

Subrecursion theory における dilation について

熊本大・工 角田法也 (Noriya Kadota)

§0. 紹介

本論文の目的は、Girard の Π_2^1 -logic で導入された dilation を有効に用いた次の2点の応用を考察することである。但し、ここで "dilation" は Π_2^1 -logic でのいくつかの概念 (denotation systems, dilators, homogeneous trees) の総称として使う。

- (1) Slow-growing function G_α と Fast-growing function F_α の増加率が等しい ordinal α (subrecursive inaccessible と呼ばれる) の構成。(Wainer [21], Kadota [11])
- (2) Novikov-Kondô-Addison Π_1^1 -uniformization theorem の証明。(Ressayre [17])

Π_2^1 -logic での dilation はもともと証明論における ID-theories の解析のために導入された (Girard [4][5]) が、同時に Recursion theory (Ressayre [17], Girard-Normann [6][7], Girard-Ressayre [8], van de Wiele [18], Subrecursive hierarchies (Dennis-Jones-Wainer [3], Jervell [10], Wainer [21] [22], Kadota [11]) 等へ応用も見出されている。さらに boundedness theorem (Buchholz [2], Kechris [12], Kechris-Woodin [13], Ressayre [16])、証明論的

ordinal との関連 (Abramski [1], Päppinghaus [14][15], Vanzeille [19][20]) が研究されている。これらは Π_2^1 -logic の性質上、技術的な面も含め、証明論と密接に関連している。

本論文の構成は次のとおり。 §1 では dilation の概念を考察: denotation system と dilator は同等なもので、homogeneous tree からある denotation system を作れることを見る。 §2 では (1) に関し、countable ordinal を有限部分の direct limit で表わすことを考察した上で、subrecursive inaccessible の作り方を述べる。 §3 では、(2) に関し、homogeneous trees を用いた Π_1^1 -unif. th. の証明を述べる。

§ 1. Denotation systems, dilators, homogeneous trees.

本節では、Girard-Normann [6] に従って、denotation systems の例から始めて、dilators を定義し、それらの同等性を見る。そして homogeneous trees を導入する。

Denotation systems は ordinal の Cantor normal form の一般化である。以下、2つの例を上げてから定義する:

O_n を ordinals 全体の族とする。

例 1.1 $F(x) = x^2$, $x \in O_n$ とする。 $x \in O_n$ に対し、任意 $y < F(x)$ は、

$$y = x \cdot u_1 + u_2 \quad \text{但し、} u_1, u_2 < x$$

と一意的に表わせる。この表現は係数 u_1, u_2 の順序に従って次の3種に別けられる。

$$(i) y = x \cdot x_0 + x_1 \quad (x_0 < x_1 < x)$$

$$(ii) y = x \cdot x_1 + x_0 \quad (x_0 < x_1 < x)$$

$$(iii) y = x \cdot x_0 + x_0 \quad (x_0 < x)$$

この状況を denotation system で、それぞれ以下の様に表わす：

$$(1; x_0, x_1; x) = x \cdot x_0 + x_1$$

$$(2; x_0, x_1; x) = x \cdot x_1 + x_0$$

$$(0; x_0; x) = x \cdot x_0 + x_0$$

ここで、左端の 1, 2, 0 は codes であって、この例では標準的 prototype $(x_0=0, x_1=1, x=2)$ をとっている： (i) $x \cdot x_0 + x_1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$;

$$(ii) x \cdot x_1 + x_0 = 2 \cdot 1 + 0 = 2; \quad (iii) x \cdot x_0 + x_0 = 2 \cdot 0 + 0 = 0$$

例 1.2 $F(x) = (1+x)^x$, $x \in \mathbb{O}_n$ とする。 $x \in \mathbb{O}_n$ $y < F(x)$ に対し、

$u_1 > \dots > u_{k-1}; v_1, \dots, v_{k-1} < x$ が一意的に存在して、

$$y = (1+x)^{u_1} (1+v_1) + \dots + (1+x)^{u_{k-1}} (1+v_{k-1})$$

と表現される。この表現は例 1 同様、denotation system で次の様に表わされる。

$\{u_1, \dots, u_{k-1}, v_1, \dots, v_{k-1}\} = \{x_0 < \dots < x_{n-1}\}$ のとき、

$$y = (C; x_0, \dots, x_{n-1}; x)$$

ここで、 C は標準的 prototype、例えば、 $x=\omega$; $y = \omega^{17} \cdot (1+17) + \omega^1 \cdot (1+16) + \omega^0 \cdot (1+12)$

のとき、 $y = (C; 0, 1, 12, 16, 17; \omega)$,

$$C = (1+5)^4 \cdot (1+4) + (1+5)^1 \cdot (1+3) + (1+5)^0 \cdot (1+2) = 6507.$$

定義 1.3 $F: O_n \rightarrow O_n$ とする。 F に対する denotation system $\mathcal{D}$ は、 $\{(C; x_0, \dots, x_{n-1}; x) \mid C \in O_n, x_0 < \dots < x_{n-1} < x \in O_n\}$ のある部分集合 $\mathcal{D}$ (denotations の集合) から O_n への関数で次を満たすもの。

(i) 各 x に対し、 $y < F(x)$ は unique denotation をもつ。

$$y = D((C; x_0, \dots, x_{n-1}; x)).$$

(ii) $(C; x_0, \dots, x_{n-1}; x) \in \mathcal{D}, y_0 < \dots < y_{n-1} < y \Rightarrow (C; y_0, \dots, y_{n-1}; y) \in \mathcal{D}$.

