

カオス尺度による量子スピン系と差分方程式系の解析

東京理科大学理工学部情報科学科

井上 啓 (Kei Inoue)

1. はじめに

自然科学の数理的研究では、複雑な自然現象を解析するために、出来るだけ簡単ないくつかの部分に分割して、その部分を取り扱う方法が従来から用いられてきた。例えば、複雑な自然現象の変化の過程を線形な微分方程式で記述し、その解を求めることで、その現象を理解しようとする方法などが該当する。しかし、この方法を適用するには、線形性という、全体が非常に簡単な部分の線形結合で表されるという前提が必要となる。ところが、自然現象の変化の過程を記述する多くの微分方程式は、非線形な微分方程式で記述される。

古典カオスの研究はこのような非線形な微分方程式で記述される力学系の解の軌道の振る舞いを調べるものである。古典カオスの定義は様々であるが、最初にカオスの定義を与えたのはローレンツである。彼は、1963年に単純な気象予測モデル（ローレンツモデル）が初期条件の僅かな違いによって予測不可能な複雑な挙動を示すことに着目し、初期値の鋭敏性というカオスの定義を与えた。その約12年後の1975年にリー・ヨークが、論文"Period three implies chaos"の中でカオスの存在を数学的に証明し、現在では、力学系がカオスかどうかを判定するための尺度がいくつか提案されている。例えば、リアプノフ指数、位相エントロピー、コロモゴロフ・シナイ(KS)エントロピー等が知られている。ところが、最近では、このような古典的（決定論的）カオスの振る舞いを調べるのではなく、むしろ、古典的にカオスを示す力学系を量子化して、その量子系での振る舞いや量子と古典の間の対応関係を調べるといった量子カオスの研究が行わるようになった。ここでは詳しく述べないが、量子カオスの研究として、例えば、量子順位統計、ランダム行列理論、グッツビラーの跡公式などがある[2,3,4,5,6,12,17]。

しかしながら、古典カオスの定義同士の間関係や量子カオスの定義は必ずしも明確になっておらず、それぞれの分野によって個別に扱われている。こうした状況の中で、様々な分野における力学系のカオスを統一的に扱うために、様々な複雑さと状態変化の力学の融合である情報力学がOhyaによって提唱され

ている[7,13,15]. カオス尺度は, 情報力学の2つの複雑さを用いて定義されるカオスの度合いを測る量である[15,16].

本稿では, エントロピーを用いて定義されるエントロピー型カオス尺度を用いて, 非線形な変換の元でのスピン系の振る舞いを調べる. 特に, パイコね型変換にから導かれたスピン系の振る舞いについて考察する.

2. 情報力学の複雑さとカオス尺度

この節では, 情報力学における複雑さについて述べる.

情報力学の系の複雑さには2種類のものがある. 今, ある力学系を記述する状態が φ であったとする. 一つの複雑さは, 系の状態 φ 自体が有する複雑さ $C(\varphi)$ であり, もう一つはある状態 φ がある力学的変換(これをチャンネルという) Λ^* によって他の状態 $\Lambda^*\varphi$ へ変化したとき, φ から $\Lambda^*\varphi$ へ伝達された複雑さ $T(\varphi; \Lambda^*)$ (伝達複雑量と呼ぶ)である. これらの複雑さは, 何でもよいというわけではなく, 次の4つの条件を満足する必要がある[7,13,15].

(1) 正值性: 任意の状態 φ に対して,

$$C(\varphi) \geq 0$$

(2) 不変性: 素な状態の集合 $ex\mathcal{G}$ から $ex\mathcal{G}$ ($\mathcal{G}$ 上の全ての端点の集合)への全単射 j に対して,

$$\begin{aligned} C(\varphi) &= C(j(\varphi)) \\ T(\varphi; \Lambda^*) &= T(j(\varphi); \Lambda^*) \end{aligned}$$

(3) 加法性: $\Phi = \varphi \otimes \psi$ に対して,

$$C(\Phi) = C(\varphi) + C(\psi)$$

(4) 基本不等式: $0 \leq T(\varphi; \Lambda^*) \leq C(\varphi)$

(5) 複雑さの保存: $T(\varphi; id) = C(\varphi)$ (なお, id は恒等変換を表す.)

