

A remark on Glauberman-Watanabe corresponding blocks with a normal defect group

田阪 文規 千葉大学 自然科学研究科

e-mail ftsaka@g.math.s.chiba-u.ac.jp

有限群 G へ、 G の位数と素な可解群 S が作用している時、 G の S -不変な既約指標と、 G の S による中心可群 (G^S と書く) の既約指標の間には、ある 1 対 1 対応 (Glauberman 対応) が存在することが知られていたが、[18]において、 S により centralise される defect group を持つという仮定のもとでは、その背後に、Brauer category が同値な (p -)block の 1 対 1 対応 (Watanabe 対応) が存在する、ということが示された。実際、[18]において、Glauberman 対応により、Watanabe 対応する blocks の間に、isotypy が引き起こされることが示されているが、その後、この指標レベルの現象を環論的に説明するものとして、blocks が normal defect group を持つ場合には、対応する blocks は、(Glauberman 対応を引き起こす [5]、trivial module を source として持つ bimodule により splended [9][5]) Morita 同値 [10]、であることが示されている。(p -可解群の場合は [7][6] を参照。)

ここでは、Watanabe 対応する blocks が normal defect group をもつとき、Glauberman 対応を引き起こす、Morita 同値を与える bimodule が、block algebra を bimodule としてみて、片側 restriction、または、片側 induction して得られる bimodule の直既約因子として得られる、ということに注意する。(Glauberman 対応に関する基本的事実については [8] を、Puig の理論については、[17] を参照。)

以下、 p を素数、 $(\mathcal{O}, K, k)$ を p -modular system で、完備離散付値環と、以下で考える群に対して分裂体となる標数 0 の商体と、標数 p の代数閉体となる剰余体からなるものとする。

定理 1 (Glauberman[4]). 任意の組 (G, S) (ここで、 G は有限群、 S は G と位数が素な可解群で G の自己同型群の部分群であるもの) に対し、次の条件を満たす全単射 $\pi(G, S): \text{Irr}(G)^S \rightarrow \text{Irr}(G^S)$ が存在する。

- (1) T を S の正規部分群とすると、 $\pi(G, T)$ は、 $\text{Irr}(G)^S$ と $\text{Irr}(G^T)^S$ の間の全単射を与え、 $\pi(G, S) = \pi(G^T, S/T) \circ \pi(G, T)$ を満たす。
- (2) S が、ある素数 q に対する q -群のとき、 $\pi(G, S)(\chi)$ は、 χ の G^S への restriction に現れる重複度が q と素な唯一の既約指標 (実際、 q を法として ± 1 。)。ここで、 χ は G の S -不変な既約指標。

定理 1 の対応を既約指標の Glauberman 対応という。

定理 2 (Watanabe[18]). G の S -不変な block b が、 G^S に含まれる defect group P を持つとすると、次が成り立つ。

- (1) b に属する G の既約指標は全て、 S -不変。
- (2) 次の条件を満たす G^S の block $w(b)$ が一意に定まる。: Glauberman 対応は、 b に属する既約指標と $w(b)$ に属する既約指標の間の全単射。
- (3) block $w(b)$ は P を defect group として持ち、 b と $w(b)$ の Brauer category は同値。
- (4) blocks b と $w(b)$ の間に perfect isometry (実際、より強く、isotypy) が存在する。

定理 2 (2) の対応を block の (Glauberman-) Watanabe 対応という。以下、 G の p -部分群 P は、 S により centralise される (「Watanabe's situation」) とする。また、有限群 G に、位数 q (G の位数と素なある素数) の巡回群 S が作用しているとして、statement を記す。(定理 1 (1) より、始めの設定は、この設定に還元される。)

block algebra $\mathcal{O}Gb$ は、primitive interior G -algebra で、その defect multiplicity module V ($\overline{G} := N_G(P_\gamma)/P$ 上の k 係数の twisted group algebra。ここで、 P_γ は b の defect pointed group。) を $\overline{G}^S$ 上の twisted group algebra へ restriction すると、重複度が q と素な直既約因子 (V' とする) が唯一つ存在する (重複度は q を法として ± 1) ことがいえる。実際、 V は、simple projective なので、 $\mathcal{O}$ 上の module に lift でき、 K 係数の $\overline{G}$ 上の twisted group algebra 上の defect 0 の character が対応するが、それを $\overline{G}^S$ 上の twisted group algebra に restriction すると、重複度が q と素 (q を法として ± 1) なものが唯一つ現れ、それは、defect 0 の character であることが分かる。(適当な covering group を考え、Glauberman 対応を考える (cf.[6])。または、[3]。defect に関することは [2] を参照。) また、 V (projective module) の G^S への restriction の V' 以外の直既約因子達の和 (W とする) に対応する K 上の character の、各因子の重複度は q の倍数だが、 k 上の twisted group algebra (k は代数閉体) の Cartan 行列の行列式は p べきであることと、 q と p が素であることより、 W の各直既約因子の重複度も q で割り切れることが従う。ここで、 V' と Puig 対応する $\mathcal{O}Gb$ の pointed group を G_β^S とおき、 β に属するべき等元 f に対し、 $f\mathcal{O}Gb f$ と同

