

Potts type とは Cyclic type の行列から

作られる Four-weight spin model について

坂内 悦子 (Etsuko Bannai)

澤野 光弘 (Mitsuhito Sawano)

Spin model とは knot や link の invariant を定義するもので V.F.R. Jones によって示されたものである。この Jones によって定義された Spin model は二つの対称行列を用いて表される。その後, Spin model は川越-宗政-綿谷によって非対称行列を用いたものに拡張され, 更に坂内-坂内によって4つの行列を用いた 4-weight Spin model に拡張されました。

この Spin model を分類する上での一つの指標として後で紹介する F. Jaeger の gauge 同値というものがあります。今回の話はある条件をつけた 4-weight Spin model を gauge 同値を用いて分類しようというもの。まずは必要となる定義や定理を紹介する。

Definition 4-weight Spin model (坂内-坂内)

Four weight spin model on a finite non-empty set X is a 5-tuple (W_1, W_2, W_3, W_4, D) , where $D^2 = |X|$

and W_1, W_2, W_3, W_4 are in $M_C(X)$ satisfy the following equations for all $a, b, c \in X$,

$$1) \sum_{x \in X} W_1(a, x) W_3(x, b) = \sum_{x \in X} W_2(a, x) W_4(x, b) = |X| \delta_{a, b}$$

$$2) W_1(a, b) W_3(b, a) = W_2(a, b) W_4(b, a) = 1$$

$$3)-a \sum_{x \in X} W_2(a, x) W_2(b, x) W_4(x, c) = D W_1(b, a) W_3(a, c) W_3(c, b)$$

$$3)-b \sum_{x \in X} W_2(x, a) W_2(x, b) W_4(c, x) = D W_1(a, b) W_3(b, c) W_3(c, a)$$

3) の式は star-triangle relation と呼ばれる。この 3) 式より、

次の式を満たすような 0 でない複素数 μ が導かれる。

$$4) W_3(a, a) = \mu^{-1} \sum_{x \in X} W_2(a, x) = \sum_{x \in X} W_2(x, a) = D \mu^{-1}$$

$$5) W_1(a, a) = \mu^{-1} \sum_{x \in X} W_4(a, x) = \sum_{x \in X} W_4(x, a) = D \mu$$

この $\mu \in \text{spin model の modulus と呼ばれる。}$

Definition

Let $|X| = n$. A matrix W in $M_C(n)$ with non-zero entries is called a type II matrix if W satisfies the following

condition for $x, y \in X$

$$\sum_{z \in X} \frac{W(x, z)}{W(y, z)} = n \delta_{x, y}$$

上の定義は 4-weight spin model の定義の 1) 式に相当する。

ので, W を type II matrix と呼びます。また W が type II matrix であれば, 任意の Permutation matrix P, P' , 正則な対角行列 Δ, Δ' に対し $P\Delta W\Delta'P'$ も type II matrix となることは容易にわかります。そこで二つの type II matrix W と W' がある時, 次の様な同値を定義します。

$$W \sim W' \iff \exists P, P', \Delta, \Delta' \text{ s.t. } W' = P\Delta W\Delta'P'$$

この時, この定義は同値関係を満たしています。type II matrix の例として, 今回扱う2種類の type II matrix を紹介します。

Examples 1. (Type II matrixes)

(i) $W \in M_{\mathbb{C}}(X)$ defined by

$$W(x, y) = \begin{cases} \alpha & (x=y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}, \text{ where } \alpha + \alpha^{-1} + (n-2) = 0$$

(ii) $W \in M_{\mathbb{C}}(X)$ defined by

$$W(x, y) = \zeta^{(x-y)^2}, \text{ where } \zeta^2 \text{ is a primitive } n\text{-th root of unity.}$$

注) (i) において $\alpha + \alpha^{-1} + (n-2) = 0$ の二解による二つの行列は, $n < 5$ のとき α は type II 同値とはならない。(ii) においては原始 n 乗根のとり方によらず type II 同値である。

次に知られている 4-weight spin model の例として今回扱う

二つの spin model を紹介しよう。

Examples 2. (4-weight spin models of size $|X|=n$)

(i) Cyclic model.

$$W_1(x, y) = \eta^{(x-y)^2}, \quad W_2 = \frac{D}{\sum_{x \in X} \eta^{x^2}} W_1,$$

, where η^2 is the primitive n -th root of unity.

