

Algebraic independence by Mahler's method and power sums

日大文理 西岡 久美子 (Kumiko Nishioka)

巾級数が代数的数で与える値の代数的独立性を証明する際に
巾和の下からの評価を使う場合がいくつかある。これらを整
理し、どのように使われるかを簡単な場合を例にとって明ら
かにしたい。

§ Gap series.

次の様な巾級数を考える。

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}.$$

指数 $k!$ が非常に速く無限大に発散するので gap series と

呼ばれる。 α_1, α_2 ($0 < |\alpha_1|, |\alpha_2| < 1$) に対して、 α_1/α_2 が
1 の巾根である時、 k が十分大きければ $\alpha_1^{k!} = \alpha_2^{k!}$ となる。

従って $f(\alpha_1), f(\alpha_2)$ は代数的従属である。そこで $\alpha_1, \dots, \alpha_n$
 $\in \overline{\mathbb{Q}}$ ($0 < |\alpha_i| < 1$) がこのような関係にないとき、つまり
 $i \neq j$ に対して α_i/α_j が 1 の巾根でない時、 $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$
が代数的独立であることを証明しよう。背理法で証明する。

$f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ が代数的従属と仮定すると 0 でない多項式 $F \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ で

$$F(f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)) = 0$$

となるものが存在する. F はこのようなものの内 total degree が最小であるとする. $\frac{\partial F}{\partial X_i} = 0$ なら X_i が F の中に現れないということから, その場合には α_i を除く事により, すべての i に対して $\frac{\partial F}{\partial X_i} \neq 0$ と仮定してよい. また $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \dots \geq |\alpha_n|$ としてよい. すると $\frac{\partial F}{\partial X_i}$ の total degree は F の total degree より小さいから

$$\frac{\partial F}{\partial X_i}(f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)) \neq 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

である.

$$U = (f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n))$$

$$U_m = \left(\sum_{k=1}^{m-1} \alpha_1^{k!}, \dots, \sum_{k=1}^{m-1} \alpha_n^{k!} \right)$$

とおく. $\lim_{m \rightarrow \infty} U_m = U$ である. テーラー展開により,

$$(1) \quad -F(U_m) = F(U) - F(U_m)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i}(U_m) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_i^{k!} \right)$$

$$+ \sum_{\substack{J=(j_1, \dots, j_n) \\ |J| = j_1 + \dots + j_n \geq 2}} \frac{1}{J!} \frac{\partial^{|J|} F}{\partial X^J}(U_m) (U - U_m)^J$$

$$|J| = j_1 + \dots + j_n \geq 2$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i}(U_m) \alpha_i^{m!} + O((|\alpha_i|^2)^{m!})$$

となる。 K は $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を含む代数体とし、 K 上の素点全体の集合を S_K と表す。 $\alpha \in K$ に対して、

$$h_K(\alpha) = h(\alpha) = \prod_{v \in S_K} \max(|\alpha|_v, 1)$$

と定義する。 ここで $|\cdot|_v$ は積公式が成り立つように正規化されているとする。

基本不等式 $\alpha \in K^\times$ と $v \in S_K$ に対して、

$$-\log h(\alpha) \leq \log |\alpha|_v$$

が成り立つ。

我々は $\sqrt{-1} \in K$ とし、 $|\cdot|_v = |\cdot|^2$ ($|\cdot|$ は通常の絶対値) としてこの不等式を使う。 $h(\cdot)$ は次の性質をもつ。