(iii) $D((C_1; x_0, \dots, x_{n-1}; x)) < D((C_2; x'_0, \dots, x'_{m-1}; x)),$

$$y_0 < \dots < y_{n-1} < y, y'_0 < \dots < y'_{m-1} < y; x_i \leq x'_j \Leftrightarrow y_i \leq y'_j, x_i \geq x'_j \Leftrightarrow y_i \geq y'_j$$

$$\text{for } i < n, j < m \Rightarrow D((C; y_0, \dots, y_{n-1}; y)) \leq D((C_2; y'_0, \dots, y'_{m-1}; y)).$$

命題 1.4 任意の denotation system は自然数への制限により一意的に定まる。

(証明) $D \in F: O_n \rightarrow O_n$ に対する denotation sys. とし、 $x \in O_n$ とする。

$$Dx = \{(C; x_0, \dots, x_{n-1}; x) : x_0 < \dots < x_{n-1} < x, (C, 0, \dots, n-1; n) \in \mathcal{D}\}$$

とおく。 Dx に次の order を入れる。 $y_1 = (C_1; x_0, \dots, x_{n-1}; x), y_2 = (C_2; x'_0, \dots, x'_{m-1}; x)$

$\in Dx$ に対し、 $\{z_0 < \dots < z_{k-1}\} = \{x_0, \dots, x_{n-1}\} \cup \{x'_0, \dots, x'_{m-1}\}$ のとき

$$x_i = z_{\sigma(i)} (i < n), x'_j = z_{\tau(j)} (j < m) \text{ で } \sigma, \tau \in \text{定めて、}$$

$$\begin{aligned} y_1 \leq_{Dx} y_2 &\Leftrightarrow D((C_1; \sigma(0), \dots, \sigma(n-1); x)) \\ &\leq D((C_2; \tau(0), \dots, \tau(m-1); x)) \end{aligned}$$

とおく。 定義 1.3(iii) は order $\leq_{Dx}$ は Dx の order と一致していることを表わしている。 $\leq_{Dx}$ は x と $D \upharpoonright \omega$ により定まるので証明。 $\square$

注意 1.5 $\forall n < \omega$ に対し、 $F(n) < \omega$ となっている system $\in$ weekly finite という。このとき、 $F \upharpoonright \omega$ が recursive, prim. rec., ... である時、system をそれぞれ recursive, prim. rec., ... という。

次に、dilators を定義し、その性質を見る。

定義 1.6 $(x_i, f_{ij})_{i < j < \omega}$ が direct system とは次のときという：

(i) $x_i \in O_n$; (ii) $f_{ij} : x_i \rightarrow x_j$ (strictly increasing)

(iii) $(i < j < k \text{ に対し}) f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$

$(x, f_i)_{i < \omega}$ が direct system $(x_i, f_{ij})_{i < j < \omega}$ の direct limit :

$$(x, f_i)_{i < \omega} = \varinjlim (x_i, f_{ij})$$

とは次をみたすときという：

(i) $x \in O_n$; (ii) $f_i : x_i \rightarrow x$ s.t. $f_i = f_j \circ f_{ij}$;

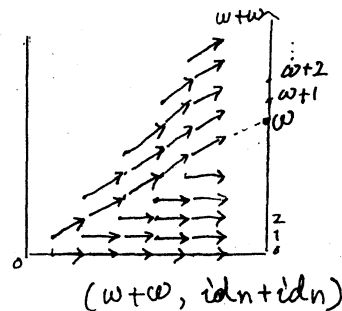
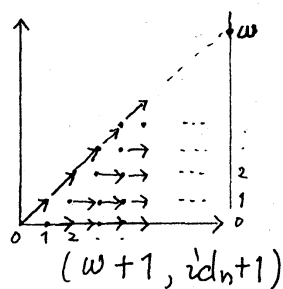
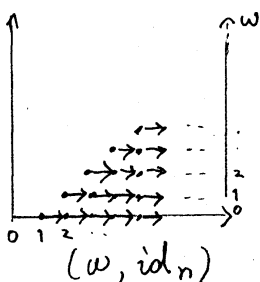
(iii) $(y, g_i)_{i < \omega} \in$ (i)(ii) をみたすものとするとき、 $\exists! h : x \rightarrow y$ str. inc.

$$g_i = h \circ f_i \quad (\forall i < \omega)$$

例 1.7 $(\omega, id_n)_{n < \omega} = \varinjlim (n, id_{nm})$ 但し、 $id_n(x) = x$, $id_{nm}(x) = x$

$(\omega+1, id_{n+1})_{n < \omega} = \varinjlim (n+1, id_{nm+1})$ 但し、 $id_{n+1}(x) = \begin{cases} x & (x < n) \\ \omega & (x = n) \end{cases}$ $id_{nm+1}(x) = \begin{cases} x & (x < n) \\ m & (x = n) \end{cases}$

$(\omega+\omega, id_{n+id_n})_{n < \omega} = \varinjlim (n+n, id_{nm+id_{nm}})$ 但し、 $id_{n+id_n}(x) = \begin{cases} x & (x < n) \\ \omega+x & (n \leq x) \end{cases}$ $id_{nm+id_{nm}}(x) = \begin{cases} x & (x < n) \\ m-n+x & (n \leq x) \end{cases}$



注意 1.8 On に関しては、任意の direct system は direct limit をもつ (Girard [4, Th. 1.4.1]). 逆に countable $\alpha \in On$ は direct system の direct limit である (一意的ではない). このことは §2 で考察される。

ON を ordinals の category とする (objects は ordinals; morphisms は strictly increasing functions). $\alpha, \beta \in On$ に対し、

$$I(\alpha, \beta) = \{f: \alpha \rightarrow \beta \text{ (strictly increasing)}\} \text{ とする.}$$

このとき、denotation systems に関する命題 1.4 の direct limit 版である次の命題が成り立つ。(証明は Girard [4, Cor. 2.1.8, Cor. 2.2.5].)