(ii) Potts model

$$W_1(x, y) = \begin{cases} \alpha & (x=y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}, \quad W_2 = \frac{D}{\alpha-1} W_1,$$

, where $\alpha + \alpha^{-1} + (n-2) = 0$

Example 1 で与えた二つの type II matrix はその自身 4-weight spin model となることがわかりました。そこで今後, Example の両行列を Potts type (i) の行列を Cyclic type と呼ぶことにします。次に紹介するのは gauge 変換と呼ばれるもので F. Jaeger によっても示されています。

Theorem (Odd gauge transformation)

Let (W_1, W_2, W_3, W_4, D) be a 4-weight spin model.

Then $(W'_1, W_2, W'_3, W_4, D)$ is a four-weight spin model if and only if there exists an invertible diagonal matrix Δ in $M_c(X)$ satisfying $W'_1 = \Delta W_1 \Delta^{-1}$, $W'_3 = \Delta W_3 \Delta^{-1}$.

Moreover if $(W'_1, W_2, W'_3, W_4, D)$ a four-weight spin model

then the associated link invariant is the same as the one associated to (W_1, W_2, W_3, W_4, D) .

Theorem (Even gauge transformation)

Let (W_1, W_2, W_3, W_4, D) be a four-weight spin model.

Then $(W_1, W_2', W_3, W_4', D)$ is a four-weight spin model if and only if there exists a permutation matrix $P \in M_c(X)$ satisfying the following conditions.

- i) $W_2^{-1}PW_2$ is also a permutation matrix.
- ii) $W_2' = PW_2$, $W_4' = W_4^t P$.

Moreover if $(W_1, W_2', W_3, W_4', D)$ is a four-weight spin model then the associated link invariant is the same as the one associated to (W_1, W_2, W_3, W_4, D) .

上の二つの定理より容易に次の定理を得ることが出来る。

Theorem (Jaeger)

Let (W_1, W_2, W_3, W_4, D) be a four-weight spin model.

Let P be a permutation matrix in $M_c(X)$ such that

$W_2^{-1}PW_2$ is also a permutation matrix, Δ be an invertible diagonal matrix in $M_c(X)$ and λ be a non-zero

complex number. Then $(\lambda \Delta W_1 \Delta^{-1}, \lambda^{-1} P W_2, \lambda^{-1} \Delta W_3 \Delta^{-1}, \lambda W_4 {}^t P, D)$ is also a four-weight spin model which gives the same associated link invariant as the one associated to (W_1, W_2, W_3, W_4, D) .

ある Spin model ε 一つを与えた時, gauge 変換によ, ε が得られる Spin model は同じ link invariant ε を持つことがわかります。そこで, gauge 同値を次の様に定義します。

Definition

$(W'_1, W'_2, W'_3, W'_4, D)$ is gauge equivalent to (W_1, W_2, W_3, W_4, D) when $(W'_1, W'_2, W'_3, W'_4, D)$ is expressed as $(\Delta W_1 \Delta^{-1}, \lambda^{-1} P W_2, \lambda^{-1} \Delta W_3 \Delta^{-1}, \lambda W_4 {}^t P, D)$, with some invertible diagonal matrix Δ , permutation matrix P and scalar $\lambda (\neq 0)$.