これらの情報力学の複雑さの公理を満たす複雑さ C と T の組として, 例えば, エントロピーと相互エントロピーがある.

このとき, φ と Λ^* に関するカオス尺度(CD)は次のように定められる.

定義 2.1 (カオス尺度) 状態 φ がチャンネル Λ^* によって変化するとき, 状態変化の力学を記述するチャンネル Λ^* のカオスの度合いは

$$D(\varphi; \Lambda^*) \equiv C(\Lambda^*\varphi) - T(\varphi; \Lambda^*)$$

によって測られる.

このカオス尺度を用いれば, 以下のようにカオスを判定することができる:

$D > 0 \Rightarrow$ 力学系はカオス的である.

$D = 0 \Rightarrow$ 力学系は安定している.

3. エントロピー型カオス尺度

カオス尺度は上記のように情報力学の2つの複雑さを用いて定義されている. ここでは, エントロピーと相互エントロピーを用いて定義されるエントロピー型カオス尺度について述べる.

古典離散系(完全事象系)(X, p)において, 状態 p は $p = \{p_1, \dots, p_n\} (n \in \mathbb{N}, n < \infty)$ $= \sum_{i=1}^n p_i \delta_i$ (ただし, δ_i は (i, i) 成分が1のみである n 次正方形行列)で与えられ, 遷移確率 $(p(j|i))$ で定められるチャネル Λ^* によって, 入力系 X の状態 (分布) p は出力系 Y の状態 $\Lambda^* p$ へと変化する. このとき, 入力系の状態 p とチャネル Λ^* に関する古典系のエントロピー型カオス尺度は

$$D_1^{(n)}(p; \Lambda^*) = \inf \left\{ \sum_k p_k S(\Lambda^{*j} \delta_k); j = 1, \dots, n \right\}$$

$$D_2^{(n)}(p; \Lambda^*) = \frac{1}{n} \sum_k p_k S(\Gamma_n^* \delta_k)$$

で与えられる[16]. ただし, $p^{(j)} \equiv \Lambda^{*j} p = \overbrace{\Lambda^* \circ \dots \circ \Lambda^*}^j p$, $\Gamma_n^* p \equiv \Lambda^* p \otimes \Lambda^{*2} p \otimes \dots \otimes \Lambda^{*n} p$ である.

また, $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間, $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の密度作用素全体とすると, 量子系の入力系 $(\mathcal{H}, \mathfrak{S}(\mathcal{H}))$ から出力系 $(\overline{\mathcal{H}}, \mathfrak{S}(\overline{\mathcal{H}}))$ への変化(力学系)は, $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ の状態 ρ から $\mathfrak{S}(\overline{\mathcal{H}})$ へ状態 $\bar{\rho}$ への写像(状態変化)によって記述される. この写像 $\Lambda^*: \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathfrak{S}(\overline{\mathcal{H}})$ を量子系のチャネルという[12,14]. 入力系の状態 ρ とチャネル Λ^* に関する量子系のエントロピー型カオス尺度は次のように定義されている[8].

$$D_1^{(n)}(\rho; \Lambda^*) = \inf \left\{ \sum_k \lambda_k^{(m)} S(\Lambda^{*j} E_k^{(m)}); E^{(m)} = \{E_k^{(m)}\}, j = 1, \dots, n \right\}$$

$$D_2^{(n)}(\rho; \Lambda^*) = \inf \left\{ \frac{1}{n} \sum_k \lambda_k^{(m)} S(\Gamma_n^* E_k^{(m)}); E^{(m)} = \{E_k^{(m)}\} \right\}$$

ただし, $\rho = \sum_k \lambda_k E_k, \Lambda^* \rho = \sum_k \lambda_k^{(m)} E_k^{(m)}$ (シャッテン分解),

$$\rho^{(j)} \equiv \Lambda^* \rho = \overbrace{\Lambda^* \circ \cdots \circ \Lambda^*}^j \rho$$

$$\Gamma_n^* \rho \equiv \Lambda^* \rho \otimes \Lambda^{*2} \rho \otimes \cdots \otimes \Lambda^{*n} \rho$$

である. 以下では, このエントロピー型カオス尺度を使って (1) パイこね変換の特徴付け, (2) 量子スピン系の一般的な非線形に関する評価式とパイこね変換型写像から定義される量子スピン系の振る舞いの特徴付け, について説明する.