命題 1.9 $F, G: ON \rightarrow ON$ とするとき、次が成り立つ。

(i) F が direct limits と commute する

$\Leftrightarrow F$ が $\varinjlim (x_i, f_{ij})$, $x_i < \omega$ の形の direct limit と commute する

$\Leftrightarrow \forall x \in On, \forall z < F(x), \exists k < \omega, \exists f \in I(k, x) \text{ s.t. } z \in \text{rg}(F(f)).$

(ii) F, G が direct limits と commute するとき、(rg は range のこと.)

$$F = G \Leftrightarrow F \upharpoonright_{ON < \omega} = G \upharpoonright_{ON < \omega}.$$

(iii) F が direct limits と commute し、 $F \upharpoonright_{ON < \omega}$ が pull-backs と commute するとき、 F は pull-backs と commute する。

定義 1.10 Direct limits, pull-backs と commute する functor を dilator という。

この dilators は denotation systems と同等であることを見る。

① Denotation system D は dilator $F: ON \rightarrow ON$ を induce する:

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{z = D(c; x_0, \dots, x_{n-1}; x)\}, \quad f \in I(x, y) \text{ に対し、}$$

$$F(f)(D(c; x_0, \dots, x_{n-1}; x)) \stackrel{\text{def}}{=} D(c; f(x_0), \dots, f(x_{n-1}); y) \text{ とする。}$$

* Direct limits と commute すること: (命題 1.9(i) の形で示す。)

$z = D(c; x_0, \dots, x_{k-1}; x)$ としたとき、 $z_0 = D(c; 0, \dots, k-1; k)$ とおく。 $f \in I(k, x)$ を $f(0) = x_0, \dots, f(k-1) = x_{k-1}$ で定義したとき、明らかに $F(f)(z_0) = z$ 。

* pull-backs と commute すること:

今、 $D(c; y_0, \dots, y_{n-1}; y) \in \text{rg}(F(f)) \Leftrightarrow y_0, \dots, y_{n-1} \in \text{rg}(f)$ がなり立つ、
 なせなら、 $f \in I(x, y)$ に対して、 $F(f)(c; x_0, \dots, x_{n-1}; x) = D(c; f(x_0), \dots, f(x_{n-1}); y)$ であるから。このことより、 $D(c; y_0, \dots, y_{n-1}; y) \in \text{rg}(F(f)) \cap \text{rg}(F(g))$
 $\Leftrightarrow y_0, \dots, y_{n-1} \in \text{rg}(f) \cap \text{rg}(g) (= \text{rg}(f \& g)) \Leftrightarrow D(c; y_0, \dots, y_{n-1}; y) \in \text{rg}(F(f \& g))$ 。

② Dilator $F: ON \rightarrow ON$ は denotation system D を induce する:

命題 1.9(i) より、 $\forall x \in On, \forall z < F(x), \exists n < \omega, \exists f \in I(n, x), z \in \text{rg}(F(f))$ 。 $n \in \mathbb{N}$ 、これを満たす最小とすると、 f は unique に定まる。(なせなら $z \in \text{rg}(F(g)) \Rightarrow z \in \text{rg}(F(f)) \cap \text{rg}(F(g)) = \text{rg}(F(f \& g))$ (comm. pull-backs) であるので、 $f \neq g$ とすると $f \& g \in I(m, x)$, $m < n$ 、(n の min. に) 矛盾。)
 $z = D(z_0; f(0), \dots, f(n-1); x)$ 、但し、 z_0 は $F(f)(z_0) = z$ で定めると denotation system (i)(ii) [容易] (iii) [Girard[4, Prop 2.3.17]]

をみたま。

注意 1.11. Direct limits との commutation は denotation の存在に、pull-backs との commutation は denotation の一意性に対応している。

次に homogeneous trees を定義する。まず $On^{<\omega}$ を ordinals の有限列全体とし、 $S \subseteq On^{<\omega}$ が tree であるとは、 $(\sigma \in S, k < lh(\sigma) \Rightarrow \sigma \upharpoonright k \in S)$ のときとする。Tree S が order-invariant とは、

$$\begin{aligned} \forall \sigma, \tau \in On^{<\omega} (lh(\sigma) = lh(\tau) \wedge \forall i, j < lh(\sigma) (\sigma(i) \leq \sigma(j) \Leftrightarrow \tau(i) \leq \tau(j))) \\ \Rightarrow (\sigma \in S \Leftrightarrow \tau \in S)) \end{aligned}$$

のときをいう。Order-invariant tree S が well-founded のとき、homogeneous という。次の様に、これは Π_1^1 -complete な概念である。

定理 1.12 $A \in \Pi_1^1$ set とする。Order-invariant な trees S_n ($n < \omega$) が存在して、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} n \in A \Leftrightarrow \forall f \in On^\omega \exists t < \omega (\bar{f}(t) \notin S_n) \\ (\text{i.e., } \Leftrightarrow S_n \text{ は homogeneous (つまり, well-founded)}). \end{aligned}$$

但し、 $\bar{f}(t)$ は $\langle f(0), \dots, f(t-1) \rangle$ のこと。

(証明) A が Π_1^1 とすると、 Σ_1^1 set B が存在して、

$$n \in A \Leftrightarrow \forall g \in \omega^\omega \langle n, g \rangle \in B$$

Π_1^1 relation の well-order に關する representation により、rec. map $n, g \mapsto T_{n,g}$ (但し $T_{n,g}$ は tree on ω) があって

$\langle n, g \rangle \in B \Leftrightarrow T_{n,g}$ は well-founded でない

$\Leftrightarrow \neg \exists f \in O_n^\omega (i \mapsto f(i) : \text{order preserving};$

但し、 i の order は $T_{n,g}$, $f(i)$ は O_n に属して).

