

Knizhnik - Zamolodchikov 微分方程式と Drinfeld associator

島田信夫 (Nobuo Shimada)

§0. 準備. Knizhnik - Zamolodchikov 微分方程式 (以下 KZ-微分方程式と略記する) は共形場の理論, 表現論, 量子群論等多方面への応用が知られ, それぞれの分野に重要な貢献と影響をもたらしている. ここでは, それらの一端に過ぎないが, 量子群への重要な寄与である Drinfeld associator の導入について述べてい. 本質的には Drinfeld 自身の論文 [D]₁, [D]₂ をはじめ, 多くの解説書 ([KW], [J], [J] 等) の内容以上のものではないが, 多少とも理解を補うような解釈と簡略化を試みたつもりである.

antun
Tegory

定義1.3.2.

尤も KZ-方程式の定義域である複素 n 次元多様体 Y_n, X_n から始めよう. Y_n は複素 n 次元空間 $\mathbb{C}^n$ の開集合

$$Y_n = \{ (z_1, \dots, z_n) \mid z_i \neq z_j \text{ for } i \neq j \} \subset \mathbb{C}^n$$

であり, configuration space = $\mathbb{R}^2$ 中の n 個の相異なる点の組の集合, と同一視される. Y_n には座標の置換として n 次対称群 S_n が作用し (例えば, 右作用 $(z_i) \cdot \sigma = (z_{\sigma(i)}) = (z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, \dots, z_{\sigma(n)})$) その作用によ

る商空間 $X_n = Y_n/S_n$ を複素 n 次元多様体である。 X_n の基本群 $\pi_1(X_n, *)$ は Artin の braid 群 (組紐群) B_n に同型であり、自然な完全系列

$$1 \rightarrow \pi_1(Y_n, *) = P_n \rightarrow \pi_1(X_n, *) = B_n \rightarrow S_n \rightarrow 1$$

はよく知られている。

V を $\mathbb{C}$ -ベクトル空間として、 Y_n 上の自明なバンドル $Y_n \times V^{\otimes n}$ を考える。ファイバー $V^{\otimes n} = V^{(1)} \otimes V^{(2)} \otimes \cdots \otimes V^{(n)}$ ($V^{(i)}$ は V のコピー) には S_n の元の左作用 $\sigma \cdot (v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$ があり、また $\text{End}(V^{\otimes n}) = \text{endomorphisms の全体}$ には、 S_n の元の左作用 $\sigma \cdot \varphi = \sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}$ (写像の合成) が定義される。

自明なベクトル・バンドル $Y_n \times V^{\otimes n}$ における S_n の作用を

$$(z_i) \cdot \sigma \times (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (z_i) \times \sigma \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$$

より同一視により定義すれば $X_n = Y_n/S_n$ 上のベクトル・バンドル $Y_n \times_{S_n} V^{\otimes n}$ (ファイバーは $V^{\otimes n}$) が導びかれる。

同様にして X_n 上のバンドル $Y_n \times_{S_n} \text{End } V^{\otimes n}$ も定義される。

さて n 次の KZ-方程式

$$(KZ_n) \quad dW(z_1, \dots, z_n) = \hbar \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{t_{ij}}{z_i - z_j} (dz_i - dz_j) \right) W, \quad \hbar = \frac{\hbar}{2\pi F}$$

は全微分方程式の形で与えられる。ここで $\hbar$ は定数のパラメータ、 t_{ij} は不定元であるが、場合により $t_{ij} \in V^{(i)} \otimes V^{(j)}$ (或いは $t_{ij} \in \text{End } V^{(i)} \otimes V^{(j)}$) と考えることがあり、次の性質をもつものと仮定する。

$\hbar$ は定数パラメータとして、 t_{ij} と可換であるとする。

$$t_{ij} = t_{ji} \text{ 厳密には}$$

$$\tau_{ij} \circ t_{ij} = t_{ji} \circ \tau_{ij} \quad (\tau_{ij} \text{ は変換}(i,j))$$

$$(t) : \text{もっと一般に } \tau \circ t_{ij} = t_{\tau(i)\tau(j)} \circ \tau \quad (\tau \in S_n)$$

$$[t_{ij}, t_{kl}] = 0 \quad (i,j,k,l \text{ すべて異なるとき})$$

$$[t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] = 0 \quad (i,j,k \text{ が相異なるとき})$$