4. リアプノフ指数

差分方程式系の解の軌道の振る舞いを考察する上で, カオスを測る量的尺度としてよく用いられるのがリアプノフ指数である. このリアプノフ指数は軌道の指数関数的な発散や収束の度合い(速さ)を測る尺度で, その値が正であるとき, 軌道がカオス的な振る舞いをしていると判定する.

1次元差分方程式系の解の軌道のリアプノフ指数は以下で定義される.

定義 4.1 (リアプノフ指数) 微分可能な滑らかな 1 次元写像 $f: R \rightarrow R$ に対して, $O \equiv \{f^n(x_0); n=0,1,2,\dots\}$ を初期値を x_0 とする軌道とする. このとき, 軌道 O のリアプノフ指数を

$$\lambda_O(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_O^{(n)}(f) \quad \lambda_O^{(n)}(f) = \frac{1}{n} \log \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

で定義する. 初期値によらずリアプノフ指数が一定であるとき, $\lambda_O(f)$ を $\lambda(f)$ と書く.

なお, 一般の m 次元写像 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ に対して, リアプノフ指数 $\lambda(\mathbf{f})$ は次のように定義される: $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^m$ を初期点とし, $\mathbf{x}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1})$ ($n \in \mathbf{N}$) とする. このとき, $\mathbf{x}_0$ に関する $\mathbf{x}_n = (x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ のヤコビ行列 $J(\mathbf{x}_0)$ は

$$J(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

で定義され, 軌道 $O \equiv \{\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0); n=0,1,2,\dots\}$ のリアプノフ指数 $\lambda_O(\mathbf{f})$ は

$$\lambda_o(\mathbf{f}) = \log \bar{\mu}_1, \quad \bar{\mu}_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu_k^n)^{\frac{1}{n}} \quad (k=1, 2, \dots, m)$$

で与えられる[1]. ただし, $J_n(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0)$, μ_k^n は k 番目に大きい $J_n(\mathbf{x}_0)J_n(\mathbf{x}_0)^T$ の固有値の平方根である.

5. パイこね変換のカオス尺度

パイこね変換は, 引き延ばしと折り畳みというパイをこねるような操作を表す2次元写像のことで, この操作を何回も繰り返すことによって, カオスが生じる. パイこね変換 f は

$$f(r_n) = f(x_n, y_n) = \begin{cases} \left(2ax_n, \frac{1}{2}ay_n \right) & (0 \leq x_n \leq 0.5) \\ \left(a(2x_n - 1), \frac{1}{2}a(y_n + 1) \right) & (0.5 < x_n \leq 1) \end{cases}$$

で与えられる. 以下はパイこね変換の変数 a に関する軌道図である.