型な primitive interior G^S -algebra を $(OGb)_\beta$ 、 $fOGb$ と同型な (直既約) $\mathcal{O}[G^S \times G]$ -module を M とおく。

上の記号のもと、次のことを示すことができる。

定理 3. G の S -不変な block b が、 S により centralise される、normal な defect group P を持つとき、 $(OGb)_\beta$ と $OG^S w(b)$ は、primitive interior G^S -algebra として同型。

特に、

- (1) b と $w(b)$ は、同型な source algebra を持つ。すなわち、 b と $w(b)$ は、splendid Morita 同値 [9][5]。
- (2) M は b と $w(b)$ の間の Morita 同値を与える。また、 OGb -module の category から、 OG^S -module の category への restriction functor は、直既約因子に M が重複度 $qn \pm 1$ で現れ (n はある整数)、その他の直既約因子達の重複度が q の倍数であるような $\mathcal{O}[G^S \times G]$ -module を OG 上 tensor する functor と同型。よって、Glauberman 対応を引き起こす、Morita 同値を与える bimodule が存在する [5]。

次は、Green 対応より、normal defect の場合に還元でき、その場合、 M は Morita 同値を引き起こす bimodule となることを利用する。すなわち、 OGb の $\mathcal{O}[G \times 1]$ -module としての、また、 M の $\mathcal{O}[G^S \times 1]$ -module としての自己準同型環は、primitive interior G -algebra として OGb と同型 (Puig による Morita の定理の言い替え ([15]Prop.6.5)) なので、 OGb の $\mathcal{O}[G \times G^S]$ -module としての、また、 M の $\mathcal{O}[G^S \times G^S]$ -module としての構造は、 OGb の G^S -不変な subalgebra における、 b の分解の様子、よって、Puig 対応より、 OGb の defect multiplicity module を、 $\overline{G}^S$ へ restriction したときの様子から分かる。また、 M の dual を $\mathcal{O}[G \times G]$ -module に、また、 $OG^S w(b)$ を $\mathcal{O}[G^S \times G]$ -module に induction した module の様子は、 $OG^S w(b)$ の defect multiplicity module を、 $\overline{G}$ へ induction した module の様子で分かる。(cf.[1])

系 4. b を G の S -不変な block で、 S により centralise される defect group を持つものとする。このとき、直既約 $\mathcal{O}[G \times G]$ -module OGb を $\mathcal{O}[G^S \times G^S]$ -加群に restriction すると、vertex ΔP を持つ直既約因子で重複度が q と素であるものが、唯一つ存在し (実際、重複度は、 q を法として 1)、それは、 $OG^S w(b)$ と同型。また、直既約 $\mathcal{O}[G^S \times G^S]$ -module $OG^S w(b)$ を $\mathcal{O}[G \times G]$ -加群に induction すると、vertex ΔP を持つ直既約因子で重複

度が q と素であるものが、唯一つ存在し（実際、重複度は、 q を法として 1）、それは、 OGb と同型。

注意 5. normal defect group を持つ block algebra は、 PE （ここで、 P は defect group, E は inertial quotient）上の twisted group algebra と Morita 同値なので ([11][13])、[10][5] では、Watanabe 対応している blocks の、対応する 2-cocycle を比べているが、ここでは、次のようにして source algebra の同型を得ている。すなわち、 $i = i'f = fi'$ （ここで、 i は b の、 i' は $w(b)$ のある source idempotent、 f は β のある元）が normal defect group をもつときは成り立つので、 f を両側からかけることにより、 $w(b)$ の source algebra $i'OG^Si'$ から、 b の source algebra $iOGi$ への interior P -algebra hom. を得るが、normal defect group を持つ block の source algebra は、[17]Th.44.3 のような $\mathcal{O}$ -basis をもつことから、これは同型になる。