S_n を定義する: $(x_i)_{i < \omega} \in S_n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in \omega^\omega (i \mapsto x_i \text{ は order preserving};$

但し、 i の order は $T_{n,g}$, x_i は O_n に属して).

このとき、上式より、 $\forall g (\langle n, g \rangle \in B) \Leftrightarrow \neg \exists f \in O_n^\omega \forall x < \omega (\bar{f}(x) \in S_n)$

よって $n \in A \Leftrightarrow \forall f \in O_n^\omega \exists x < \omega (\bar{f}(x) \notin S_n)$. □

次に homogeneous tree は denotation system (すなわち dilator) を induce することを見る:

$S (\neq \emptyset)$ を homogeneous tree とする。 $x \in O_n$ に対し、

$S_x = \{\sigma \in S \mid \forall i < \text{lh}(\sigma) (\sigma(i) < x)\}$, $<_x$ を S_x 上の Kleene-

Brouwer ordering とする。 $\|\cdot\|_x$ を $<_x$ に属する ordinal norm

とし、 $\sigma \in S_x$ に対し、 $\{\sigma(i) \mid i < \text{lh}(\sigma)\} = \{x_0 < \dots < x_{n-1}\}$ のとき、

$$D_S((C; x_0, \dots, x_{n-1}; x)) = \|\sigma\|_x$$

とおく。但し、 C は次で与えられる:

$\tau: \text{lh}(\sigma) \rightarrow n$ s.t. $\sigma(i) = x_{\tau(i)}$ のとき、 $\|\tau\|_n = C$

このとき、 D_S が denotation system であることは容易にわかる。

注意 1.13 このことの逆は成り立っていない。つまり、ある denotation system で、homogeneous tree S に対する D_S となっていない

ものがある。(Girard-Normann [7, Rem 3.5])

注意 1.14 Dilator や homogeneous tree の recursiveness, prim. recursiveness, ... も 注意 1.5 denotation system の場合と同様、 ω の制限での性質で定義される。これは Girard [5] の次の定理に関し重要な意味をもつ：

Boundedness theorem : $\forall x \in O \exists y \in O \psi(x, y) \Rightarrow \exists \text{prim. rec dilator } D \text{ s.t. } \forall \alpha \geq \omega \forall x \in O^{<\alpha} \exists y < O^{<D(\alpha)} \psi(x, y).$

(但し、 ψ は arith で Kleene's O に対して positive な relation)

この結果の重要性は Ressayre [16] が注意しているように D の prim. recursive 性にある。この性質は D の ω の制限に關するもので、(ordinal 上ではなく) ω 上の prim. recursion のみを使って定義されることに注意する。(cf. Buchholz [2], Jäger [9])

§ 2. Slow-growing と fast-growing hierarchies

本節では Subrecursive inaccessible の構成を行う。まず、countable $\alpha \in On$ を自然数上の direct system の direct limit として表わすことを考察する。

各 limit $\lambda \leq \alpha$ に 1 つの fundamental sequence $(\lambda_n)_{n < \omega}$:

$(\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda, \sup_{n < \omega} \lambda_n = \lambda \text{ を満たす列のこと.})$

が対応しているものとする。この対応 $\lambda \mapsto (\lambda_n)_{n < \omega}$ のことを

(fundamental sequences の) system という。次の様に $n_x^\alpha, g_{xy}^\alpha, g_x^\alpha$ を定義する: ($n_x^\alpha < \omega$; $g_{xy}^\alpha: n_x^\alpha \rightarrow n_y^\alpha$; $g_x^\alpha: n_x^\alpha \rightarrow \alpha$ for $x < y < \omega$)

$$n_x^0 = 0, \quad n_x^{\alpha+1} = n_x^\alpha + 1, \quad n_x^\lambda = n_x^{\lambda x}$$

$$g_{xy}^0 = \emptyset, \quad g_{xy}^{\alpha+1} = g_{xy}^\alpha \cup \{ \langle n_x^\alpha, n_y^\alpha \rangle \}, \quad g_{xy}^\lambda = g_{xy}^{\lambda x}$$

$$g_x^0 = \emptyset, \quad g_x^{\alpha+1} = g_x^\alpha \cup \{ \langle n_x^\alpha, \alpha \rangle \}, \quad g_x^\lambda = g_x^{\lambda x}$$

この定義は fundamental sequences のとり方に依存しているが、実際、次が成り立つ。(証明は Dennis-Jones-Wainer [3, Th.1].)

命題 2.1 Countable $\alpha \in \mathcal{O}_n$ に対し、次の条件 (a)(b) は同値。

$$(a) \forall r \leq \alpha, \quad (r, g_x^r)_{x < \omega} = \varinjlim (n_x^r, g_{xy}^r)$$

$$(b) \forall r \leq \alpha, \begin{cases} \cdot x < y \Rightarrow r[x] \subseteq r[y] \text{ and} \\ \cdot \beta < r \Rightarrow \exists x < \omega (\beta \in r[x]) \end{cases}$$

$$\text{但し, } r[x] = \{ \beta \mid \beta + 1 <_x r \}$$

$<_x$ は ($\delta <_x \delta + 1$, $\lambda_x <_x \lambda$ for limit λ) の transitive closure.

この命題は fundamental sequences の system $\mathcal{P}$ が、性質 (b) をもてば、 α は 自然数の direct system の direct limit となることを示しているので、次に $\mathcal{P}$ の性質として (b) を導くため、より扱い易いものを導入しておく。

定義 2.2 System P が "structured" であるとは、次の性質をみたすときをいう:

$$\forall \text{ limit } \lambda \leq \alpha \quad (x < y < \omega \Rightarrow \lambda x \in \lambda \mathbb{I} y \mathbb{I}).$$

このとき、 $\alpha \in On^{(str.)}$ と書く。

命題 2.3 $\alpha \in On^{(str.)}$ のとき、 $\forall r \leq \alpha$ に対し、次が成り立つ。

- (i) $x < y < \omega \Rightarrow r \mathbb{I} x \mathbb{I} \leq r \mathbb{I} y \mathbb{I}$,
- (ii) $\beta < r \Rightarrow \exists x < \omega \quad (\beta \in r \mathbb{I} x \mathbb{I})$.