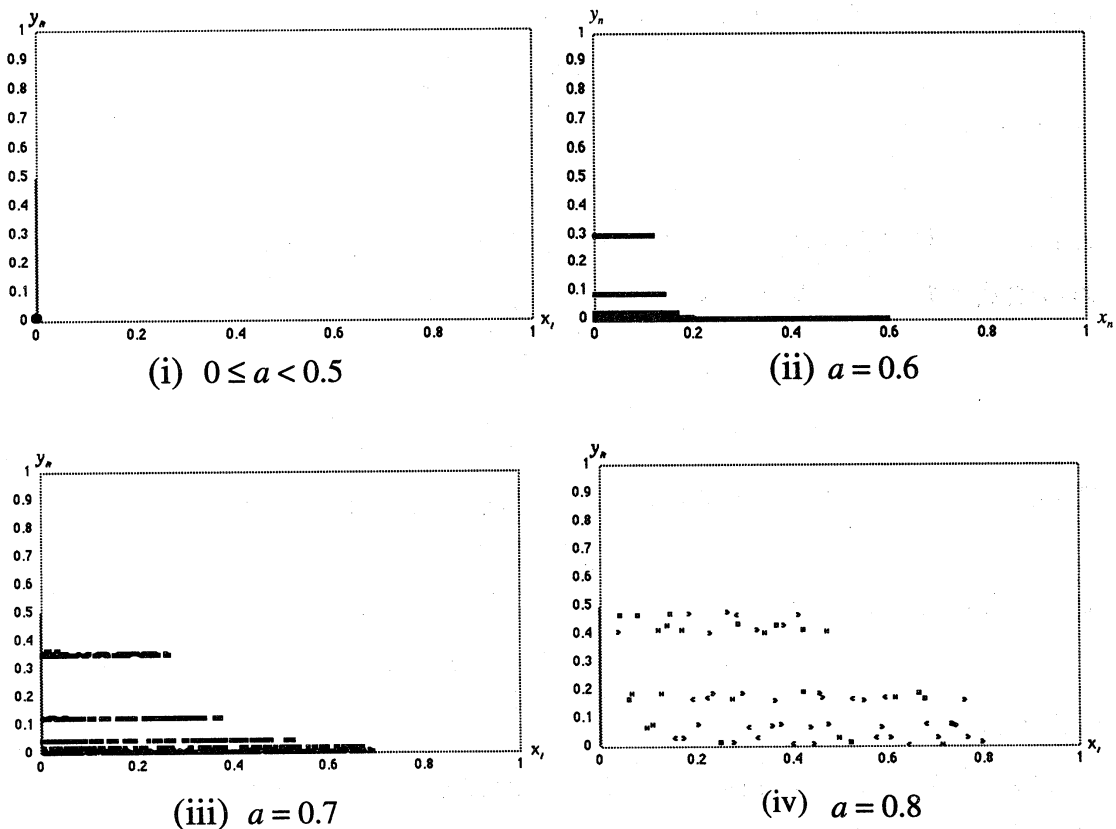


図1. パイこね変換の軌道図 (その1)

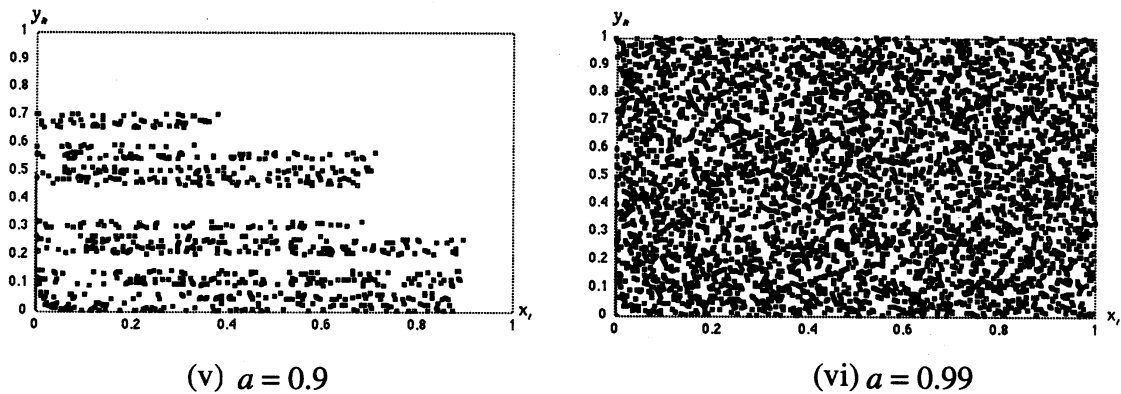


図2. パイコね変換の軌道図 (その2)

この軌道図をみると、変数 a の値が大きくなればなるほど、軌道が特定の点から線へ、そして平面全体へと広がっていき、その振る舞いが複雑になっていく様子がわかる。それでは、このような差分方程式系のエントロピー型カオス尺度を求めるアルゴリズムについて説明する[16].