$\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ に対して

$$(i) \quad h(\alpha) = 1 \iff \alpha \text{ は } 1 \text{ の } n \text{ 乗根または } 0,$$

$$(ii) \quad h(\alpha) = h(\alpha^{-1}), \quad h(\alpha^m) = h(\alpha)^m \quad (m \in \mathbb{Z}),$$

$$(iii) \quad h(\alpha_1 + \dots + \alpha_m) \leq m^{[K:\mathbb{Q}]} h(\alpha_1) \dots h(\alpha_m)$$

$$h(\alpha_1 \dots \alpha_m) \leq h(\alpha_1) \dots h(\alpha_m).$$

これらを使って

$$h(F(U_m)) \leq c_1^{(m-1)!}$$

となることがわかる。以下で $c_1, c_2, \dots$ は m により正定数を表す。一方 (i) より

$$F(U_m) = O(|\alpha_1|^{m!})$$

であるから、基本不等式より十分大きなすべての m に対して $F(U_m) = 0$ でなければならぬ事がわかる。再び (1) より、

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(U_m) \alpha_i^{m!} = O((|\alpha_1|^2)^{m!})$$

である。ここで次の形の中和の下からの評価を使う。

補題 (Nishioka [4], [5]). $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K^\times$ とし、 $i \neq 1$ なら α_i/α_1 は 1 の中根でないとする。 Ω は自然数からなる無限集合とする。 $k \in \Omega$ に対して、 $A_1(k), \dots, A_n(k) \in K$ は次の性質を持つとする。

$$(i) \quad A_1(k) \neq 0 \quad (k \in \Omega),$$

$$(ii) \quad \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ k \in \Omega}} \log k(A_i(k))/k = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

このとき、 $0 < \theta < 1$ とすると、十分大きなすべての $k \in \Omega$ に対して

$$\left| \sum_{i=1}^n A_i(k) \alpha_i^k \right| > |\alpha_1|^k \theta^k$$

が成り立つ。

この補題は S -unit equation に関する Evertse の定理 ([2], [3]) より証明される。

補題より

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i}(U_m) \alpha_i^{m!} \right| > |\alpha_1|^{m!} \theta^{m!}$$

が十分大きなすべての m に対して成り立つ。 $|\alpha_1| \theta > |\alpha_1|^2$ となるように $\theta (< 1)$ をとれば、これは (2) に矛盾する。従って次の定理が証明された。

定理 A (Nishioka [9], [13], [14]). $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$ とする。 $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha_i| < 1$ ($1 \leq i \leq n$) とする。
 $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ が代数的独立であるための必要十分条件は任意の α_i / α_j ($i \neq j$) が 1 の中根でないことである。

もう少し精密な議論をすることにより次の定理が得られる。

定理 B. $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{k!+k}$ とする。 $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha_i| < 1$ ($1 \leq i \leq n$) とする。 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が相異なるれば、
 $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ は代数的独立である。

上の2つの関数は単位円を自然境界に持つ中級数であるが、次に整関数となる中級数について考えよう。

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a^{k!} z^k \quad (a \in \overline{\mathbb{Q}}, 0 < |a| < 1)$$

とおく。 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ とし、 $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ の代数

的独立性を考えよう。 $f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n)$ は代数的従属とする。

$$U = (f(\alpha_1), \dots, f(\alpha_n))$$

$$U_m = \left(\sum_{k=1}^{m-1} a^k \alpha_1^k, \dots, \sum_{k=1}^{m-1} a^k \alpha_n^k \right)$$

とおき、 $F \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$ と前と同様にとる。テーラー展開により、

$$F(U_m) = F(U_m) - F(U)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i}(U) \left(\sum_{k=m}^{\infty} a^k \alpha_i^k \right) + O((|a|^2)^{m!} c_3^m)$$

$$= -a^{m!} \sum_{i=1}^m \frac{\partial F}{\partial X_i}(U) \alpha_i^m + O((|a|^2)^{m!} c_3^m)$$

となる。前と同様に基本不等式を使う事により、十分大きなすべての m に対して $F(U_m) = 0$ となることがわかる。従って、

$$(3) \quad \sum_{i=0}^m \frac{\partial F}{\partial X_i}(U) \alpha_i^m = O(|a|^{m!} c_3^m)$$