証明は r に関する帰納法による。(cf. Wainer[21]) n_α は通常、slow-growing function と呼ばれ、 $G_\alpha(x)$ と書かれる。

$$G_0(x) = 0; \quad G_{\alpha+1}(x) = G_\alpha(x) + 1; \quad G_\lambda(x) = G_{\lambda_x}(x).$$

($G_\alpha(x) = \alpha \mathbb{I} x \mathbb{I}$ の濃度)

命題 2.4 $\alpha \in On^{(str.)}$ のとき次が成り立つ。

- (i) $x < y < \omega \Rightarrow G_\alpha(x) \leq G_\alpha(y)$,
- (ii) $\beta < \alpha \Rightarrow G_\beta(x) < G_\alpha(x)$ for $\beta \in \alpha \mathbb{I} x \mathbb{I}$.

定義 2.5 Countable $\alpha \in On$ が "subrecursive inaccessible" (s-inacc.) であるとは、次を満たすときとする:

$$F_\alpha(x) \leq G_\alpha(x+1) \quad \text{for } \forall x < \omega.$$

但し、 F_α は次で定義される fast-growing function:

$$F_0(x) = x+1; \quad F_{\alpha+1}(x) = F_\alpha^{x+1}(x); \quad F_\lambda(x) = F_{\lambda_x}(x)$$

ここで $f: \omega \rightarrow \omega$ に対し、 $f^0(x) = x$; $f^{m+1}(x) = f(f^m(x))$ で f^m を定める。

注意 2.6 limit $\alpha \in On$ とその fund. seq. $(\alpha_x)_{x < \omega}$ に対し、 $\alpha_x \in On^{(str.)}$ であるとき、 $G_\alpha(x) < F_\alpha(x)$ for $x > 0$ は成り立つ。

定理 2.7 countable limit $\alpha \in On$ とその fund. seq. $(\alpha_x)_{x < \omega}$ に対し、 $\alpha_x \in On^{(str.)}$ for $\forall x < \omega$ で、 $G_{\alpha_{n+1}} = F_{\alpha_n}$ ($\forall n < \omega$) であれば、 α は s-inacc. である。

(証明) $x < \omega$ に対し、

$$F_\alpha(x) = F_{\alpha_x}(x) = G_{\alpha_{x+1}}(x) \leq G_{\alpha_{x+1}}(x+1) = G_\alpha(x+1) \quad \square$$

この定理の条件 ($G_{\alpha_{n+1}} = F_{\alpha_n} \forall n < \omega$) を満たす $\alpha \in On$ のとり方はいろいろ考えられるが、 G, F を単に関数としてではなく、functor として見ると一意的であることが示される。(Wainer[21])
今、s-inacc. $\tau = \sup_x \tau_x$ ($(\tau_x)_{x < \omega}$ は τ の fund. seq.) を次のように構成する:

まず $\omega_0 = \omega$; ω_n を n -th uncountable cardinal とする。今までの fund. seq. の system の概念を拡張して $\alpha < \omega_n$, $cf(\alpha) = \omega_m$ に対して $\sup \alpha_i = \alpha$ となる上昇列 $(\alpha_i)_{i < \omega_m}$ が 1 つ対応しているとする。

この $(\alpha_i)_{i < \omega_n}$ を以前と同様に fund. seq. という. 特に ω_n に対する fund. seq. $((\omega_n)_i)_{i < \omega_{n-1}}$ については、 $(\omega_n)_i = i$ で定義する。

このとき、各 $n < \omega$ に対して、 F_α を拡張した $\varphi_\alpha : \omega_n \rightarrow \omega_n$ ($\alpha < \omega_{n+1}$) を定義する:

$$\varphi_0(\beta) = \beta + 1; \quad \varphi_{\alpha+1}(\beta) = \varphi_\alpha^\beta(\varphi_\alpha(\beta))$$

$$\varphi_\lambda(\beta) = \sup_{\gamma} \varphi_{\lambda_\gamma}(\beta) \quad (cf(\lambda) = \omega_k; k < n)$$

$$\varphi_1(\beta) = \varphi_{1_\beta}(\beta) \quad (cf(1) = \omega_n)$$

但し、 φ^β の定義は: $\varphi^0() = ()$; $\varphi^{\beta+1}() = \varphi(\varphi^\beta())$; $\varphi^\lambda() = \sup_{\gamma} \varphi^{\lambda_\gamma}()$.

定義 2.8 $n < \omega$ に対し、named ordinals の集合 $T_n (\subseteq \omega_n)$ を次で定義する:

$$\bullet 0, 1, \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1} \in T_n,$$

$$\bullet \beta, \gamma \in T_n, \alpha \in T_{n+1} \Rightarrow \varphi_\alpha^\gamma(\beta) \in T_n \quad (\text{但し, } \varphi_\alpha : \omega_n \rightarrow \omega_n)$$

さらに $\kappa < \omega$ に対し、 $C : T_{n+1} \rightarrow T_n$ を次で定義する:

$$C(0) = 0, \quad C(\omega_0) = \kappa, \quad C(\omega_{k+1}) = \omega_k, \quad C(\varphi_\alpha^\gamma(\beta)) = \varphi_{C\alpha}^{C\gamma}(C\beta)$$

$$(\text{但し, 左辺の } \varphi_\alpha : \omega_{n+1} \rightarrow \omega_{n+1}, \text{ 右辺の } \varphi_\alpha : \omega_n \rightarrow \omega_n)$$