$I=[a,b]^N$ とし、 f を I から I への滑らかな写像 ($x_{n+1}=f(x_n)$) とする. $\{A_k\}$ を I の有限分割

$$I = \bigcup_k A_k \quad (A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j)$$

とし、 $|S|$ を集合 S の元の個数とする. このとき、 n を十分大きな自然数、 m をある固定された自然数とする. このとき、時刻 n の軌道の確率分布を

$$p^{(n)} \equiv (p_i^{(n)}) = \sum_i p_i^{(n)} \delta_i^{(n)}$$

$$p_i^{(n)} \equiv \frac{|\{k \in \mathbb{N}; x_k \in A_i, n < k \leq n+m\}|}{m}$$

で与える. また、 f によって構成される状態変化を表すチャネルは

$$\Lambda_f^* p^{(n)} = p^{(n+1)}$$

で定められる. このとき、 Λ_f^* 1ステップに関するエントロピー型カオス尺度は

$$D^{(1)}(p^{(n)}; \Lambda_f^*) = \sum_k p_k^{(n)} S(\Lambda_f^* \delta_k^{(n)})$$

で定められる.

このときのパイコね変換のリアプノフ指数とカオス尺度の変数 a に関する変化を表しているのが、次の図3と図4である[9].

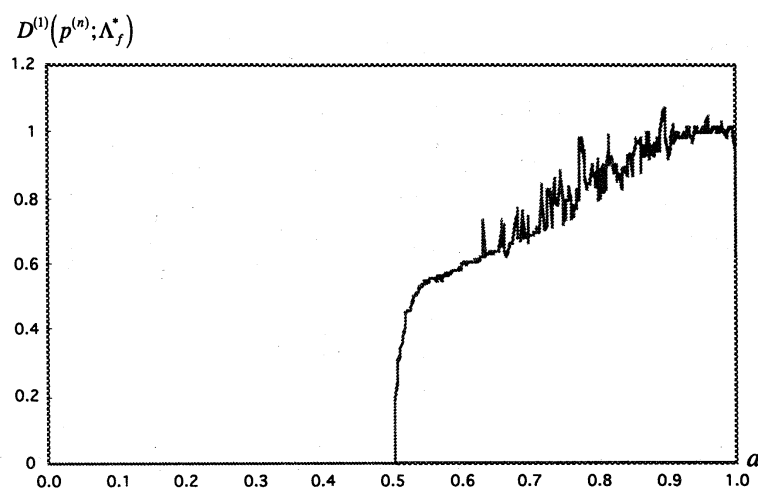


図3. パイこね変換のエントロピー型カオス尺度 $D^{(1)}(p^{(n)}; \Lambda_f^*)$

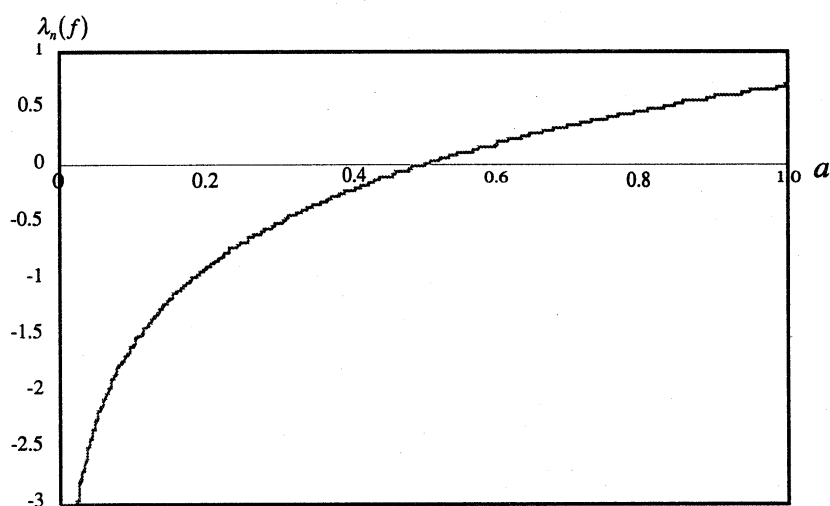


図4. パイこね変換のリアプノフ指数

この結果を見ると、 $a > 0.5$ のときはどちらの尺度も正の値を取り、解の軌道がカオス的な振る舞いをしていることがわかり、さらに、軌道図が複雑になればなるほど正の値が大きくなっている。また、軌道が安定しているところでは、エントロピー型カオス尺度は0、リアプノフ指数は負の値を取るが、リアプノフ指数は $a = 0$ では定義されないが、エントロピー型カオス尺度は0の値をとる。 $a = 0$ の軌道図は一点に収束しているから、エントロピー型カオス尺度の方が $a = 0$ の特徴を良くとらえていることがわかる。

6. スピン系におけるカオス尺度

この節では、量子スピン系にある種の非線形変換を導入することによって、量子スピン系がどのように振る舞うかを考察する。

スピン1/2系の全ての状態 ρ は、 $\|\vec{X}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \leq 1$ を満足する
 $\vec{X} = (x_1, x_2, x_3)^t \in R^3$ とパウリ行列 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を使って、

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{\sigma} \cdot \vec{X})$$

で与えられる。ここで、 $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^t$ である。このとき、以下の補題が成り立つ。

補題6.1.: スピン1/2系の状態 ρ のシャッテン分解は