Type II 同値と gauge 同値という二つの同値を紹介したのであるが, この二つの同値の関係がどの様になるかという疑問がわきます。そこで今回考えたのは, 先に紹介した二つの type II matrix, Cyclic type と Potts type のいずれかを持つ type II matrix を持つような Spin model の場合についてです。その

結果は次の様になりました。

Theorem (Potts type)

Let (W_1, W_2, W_3, W_4, D) be a four-weight spin model.

If there exists $1 \leq i \leq 4$ such that W_i is equivalent to potts type II matrix then (W_1, W_2, W_3, W_4, D) is gauge equivalent to a potts model.

Theorem (Cyclic type)

Let (W_1, W_2, W_3, W_4, D) be a four-weight spin model.

If there exists $1 \leq i \leq 4$ such that W_i is equivalent to cyclic type II matrix then (W_1, W_2, W_3, W_4, D) is gauge equivalent to a cyclic model.

4-weight spin model は実際に ⁵¹³link invariant によつて分類
 するということも重要であり、size が 4 までの場合について
 は、既に Guo-Huang によつて分けていける。この分類を
 次に紹介する。

i) $n=2$

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \frac{D(1-i)}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

ii) $n=3$

$$W_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}, \quad W_2 = \frac{D}{\alpha-1} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

, where $\alpha + \alpha^{-1} + 1 = 0$ iii) $n=4$

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & -b \\ 1 & 1 & -b & b \\ b & -b & 1 & 1 \\ -b & b & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \frac{D}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & b^{-1} & -b^{-1} \\ 1 & 1 & -b^{-1} & b^{-1} \\ b^{-1} & -b^{-1} & 1 & 1 \\ -b^{-1} & b^{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

注) ii) において $\alpha + \alpha^{-1} + 1 = 0$ の2つの解による Spin model は互いに gauge 同値となります。

$n=4$ の時、0でない全ての b に対し 4-weight spin model となりますが、 b と b' の二つの値を持つとき、 b と b' の絶対値が等しくなければ二つの Spin model は gauge 同値とはなりません。

この分類は Guo-Huang によるものを gauge 同値を用いて書き直したものである。

Size が 5 の 4-weight spin model の分類は、先に示した定理と野村による Size 5 の Type II matrix の分類を用いると容易に行うことができます。まずは Size 5 の Type II matrix の分類を紹介する。

Theorem (Type II matrix of Size 5) (野村)

Every type II matrix of size five is equivalent to either potts type or cyclic type in Example 1.

注) Example 1 において原始5乗根のとり方によらず cyclic type は1つの同値類となる,

potts type については $\lambda + \lambda^{-1} + 3 = 0$ の2解による行列は type II 同値ではない。

上の Size が5の type II matrix の分類と前の定理を用いる事によつて, Size が5の 4-weight Spin model は次の様に分類できる。

Theorem

Every four-weight spin models of size five is gauge equivalent to one of the following four-weight spin models.

i) Cyclic model

$$(W, \pm W, D^2 W^{-1}, \pm D^2 W^{-1}, D)$$

W is the matrix of i) in Example 2.

ii) Potts model

$$(W, \frac{D}{\alpha-1} W, D^2 W^{-1}, D(\alpha-1) W^{-1}, D)$$

W is the matrix of ii) in Example 2.

References

1. V.F.R. Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 137(1989) 2, 311-334.
2. K. Kawagoe, A. Munemasa and Y. Watatani, Generalized spin models, *Journal of Knot Theory and its Ramifications* 3(1994) 465-476
3. E. Bannai and E. Bannai, Generalized generalized spin models (four-weight spin models), *Pacific Journal of Mathematics* Vol. 170 (1995) 1-16
4. F. Jaeger, On four-weight spin models and their gauge transformation, preprint.
5. K. Nomura, Type II matrices of size five, to appear in *Graphs and Combinatorics*.
6. H. Guo, On four-weight spin models, PhD Thesis, Kyushu University.
7. H. Gao and T. Huang, Some classes of four-weight spin models, preprint.