である。

定理 (Turán [17]). $b_1, \dots, b_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}^*$, $\alpha_i \neq \alpha_j$ ($i \neq j$) とする。任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して次が成り立つ。

$$\max_{1 \leq y \leq n} \frac{\left| \sum_{i=1}^n b_i \alpha_i^{m+y} \right|}{\sum_{i=1}^n |b_i| |\alpha_i|^{m+y}} \geq c_4 > 0.$$

この定理から、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が相異なれば、

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial X_i}(U) \alpha_i^m \right| \geq c_5 |\alpha_1|^m$$

が無限に多くの $m \in \mathbb{N}$ に対して成り立つことがわかる。これは (3) に矛盾する。よって次の定理が証明された。

定理 C (Nishioka [11]). $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a^{k'} z^k$ ($a \in \overline{\mathbb{Q}}^*$, $0 < |a| < 1$) とする。このとき

$$f(\alpha) \quad (\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^*)$$

は代数的独立である。

§ Mahler の方法。

$r \in 2$ 以上の整数とし、

$$f_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{rk}$$

とおくと、次の関数方程式をみたす。

$$f_r(z^r) = f_r(z) - z.$$

Mahler の定理 ([5]) より、 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$ なら

$f_r(\alpha)$ は超越数であることがわかる。代数的独立性については次の定理が成り立つ。

定理. $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{Q}}, 0 < |\alpha_i| < 1$ とする. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が乗法的独立なるとき $\text{fr}(\alpha_1), \dots, \text{fr}(\alpha_n)$ は代数的独立である。

(ここで $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が乗法的独立とは、 $\alpha_1^{i_1} \dots \alpha_n^{i_n} = 1$ が成り立つのは $i_1 = \dots = i_n = 0$ であるときに限ることである。)

より精密な結果が Loxton and van der Poorten [4] で証明されている。この定理を証明するために次の定理を必要とする。

定理 (Mahler [6]). $\alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}}, 0 < |\alpha_i| < 1 (1 \leq i \leq n)$ とし、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は乗法的独立とする。 $g(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ に対し、

$$g(\alpha_1^{r^k}, \dots, \alpha_n^{r^k}) = 0$$

が十分大きなすべての k に対して成り立つとき $g(z_1, \dots, z_n) = 0$ でなければならぬ。

この定理を一般化したものが Masser [8] により証明されている。ここでは Masser のアイデアに沿って証明をスケッチする。 $g(z_1, \dots, z_n) \neq 0$ とし、

$$g(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} c_{i_1, \dots, i_n} z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$$

とおく。

$$A = \max \{ |\alpha_1|^{i_1} \cdots |\alpha_n|^{i_n} \mid c_{i_1 \cdots i_n} \neq 0 \}$$

$$T = \{ (i_1, \dots, i_n) \mid |\alpha_1|^{i_1} \cdots |\alpha_n|^{i_n} = A \}$$

とおく。すると T は有限集合で k が十分大きいとき、

$$\begin{aligned} 0 &= g(\alpha_1^{r^k}, \dots, \alpha_n^{r^k}) \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in T} c_{i_1 \cdots i_n} (\alpha_1^{i_1} \cdots \alpha_n^{i_n})^{r^k} + O(B^{r^k}) \end{aligned}$$

$$(0 < B < A < 1)$$

とかけろ。 $\beta_i = \alpha_i / |\alpha_i|$ とおくと、

$$(4) \quad \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in T} c_{i_1 \cdots i_n} (\beta_1^{i_1} \cdots \beta_n^{i_n})^{r^k} = O(\theta^{r^k})$$

($0 < \theta < 1$)