$$\rho = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} E_{\alpha} \quad (\alpha = \pm 1)$$

で一意に与えられる。ただし、

$$\lambda_{\alpha} = \frac{1}{2}(1 + \alpha \|\vec{X}\|), \quad E_{\alpha} = \frac{1}{2} \left(I + \alpha \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{X}}{\|\vec{X}\|} \right) (\|\vec{X}\| \neq 0).$$

いま、 $f: R^3 \rightarrow R^3$ を $\|f(\vec{X})\| \leq 1$ を満足する3次元写像であるとする。このとき、量子スピン1/2系の全てチャンネル $\Lambda_f^*: \rho \rightarrow \Lambda_f^* \rho$ は、この f を用いて、

$$\Lambda_f^* \rho = \frac{1}{2}(I + \vec{\sigma} \cdot f(\vec{X}))$$

で表される。このとき、以下の定理が成り立つ。

定理6.1: $\Lambda_f^{*j} \rho$ のシャッテン分解が $\Lambda_f^{*j} \rho = (\Lambda_f^*)^j \rho = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^{(j)} E_{\alpha}^{(j)}$, $\Lambda_f^{*j} E_{\alpha}^{(m)}$ のシャッテン分解が $\Lambda_f^{*j} E_{\alpha}^{(m)} = (\Lambda_f^*)^j E_{\alpha}^{(m)} = \sum_{\beta} \omega_{\alpha\beta}^{(m,j)} F_{\alpha\beta}^{(m,j)}$ で表されるものとする。このとき、任意の f に対して、エントロピー型カオス尺度は

$$D_1^{(n)}(\rho; \Lambda_f^*) = \inf \left\{ - \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \lambda_{\alpha}^{(m)} \omega_{\alpha\beta}^{(m,j)} \log \omega_{\alpha\beta}^{(m,j)}, j=1, \dots, n \right\}$$

$$D_2^{(n)}(\rho; \Lambda_f^*) = - \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{\alpha, \beta_1} \lambda_{\alpha}^{(m)} \omega_{\alpha\beta}^{(m,j)} \log \omega_{\alpha\beta}^{(m,j)}$$

ただし, $\|f^m(\bar{X})\| \neq 0$ で

$$\lambda_{\beta}^{(m)} = \frac{1}{2} \left(1 + \alpha \|f^m(\bar{X})\| \right)$$

$$\omega_{\alpha\beta}^{(m,j)} = \frac{1}{2} \left(1 + \beta \left\| f^j \left(\alpha \frac{f^m(\bar{X})}{\|f^m(\bar{X})\|} \right) \right\| \right)$$

ここで, 次のようなパイこね型変換写像を定義する.