このとき、次の命題が成り立つ: (Wainer[21], Kadota[11])

命題 2.9 (Collapsing theorem) $\kappa < \omega$, $\alpha \in T_2$, $\beta \in T_1$ のとき、

$$G_{\varphi_\alpha(\beta)}(\kappa) = F_{C\alpha}(G_\beta(\kappa)).$$

最後に τ とその fund. seq. $(\tau_x)_{x < \omega}$ を次の式で定義する。

$$\tau_0 = 3, \quad \tau_{n+1} = \varphi_{\varphi \dots \varphi_3(\omega_n) \dots (\omega_1)}(\omega_0)$$

$$\tau = \sup_n \tau_n$$

このとき、次の命題が成り立つ。(Kadota [11])

命題 2.10 $n < \omega$ に対し、 $\tau_n \in O_n^{(\text{str.})}$

この2つの命題と、定理 2.7 を使えば τ が $s\text{-inacc.}$ であることがわかる。

§ 3. Ressayre による Π_1' -uniformization theorem の証明

本節では、homogeneous tree を用いた Π_1' -uniformization theorem の Ressayre [17] による証明を述べる。

この証明に關し、Ressayre [17] は "simple" と述べたが、その simplicity については、H. Tanaka (Math. Rev. 90e:03061 論文[17] の review) の、Shoenfield "Mathematical Logic" の証明はすでに simple であるという意見がある。Ressayre [17] は Π_1' -unif. th. の、(homogeneous tree を拡張した) Ehrenfeucht-Mostowski model を用いた証明を述べている。

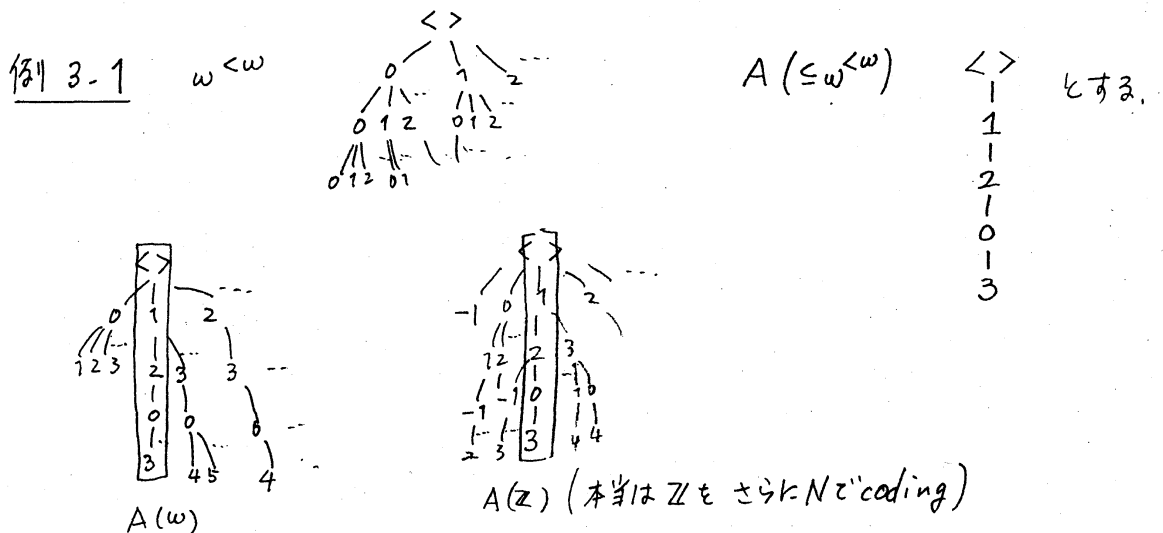
N を自然数全体とし、 N 上の linear order $<_X$ が与えられたとき、 $X \in OL$ と書く。 $X^{<\omega}$ を N 上の有限列全体とする (考えている order

が $<_x$ であることを強調するためにこう書く)。今、 $X \in OL$ のとき、 $T \subseteq X^{<\omega}$ が tree であるとは、§1 と同じで $(s \in T, k < lh(s) \Rightarrow s \upharpoonright k \in T)$ のときとする。 $<\omega$ は N 上の通常の ω の order $<$ を表わす。このとき、tree $A \subseteq \omega^{<\omega}$ 、 $X \in OL$ に対して $A(X) \subseteq X^{<\omega}$ を次で定義する：

$$(x_i)_{i < n} \in A(X) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists (a_i)_{i < n} \in A$$

map $a_i \mapsto x_i$ が order preserving

(但し、 a_i の order は $<\omega$ 、 x_i は $<_X$ に属するもの)



N 上の linear order $<_X$ が well-order のとき、 $X \in WO$ と書く。 $A \subseteq \omega^{<\omega}$ が well-founded over WO とは、 $(X \in WO \Rightarrow A(X) \text{ が well-founded})$ のとき。次の補題は §1 でも使ったが、 Π_1 relation の WO に属する表現について述べたもの。

補題 3.1. (Normal form for Π_1') $\varphi(R) \in \Pi_1'$ relation とする。

このとき、ある対応 $p \in \omega^\omega \mapsto X_p \in OL$ があって次が成り立つ：

$$(i) \quad \varphi(p) \Leftrightarrow X_p \in WO$$

$$(ii) \quad X_p \text{ is recursive in } p, \text{ uniformly (i.e., } \langle X_p = \{e\}^p \text{ for } \exists e \in \mathbb{N} \text{)}$$

今、§1 の定理 1.12 の $p \in {}^\omega\omega$ を $p \in 2^\omega$ に制限すると、次の補題 (1.12 より強い) が成り立つ:

補題 3.2 (Homogeneous tree lemma) $\varphi(R) \in \Pi_1^1$ relation とする。

$A \subseteq {}^\omega <^\omega$ を次で定義される tree とする:

$$(a_i)_{i < n} \in A \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists p \in 2^\omega \text{ (map } i \mapsto a_i \text{ が order preserving,}$$

但し、 i の order は $<_{X_p}$, a_i は $<^\omega$ に属するもの。

すなわち、 X_p は上の補題のもの。)

このとき、次が成り立つ:

$$(a) (i) \quad \neg \exists p \in 2^\omega \varphi(p) \Leftrightarrow A \text{ is well-founded over } WO$$

$$(ii) \quad A \text{ is rec. enum. ([17] では } A \text{ は rec. まで述べられていた)}$$

(b) 任意の $X \in OL$ に対して、

$$(i) \quad (x_i)_{i < n} \in A(X) \Leftrightarrow \exists p \in 2^\omega \text{ (map } i \mapsto x_i \text{ が order preserving)}$$

但し、 i の order は $<_{X_p}$, x_i は $<_X$ に属する。

$$(ii) \quad (x_i)_{i < \omega} \text{ が } A(X) \text{ の path, } \Leftrightarrow \exists p \in 2^\omega \text{ (map } i \mapsto x_i \text{ が order preserving)}$$

$A(X)$ の path,

但し i の order は $<_{X_p}$, x_i は $<_X$ に属する。

(証明) (b) から示す: (b)(i) 定義より、

$$(x_i)_{i < n} \in A(X) \Leftrightarrow \exists (a_i)_{i < n} \in A \text{ (} a_i \mapsto x_i \text{ order preserving, 但し } a_i \text{ は } <^\omega, x_i \text{ は } <_X \text{ に属する)}$$

$$\Leftrightarrow \exists \rho \in 2^\omega (i \mapsto a_i \mapsto x_i \text{ (order preserving, } i \text{ は } <_{\rho}, a_i \text{ は } <_{\omega}, x_i \text{ は } <_X))$$

$$\Leftrightarrow \exists \rho \in 2^\omega (i \mapsto x_i) \text{ order preserving.}$$

b(ii) $\Leftarrow$ は明らか。 (b)(ii) $\Rightarrow$ は $(x_i)_{i < \omega}$ が A の path とすると、

$\forall n \exists \rho_n \in 2^\omega$ s.t. $i \mapsto x_i (i < n)$ が order preserving (i の方は $<_{\rho_n}$ x_i は $<_X$)。 2^ω のコンパクト性より、ある収束部分列 $\{\rho_{n_i}\} \rightarrow \exists \rho' \in 2^\omega$ があるが、map $\rho \mapsto X_\rho$ が連続であるから、この $\rho' \in 2^\omega$ に対し、

$$\forall n (i \mapsto x_i (i < n) \text{ は order pres. (order は } i \text{ が } <_{\rho'}, x_i \text{ が } <_X))$$

$$(a)(i): \neg \exists \rho \in 2^\omega \varphi(\rho) \stackrel{3.1}{\Leftrightarrow} \neg \exists \rho \in 2^\omega (X_\rho \in WO)$$

$$\Leftrightarrow \forall X (X \in WO \Rightarrow \neg \exists (x_i) \exists \rho \in 2^\omega \text{ s.t. } i \mapsto x_i \text{ が order pres.}$$

$$(\text{但し, } i \text{ は } <_{\rho}, x_i \text{ が } <_X))$$

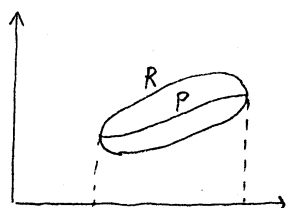
$$\Leftrightarrow \forall X (X \in WO \Rightarrow A(X) \text{ is well-founded.})$$

(a)(ii): $\bar{x} \in A$ は $\exists \rho \in 2^\omega \psi(\rho, \bar{x})$ (ψ は recursive) という形。この場合

A は rec. enumerable であることはよく知られている。 $\square$

定理 3.3 (Π'_1 -uniformization theorem) $R(\alpha, \beta) \in \Pi'_1 \text{ relation}$
 $(\alpha, \beta \in \omega^\omega)$ とするとき、 $\Pi'_1 \text{ relation } P$ が存在して、

$$\forall \alpha \forall \beta (P(\alpha, \beta) \Rightarrow R(\alpha, \beta)) \wedge \forall \alpha (\exists! \beta P(\alpha, \beta) \Leftrightarrow \exists \beta R(\alpha, \beta)).$$



(証明): 実際には次の場合を示す。Relativisation と $\omega^\omega \in 2^\omega$ でコード化する技術により一般化できるから。

• Π_1^1 の $\varphi(S)$ s.t. $\exists S \in 2^\omega \varphi(S)$ に対し、ある Π_1^1 の ψ で次をみたす:

$$\exists \rho_0 \in 2^\omega \text{ s.t. } \varphi(\rho_0), \forall \rho \in 2^\omega (\psi(\rho) \Leftrightarrow \rho = \rho_0)$$

今、 Π_1^1 の $\psi(\rho_0)$ を次で定める:

$$\psi(\rho_0) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (X_{\rho_0} \in WO \wedge \|X_{\rho_0}\| = \min \{ \|X_\rho\| : X_\rho \in WO \} \text{ (第一行)})$$

$$\wedge (\text{idw は } A(X_{\rho_0}) \text{ の leftmost な path) (第二行)}$$

$$\wedge \forall \rho \in 2^\omega (X_\rho = X_{\rho_0} \Rightarrow \rho_0 \leq \rho) \text{ (第三行)}$$

但し、 $\|X\|$ は $<_X$ の order type, $\text{idw} = (0, 1, 2, \dots)$, A は前補題の

もの, "leftmost" は $A(X_{\rho_0})$ の Kleene-Brouwer ordering の意味で.