である。自然数 $b_1, \dots, b_s$ と多項式 $B_1(z), \dots, B_s(z) \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$, 単項式 $U_1(z), \dots, U_t(z), V_1(z), \dots, V_t(z)$ で次の性質を持つものがある。

$$(i) \quad |U_j(z)| = |V_j(z)| \quad (1 \leq j \leq t)$$

$$(ii) \quad 0 \neq \prod_{j=1}^t (U_j(z) - V_j(z))$$

$$= \sum_{i=1}^s B_i(z) \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in T} c_{i_1 \cdots i_n} (z_1^{i_1} \cdots z_n^{i_n})^{b_i}$$

(ii) と (4) より

$$\prod_{j=1}^t |U_j(\beta_1^{r^k}, \dots, \beta_n^{r^k}) - V_j(\beta_1^{r^k}, \dots, \beta_n^{r^k})| = O(\theta^{r^k})$$

であるから、ある j ($1 \leq j \leq t$) に対して、

$$|U_j(\beta_1^{r^k}, \dots, \beta_n^{r^k}) - V_j(\beta_1^{r^k}, \dots, \beta_n^{r^k})| = O(\theta^{\frac{r^k}{t}})$$

となる k が無限に存在する。このとき、

$$(5) \quad \left| \frac{U_j}{V_j}(\beta_1^{r^k}, \dots, \beta_n^{r^k}) - 1 \right| = O(\theta^{\frac{r^k}{t}})$$

である。Baker の定理 ([1]) と (i) より、

$$\begin{aligned} \left| \frac{U_j}{V_j}(\beta_1^{r^k}, \dots, \beta_n^{r^k}) - 1 \right| \\ = \left| \frac{U_j}{V_j}(\alpha_1^{r^k}, \dots, \alpha_n^{r^k}) - 1 \right| \geq (r^k)^{-C_0} \end{aligned}$$

が成り立つ。これは (5) に反する。定理が証明された。

次に $f_r(\alpha)$ ($r \geq 2$) の代数的独立性を考える。関数 $f_r(z)$, $f_{r^2}(z)$, $\dots$, $f_{r^n}(z)$ は変換 $z \rightarrow z^{r^{n!}}$ の下に関数方程式

$$f_{r^j}(z^{r^{n!}}) = f_{r^j}(z) - z - z^{r^j} - \dots - z^{r^{n!-j}} \quad (1 \leq j \leq n)$$

をみたし、(12) は代数的独立であることがわかる。Mahler の定理 ([7]) より、 $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$ なる、 $f_r(\alpha)$, $\dots$, $f_{r^n}(\alpha)$ は代数的独立であることがわかる。

$$N - \{1\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{r_i, r_i^2, \dots\},$$

$$\log r_i / \log r_j \notin \mathbb{Q} \quad (i \neq j),$$

となるように r_i を選ぶことができる。 $f_{r_1}, \dots, f_{r_n}$ は
1つの変換 $z \rightarrow z^d$ に対して同時に関数方程式をみたす事は
ないので、Mahlerの定理を直接使う事はできない。しかし、
次の定理が証明される。

定理 D (Nishioka [16]). $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$ なら

$$f_r(\alpha) \quad (r \geq 2)$$

は代数的独立である。

(Loxton and van der Poorten [4] に上の定理が述べら
れているが証明には誤りがある。)

系. 関数 $f_r(z)$ ($r \geq 2$) は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立であ
る。

この定理の証明のためには次の定理が本質的である。

定理 E. $e_i(k) = [k(\log r_i / \log r_i)]$ とおく。

$0 < |\alpha| < 1$ で $g(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}[[z_1, \dots, z_n]]$ とする。
十分大きなすべての k に対して $g(\alpha^{r_1^{e_1(k)}}, \dots, \alpha^{r_n^{e_n(k)}})$
 $= 0$ なら $g(z_1, \dots, z_n) = 0$ でなければならぬ。

証明のスケッチ. $g(z_1, \dots, z_n) \neq 0$ とし.

$$g(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} c_{i_1, \dots, i_n} z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$$

とおく. $(i_1, \dots, i_n) \neq (j_1, \dots, j_n)$ なる Evertse の定理より

$$|(i_1 - j_1)r_1^{e_1(k)} + \dots + (i_n - j_n)r_n^{e_n(k)}| \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty)$$