定義6.1 $(x_n, y_n, z_n)^t \in R^3$ に対して,

$$f(x_n, y_n, z_n) = \begin{cases} f_1(x_n, y_n, z_n) & \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x_n < 0 \right) \\ f_2(x_n, y_n, z_n) & \left(0 \leq x_n \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{cases}$$

ただし,

$$f_1(x_n, y_n, z_n) = \left(2a \left(x_n + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} a \left(y_n + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

$$f_2(x_n, y_n, z_n) = \left(2a \left(x_n + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \sqrt{2}a - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} a \left(y_n + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} a - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

もし, $\frac{1}{\sqrt{2}} < |x_n| \leq 1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} < |y_n| \leq 1 \right)$ ならば, $x_n = 0 (y_n = 0)$ とする.

以下の図は, $x_0 = y_0 = z_0 = 0.3$ のときのカオス尺度 $D_1^{(n)}(\rho; \Lambda_f^*)$ と $D_2^{(n)}(\rho; \Lambda_f^*)$ の a に関する推移を表している.

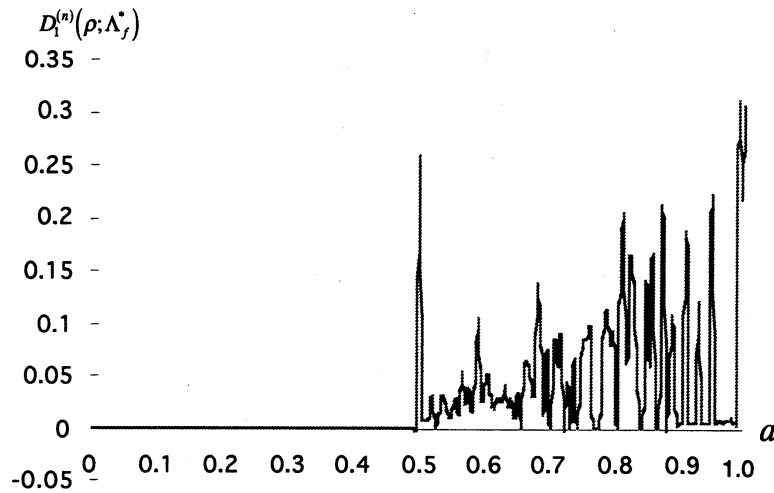


図5. パイこね型変換から導かれたスピン系の非線形チャンネル
のカオス尺度 $D_1^{(n)}(\rho; \Lambda_f^*)$ ($m=1000, n=2000$)

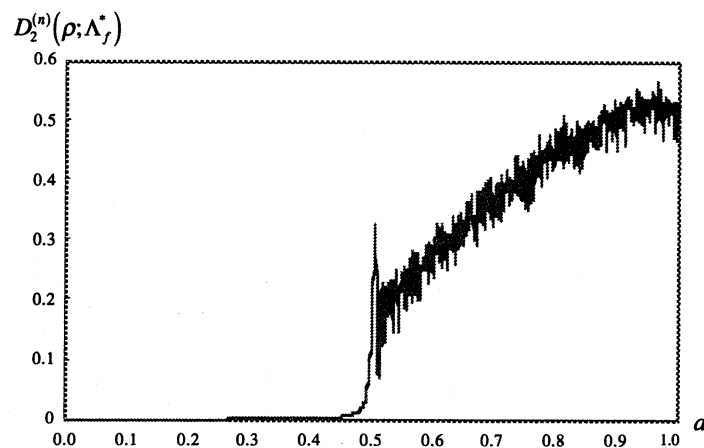


図6. パイこね型変換から導かれたスピン系の非線形チャンネル
のカオス尺度 $D_2^{(n)}(\rho; \Lambda_f^*)$ ($m=10, n=110$)

図5, 図6のどちらも $a < 0.5$ のところではカオスは殆ど生じないが, $a > 0.5$ の領域ではスピン系が複雑な振る舞いを示すことがわかる. $D_1^{(n)}(\rho; \Lambda_f^*)$ を用いると $a > 0.5$ の領域でもスピン系が安定している領域があると見れるが, $D_2^{(n)}(\rho; \Lambda_f^*)$ の方はそのような領域は存在せず, 古典のパこね変換の結果(図3)に酷似した結果が得られた[8].

