布、エネルギー伝達分布等と扱われる。

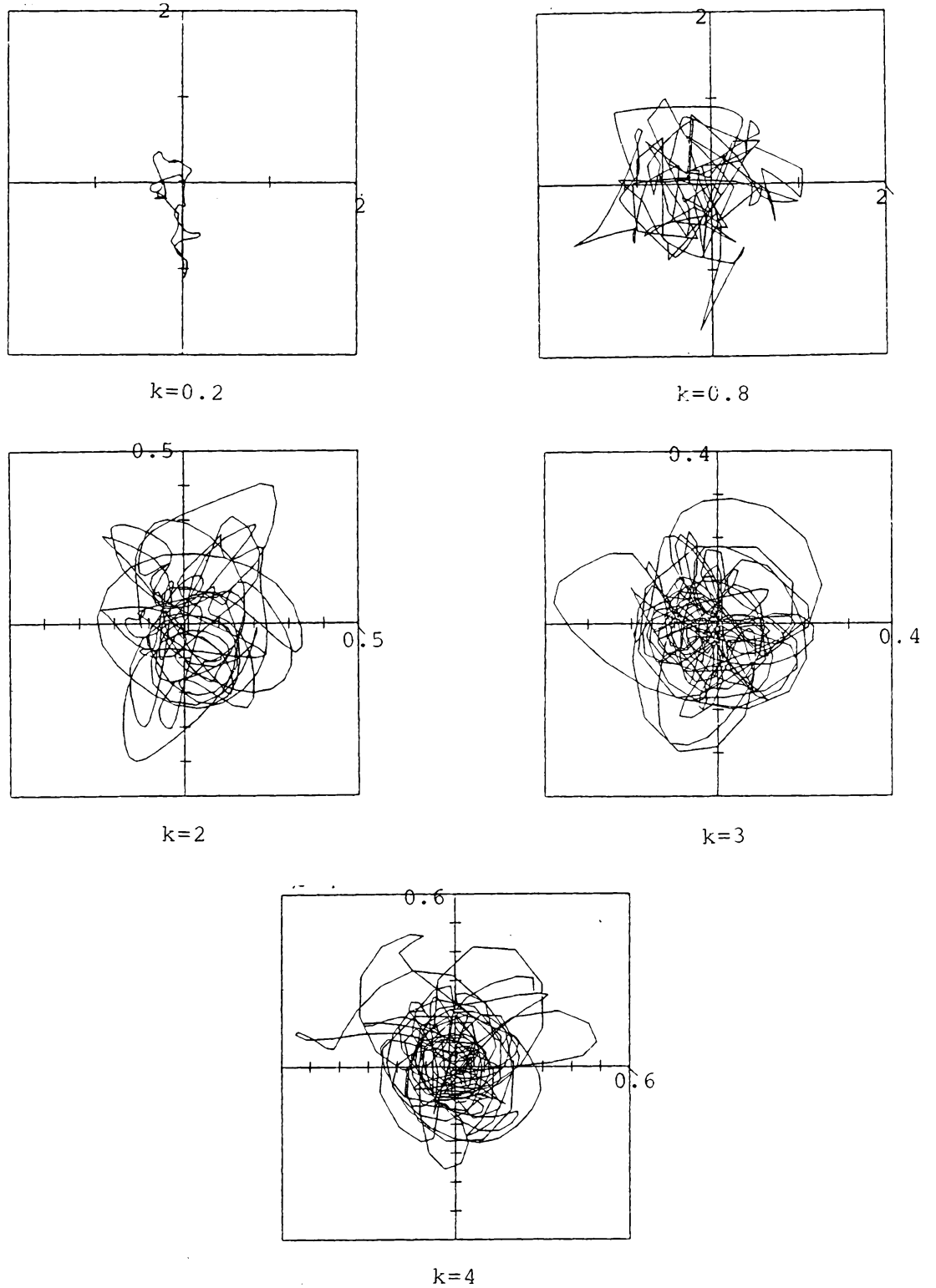
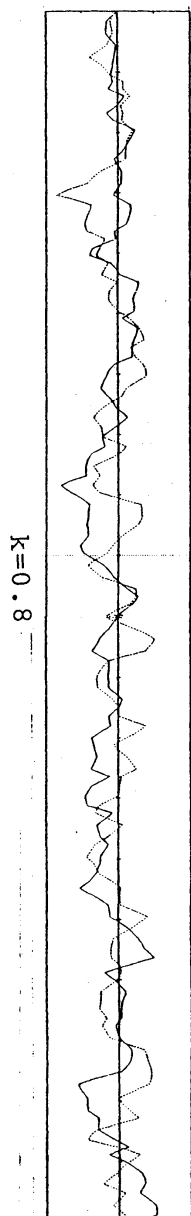
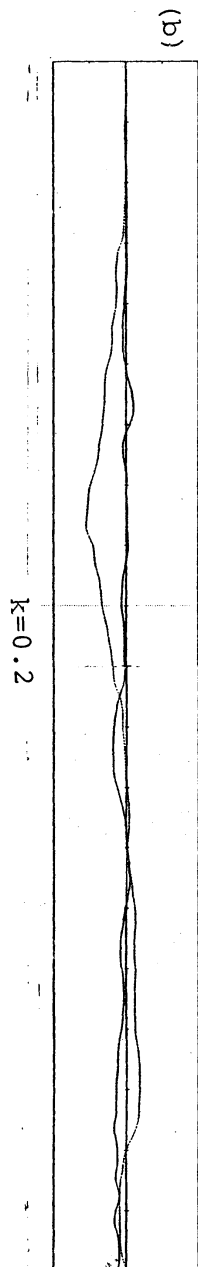
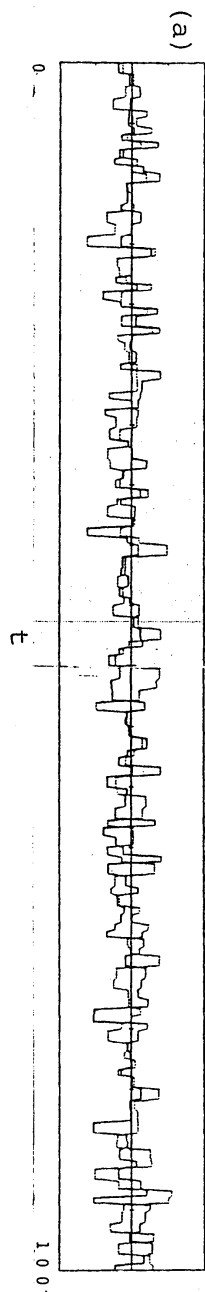