である. 自然数列 $\{k_l\}_{l \geq 0}$ を選んで

$$\left| \frac{\alpha^{i_1 r_1^{e_1(k_l)} + \dots + i_n r_n^{e_n(k_l)}}}{\alpha^{j_1 r_1^{e_1(k_l)} + \dots + j_n r_n^{e_n(k_l)}}} \right| \rightarrow 0 \text{ または } \infty \quad (l \rightarrow \infty)$$

とすることができ. これより定理が証明される.

定理 E は一般化されるが. そのためには次の補題を必要とする. この補題はやはり Evertse の定理を使って証明され. ちがったタイプの Gap series の値の代数的独立性の証明に応用され得ると思う.

補題 ([16]). $p_1, \dots, p_n \in K^\times$ は 1 の巾根でないとする. $\{e_i(k)\}_{k=1}^\infty$ ($1 \leq i \leq n$) は無限大に発散する自然数列で. $i \neq 1$ なら $\lim_{k \rightarrow \infty} e_1(k)/e_i(k) = \eta_i \notin \mathbb{Q}$ とする. $k \geq 1$ に対して $A_1(k), \dots, A_n(k) \in K$ は次の性質を持つとする.

(i) $A_i(k) \neq 0$ ($k \geq 1$),

(ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \log_k(A_i(k)/e_i(k)) = 0$ ($1 \leq i \leq n$).

このとき $0 < \theta < 1$ とすると. 十分大きなすべての k に

対して.

$$\left| \sum_{i=1}^n A_i(k) f_i^{e_i(k)} \right| > |f_1|^{e_1(k)} \theta^{e_1(k)}$$

が成り立つ.

参考文献

- [1] Baker, A.: Transcendental Number Theory, Cambridge UP, 1975.
- [2] Evertse, J.H.: On sums of S-units and linear recurrences, *Comp. Math.* 53(1984), 225-244.
- [3] Evertse, J.H., Györy, K., Stewart, C.L. and Tijdeman, R.: S-unit equations and their applications, *New Advances in Transcendence Theory*, ed. by A. Baker, Cambridge UP (1988), 110-174.
- [4] Loxton, J.H. and van der Poorten, A.J.: Algebraic independence properties of the Fredholm series, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 26(1978), 31-45.
- [5] Mahler, K.: Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, *Math. Ann.* 101(1929), 342-366.
- [6] Mahler, K.: Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen inspeziellen Punktfolgen, *Math. Ann.* 103(1930), 573-587.
- [7] Mahler, K.: Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendenter Funktionen, *Math. Z.* 32(1930), 545-585.
- [8] Masser, D.W.: A vanishing theorem for power series, *Invent. math.* 67(1982), 275-296.
- [9] Nishioka, K.: Proof of Masser's conjecture on the algebraic independence of values of Liouville series, *Proc. Japan Academy* 62(Ser.A) (1986), 219-222.
- [11] Nishioka, K.: Algebraic independence of certain power series of algebraic numbers, *J. Number Theory* 23(1986), 353-364.

- [12] Nishioka, K.: Algebraic independence of three Liouville series, Arch. Math. 47(1986), 117-120.
- [13] Nishioka, K.: Conditions for algebraic independence of certain power series of algebraic numbers, Comp. Math. 62(1987), 53-61.
- [14] Nishioka, K.: Algebraic independence of certain power series, Seminaire de Theorie des Nombres de Paris (1987/1988), 201-212.
- [15] Nishioka, K.: Evertse theorem in Algebraic independence, Arch. Math. 53(1989), 159-170.
- [16] Nishioka, K.: Algebraic independence by Mahler's method and S-unit equations, to appear in Comp. Math.
- [17] Turán, P.: On a New Method of Analysis and its Applications, John Wiley & Sons, 1984.