7. 解析結果及び考察

以上より, エントロピー型カオス尺度を用いると, 以下のような結果を得ることができた.

- ・パイこね変換の変数 a による差分方程式系の振る舞いの違いを分類することができる. リアプノフ指数を用いても同様な結果は得られるが, リアプノフ指数は $a=0$ で定義されていないが, エントロピー型カオス尺度は $a=0$ でも定義され, その結果は軌道が一点に収束し, 軌道が安定しているといった特徴を捕らえている.

- ・エントロピー型を用いると全てのスピン系の振る舞いを考察することが可能である. 例えば, パイこね型変換写像から導かれたスピン系の振る舞いをエントロピー型カオス尺度を用いて見ると, そのスピン系はパイこね変換と同様に複雑な振る舞いをすることが示せた.

- ・計算アルゴリズムの容易であることから, カオス尺度は他の古典系や量子ス系の振る舞いの解析にも応用可能であると考えられる.

参考文献:

- [1] K.T.Alligood, T.D.Sauer and J.A.Yorke, *Chaos-An Introduction to Dynamical Systems-*, Textbooks in Mathematical Sciences, Springer (1996).
- [2] R. Alicki, Quantum geometry of noncommutative Bernoulli shifts, Banach Center Publications, Mathematics Subject Classification 46L87 (1991).
- [3] F. Bennatti, *Deterministic Chaos in Infinite Quantum Systems*, Springer (1993).
- [4] G.Casati, G.Maspero and D.Shepeliansky: Relaxation process in a regime of quantum chaos, *Phys. Rev. E* 56, R6233 (1997).
- [5] H. Hasegawa, Dynamical formulation of quantum level statistics, *Open Systems and Information dynamics*, 4, 359-377 (1997).
- [6] 池田研介他著: "特集 量子カオス", 数理科学, No.411, サイエンス社 (1997年9月).
- [7] R.S. Ingarden, A. Kossakowski and M. Ohya, *Information Dynamics and Open Systems*, Kluwer Academic Publishers (1997).
- [8] K. Inoue, A. Kossakowski and M. Ohya, On quantum in a spin system, SUT preprint.
- [9] K.Inoue, M. Ohya and K. Sato, Application of chaos degree to some dynamical systems, to appear in *Chaos, Solitons & Fractals*.
- [10] 井上 啓・上川原一・大矢雅則, 量子エントロピー型カオス尺度を用いたスピン1/2系の解析, SUT preprint.

- [11] K. Nakamura, *Quantum Versus Chaos- Questions Emerging from Mesoscopic Cosmos-*, Kluwer Academic Publishers (1997).
- [12] M. Ohya, On compound state and mutual information in quantum information theory, *IEEE Trans. Information Theory*, 29, No.5, 770-774 (1983).
- [13] M. Ohya, Information dynamics and its applications to optical communication processes, *Lecture Note in Physics*, 378, 81-92 (1991).
- [14] M. Ohya and D. Petz, *Quantm Entropy and Its Use*, Springer-Verlag(TMP) (1993).
- [15] M. Ohya, Complexity and fractal dimensions for quantum states, *Open Systems and Information Dynamics*, 4, 141-157 (1997).
- [16] M. Ohya, Complexities and their applications to characterization of chaos, *International Journal of Theoretical Physics*, 37, No.1, 495-505 (1998).
- [17] M. Toda, Crisis in chaotic scattering of a highly excited van der Waals complex, *Physical Review Letters*, 74, No.14, 2670-2673 (1995).