まず、 $\psi(\rho_0)$ の ρ_0 が存在することを示す: 仮定 ($\exists S \in 2^\omega \varphi(S)$)

と前補題により、 $\exists X_\rho \in WO$ s.t. $A(X_\rho)$ は well-founded でない.

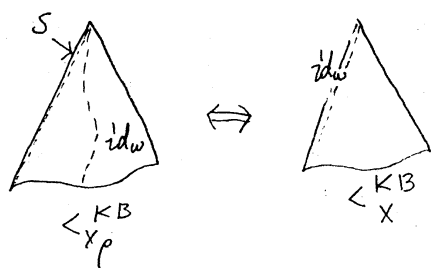
このとき前補題(b)(ii)より、 idw が $A(X_\rho)$ の path になる.

$X_{\rho'}$ を(第一行)をみたすとし、 $A(X_{\rho'})$ の leftmost path を $S =$

$(s_0, s_1, s_2, \dots)$ とする。 $S(i) <_{X_{\rho'}} S(j) \Leftrightarrow i <_X j$ として def. すると、

$<_X$ の order type は $<_{X_{\rho'}}$ と同じで、 idw が $A(X)$ の leftmost

path になる、前補題より $\exists \rho'' \in 2^\omega (X = X_{\rho''})$. (第三行)目



をみたすものは、

$$\inf \{ \rho \mid X_\rho = X_{\rho''} \}$$

としてとればよい。

一意性については、逆に、

$A(X_{\rho'})$ の leftmost path S と、 idw が leftmost path になっている $A(X)$ の idw (すなわち X) とは、 $i \mapsto s_i$ (order pres.) で isomorphic になる、^{勝手な}よい。□

参考文献

- [1] V. M. Abrusci. Some uses of dilators in combinatorial problems: part III, independence results by means of decreasing F -sequences (F weakly finite dilator). *Archive for Mathematical Logic*, 29: 85–109, 1989.
- [2] W. Buchholz. Inductive Definitionen und Dilation. *Archive for Mathematical Logic*, 27: 51–60, 1988.
- [3] E. C. Dennis-Jones and S. S. Wainer. Subrecursive hierarchies via direct limits. In *Lecture Notes in Mathematics 1104*, pages 117–128, Springer-Verlag, 1984.
- [4] J. -Y. Girard. Π_2^1 -logic, part 1: dilators. *Annals of Mathematical Logic*, 21: 75–219, 1981.
- [5] J. -Y. Girard. A survey of Π_2^1 -logic. In *J. Barwise et al (eds.), Logic, Methodology and Philosophy of Science VI*, pages 89–107, North-Holland, 1982.
- [6] J. -Y. Girard and D. Normann. Embeddability of ptykes. *Journal of Symbolic Logic*, 57: 659–676, 1992.
- [7] J. -Y. Girard and D. Normann. Set recursion and Π_2^1 -logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 28: 255–286, 1985.
- [8] J. -Y. Girard and J. P. Ressayre. Elements de logique Π_n^1 . In *Recursion Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 42*, pages 389–445, American Mathematical Society, 1985.
- [9] G. Jäger. Countable admissible ordinals and dilators. *Zeitschr. f. math. Logik*, 32: 451–456, 1986.
- [10] H. R. Jervell. Introducing homogeneous trees. In *Logic Colloquium'81, Proceedings of Herbrand Symposium*, pages 147–158, North-Holland Publishing Company, 1982.
- [11] N. Kadota. On Wainer's notation for a minimal subrecursive inaccessible ordinal. *Mathematical Logic Quarterly*, 39: 217–227, 1993.
- [12] A. S. Kechris. Boundedness theorems for dilators and ptykes. *Annals of Pure and Applied Logic*, 52: 79–92, 1991.
- [13] A. S. Kechris and W. H. Woodin. A strong boundedness theorem for dilators. *Annals of Pure and Applied Logic*, 52: 93–97, 1991.

- [14] P. Päppinghaus. Ptykes in Gödels T und Definierbarkeit von Ordinalzahlen. *Archive for Mathematical Logic*, 28: 119–141, 1989.
- [15] P. Päppinghaus. Rekursion über Dilatoren und die Bachmann-Hierarchie. *Archive for Mathematical Logic*, 28: 57–72, 1989.
- [16] J. P. Ressayre. Bounding generalized recursive functions of ordinals by effective functors; a complement to the Girard theorem. In *Logic Colloquium'81, Proceedings of Herbrand Symposium*, pages 251–278, North-Holland Publishing Company, 1982.
- [17] J. P. Ressayre. Π_2^1 -logic and uniformization in the analytical hierarchy. *Archive for Mathematical Logic*, 28: 99–117, 1989.
- [18] J. van de Wiele. Recursive dilators and generalized recursions. In *Logic Colloquium'81, Proceedings of Herbrand Symposium*, pages 325–332, North-Holland Publishing Company, 1982.
- [19] J. Vauzeilles. Cut-elimination and interpolation for Ω -logic. *Archive for Mathematical Logic*, 27: 161–175, 1988.
- [20] J. Vauzeilles. Functors and ordinal notations IV; the Howard ordinal and the functor A . *Journal of Symbolic Logic*, 50: 331–338, 1985.
- [21] S. S. Wainer. Hierarchies of provably computable functions. In *P. Petkov (ed.), Mathematical Logic*, pages 211–220, Plenum Press, New York, 1990.
- [22] S. S. Wainer. The “slow-growing” Π_2^1 approach to hierarchies. In *Recursion Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 42*, pages 487–502, American Mathematical Society, 1985.