注意 6. 定理 3 (2) の first と second statement より、 M が Glauberman 対応 (Brauer character でも) を引き起こすことは明らかだが、これは、Glauberman 対応の「sign」は block で共通であることは意味しているが、restriction で Glauberman 対応する character の重複度が M の重複度で出てくる、という主張ではない。

注意 7. [16][14]において、primitive interior G -algebra と、「 G -triple」(defect group と「source algebra」と「defect multiplicity module」からなる。)の「ある同値類」の間に、1 対 1 対応が存在することが示されている（微妙な論点が多いので [16][14] を参照して下さい。）が、定理 3 の上の statement は、 S により centralise される defect group を持つ、 S -不変な G の block algebra に対し、その「 G -triple」の第 3 項を「Glauberman 対応」させた、「 G^S -triple」(よって、対応する primitive interior G^S -algebra) を考えることができる、ということ。（他に、例えば、 S -不変な simple kG -module の自己準同型環からなる primitive interior G -algebra に対しても、同様のことを考えることができる。）これは、 G^S が defect group P の normalizer を含むときは、「primitive interior G -algebra の Green 対応」($N_G(P)$ を含む群 H に対し、「 G -triple」を「 H -triple」とみて (P の G における normalizer と H における normalizer は等しい) 対応を与えたもの [16]。加群の Green 対応は、(実質) Puig により、 G -algebra の pointed groups の対応に一般化されていて (直既約 module の自己準同型環の「Green 対応」は Green 対応の自己準同型環)、block algebra の「Green 対応」は、block algebra とは限らないが、加群の Green 対応が、Morita 型の stable 同値

を与えていて、simple module が simple module と対応しているときは、Brauer 対応する block algebras が、「Green 対応」していることは、よく知られている。)。この対応で、block algebra は、block algebra と対応するとは限らないが、normal defect group を持つということが、Watanabe 対応する block algebras が、この対応関係にあることの、一つの十分条件になっている、というのが、定理 3 の first statement。

付記；本稿の作成にあたり、特に、北海道教育大学の奥山哲郎先生にお世話になりました。深く、感謝します。

参考文献

- [1] L. Barker, Induction, restriction and G -algebras, Comm.algebra. **22** (1994), 6349–6383.
- [2] E. C. Dade, Counting characters in blocks II, J. Reine Angew. Math. **448** (1994), 97–190.
- [3] E. C. Dade, A new approach to Glauberman’s correspondence, J. Algebra **270** (2003), 583–628.
- [4] G. Glauberman, Correspondence of characters for relatively prime operator groups, Canad. J. Math. **20** (1968), 1465–1488.
- [5] M. E. Harris, Glauberman-Watanabe corresponding p -blocks of finite groups with normal defect groups are Morita equivalent, Trans. of the A. M. S. (2004)
- [6] M. E. Harris and M. Linckelmann, On the Glauberman and Watanabe correspondences for blocks of finite p -solvable groups, Trans. of the A. M. S. **354**(9)(2002), 3435–3453.
- [7] H. Horimoto, A note on the Glauberman correspondence of p -blocks of finite p -solvable groups, Hokkaido Math. J. **31** (2002), 255–259.
- [8] I. M. Isaacs, Character Theory of Finite Groups, Academic Press (1976).

- [9] S. Koshitani, A remark on Glauberman-Watanabe correspondence of p -blocks of finite groups, preprint (2002)
- [10] S.Koshitani and G.O.Michler, Glauberman correspondence of p -blocks of finite groups, J. Algebra **243** (2001),504–517.
- [11] B. Külshammer, Crossed products and blocks with normal defect groups, Comm.Algebra **13** (1985),147–168.
- [12] L. Puig, Pointed groups and construction of characters, Math. Z. **176**(1981),265–292.
- [13] L. Puig, Pointed groups and construction of modules, J. Alg. **116**(1988),7–129.
- [14] L. Puig, On Thévenaz' parametrization of interior G -algebras, Math. Z. **215**,321–335.
- [15] L. Puig, "On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences between Brauer Blocks", Birkhauser (1999).
- [16] Thévenaz, The parametrization of interior algebras, Math. z. **212** (1993), 411–454.
- [17] Thévenaz, " G -Algebras and Modular Representation Theory", Oxford University Press (1995).
- [18] A. Watanabe, The Glauberman character correspondence and perfect isometries for blocks of finite groups, J. algebra **216** (1999),548–565.