Fig.3. Time evolutions of the Fourier components of the velocity in the phase diagram (Reu(k), Imu(k)), for $R(:\text{Reynolds no.})=20$, $\Delta k(:\text{wave no. mesh length})=0.2$, $\Delta t(:\text{time increment})=0.02$ and $L(:\text{no. of retained Fourier components})=20$.



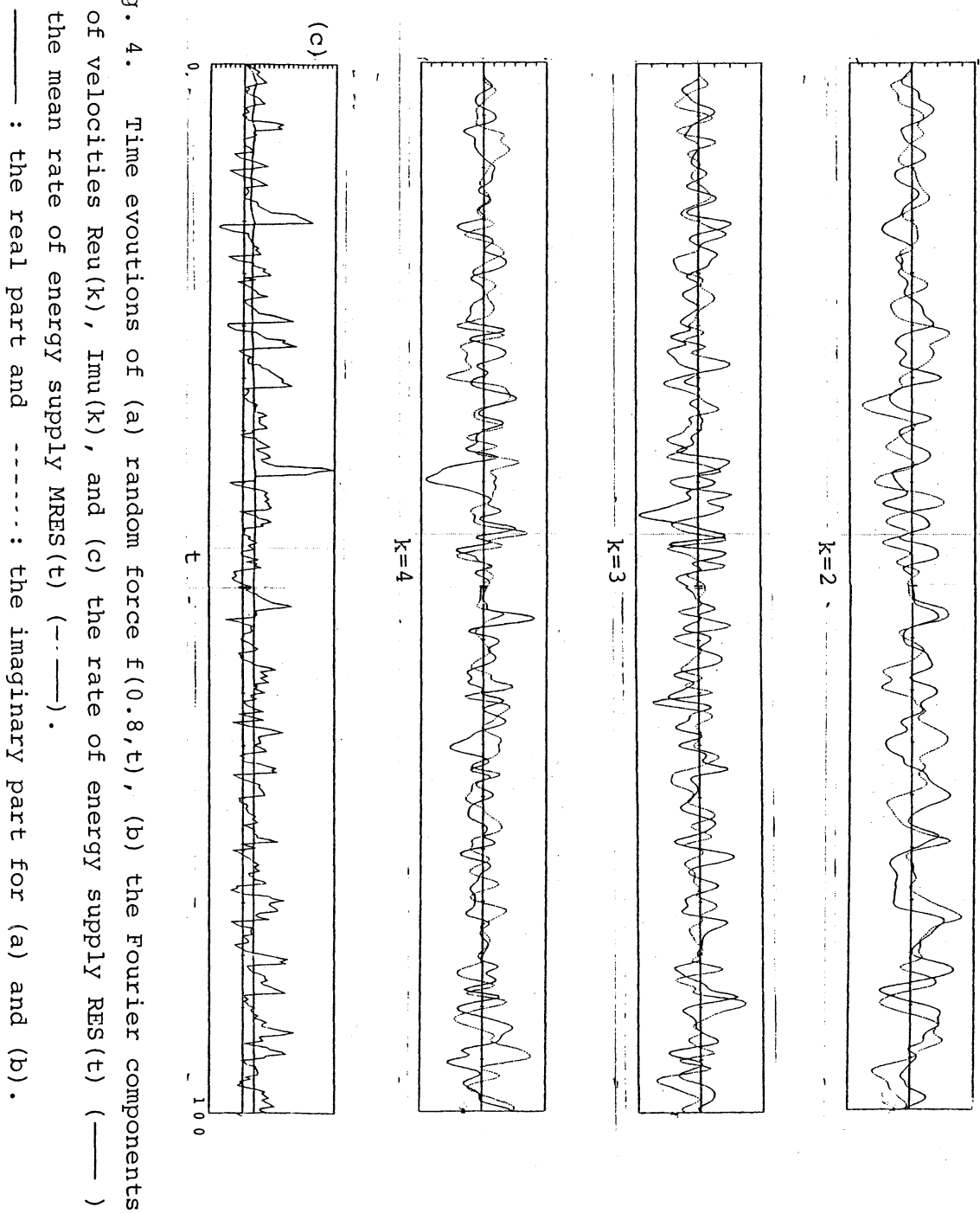


Fig. 4. Time evolutions of (a) random force $f(0.8, t)$, (b) the Fourier components of velocities $Reu(k)$, $Imu(k)$, and (c) the rate of energy supply $RES(t)$ (—) the mean rate of energy supply $MRES(t)$ (---).

—: the real part and ----: the imaginary part for (a) and (b).

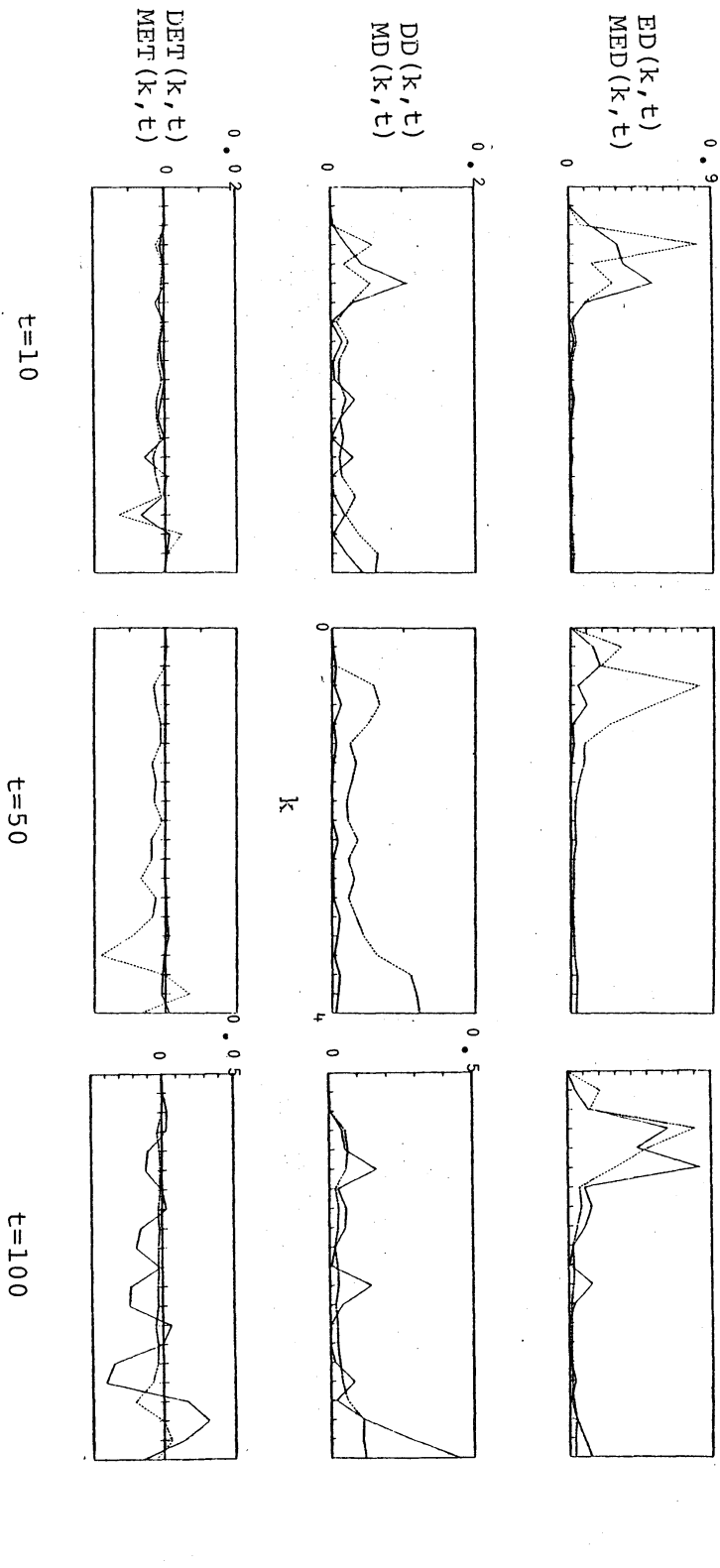


Fig. 5. Distributions of energy $ED(k, t)$, dissipation $DD(k, t)$, energy transfer $DET(k, t)$ and time mean distributions of energy $MED(k, t)$, dissipation $MD(k, t)$, energy transfer $MET(k, t)$: distributions and — : time mean distributions.