方程式 (KZ_n) はこの形から S_n の元による変換で不変であり、従って X_n 上の微分方程式であると考える。

(KZ_n) の解 $W(z) = W(z_1, \dots, z_n)$ は普通 n 変数の正則関数で $V^{\otimes n}$ -valued (または $\text{End } V^{\otimes n}$ -valued) であるものと定義されるが、パラメータ t_{ij} が方程式に含まれていること、及び後に解の逆元を考える必要があることから、 $\text{End } V^{\otimes n}$ -係数の n 変数形式的中級数環 $(\text{End } V^{\otimes n})[[\hbar]]$, または $V^{\otimes n}[[\hbar]]$ の更に或る部分環に制限したものに値をとる関数であると規定する方が便利である。

実際 $n=2$ の場合

$$(KZ_2) : dW = \hbar (t_{12} d \log(z_1 - z_2)) W$$

の解として解えば $W(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)^{\hbar t_{12}} = \exp(\hbar t_{12} \log(z_1 - z_2))$ があり、これは $t_{12} \in \text{End } V^{\otimes 2}$ と考えれば、 W は $(\text{End } V^{\otimes 2})[[\hbar]]$ -値の関数とみなされ、 $t_{12} \in U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ の場合は、 W は $(U(\mathfrak{g})^{\otimes 2})[[\hbar]]$ -値の関数と見られる。次に (KZ_2) の monodromy, つまり、方程式の解を通じて braid 群 B_2 から $\text{End } V^{\otimes 2}$ への表現が得られる(河野俊文氏の

定理)を示そう. (KZ_2) を X_2 上の微分方程式と考える. braid 群

$B_2 = \pi_1(X_2, \bar{*})$ の生成元 σ_1 を loop で, 更にその Y_2 への持ち上げで
ある curve $Z(s) = (z_1(s), z_2(s))$ ($0 \leq s \leq 1$) で表わそう. Y_2 の基点 $*$
 $= (1, 2)$ をとり, X_2 への射影を $\bar{*} = \overline{(1, 2)} = \overline{(2, 1)}$ とする. $Z(s)$ を

$$z_1(s) = \frac{1}{2}(3 + e^{\pi\sqrt{-1}s}), \quad z_2(s) = \frac{1}{2}(3 + e^{\pi\sqrt{-1}5s})$$

で定義すれば "点 $(1, 2)$
と $(2, 1)$ を結ぶ curve $Z(s)$ が得られ, $\overline{Z(s)}$ は σ_1 を代表する loop in X_2 と
なる. (実は, $\overline{Z(s)}$ は σ_1^{-1} を代表していると見る立場もあるが, 慣用に従うことにする.)

この curve $Z(s)$ に沿って (KZ_2) を線分 $[0, 1]$ 上に pull back すれば,

$$\frac{dW(s)}{ds} = \frac{1}{2}t_{12} W(s) \quad \text{on } [0, 1] \quad (\text{ただし } W(s) = W(Z(s)))$$

が得られ, その一意の正則解として $W(s) = W(0) \cdot e^{\frac{1}{2}t_{12}s}$ を得

る (ただし, $\pi \cdot \pi\sqrt{-1} = \frac{1}{2}$ を用いた) $s=1$ において $W(1) = W(0) e^{\frac{1}{2}t_{12}}$

であり, $W(0) = \text{id}$. とおけば $W(1) = e^{\frac{1}{2}t_{12}} : V^{(1)} \otimes V^{(2)} \rightarrow V^{(1)} \otimes V^{(2)}$ となる.

これを Y_2 上での解, 言うに X_2 上での解 $\underbrace{W(Z(1))}_{(2,1)}$ translate すれば

$$\underbrace{W(Z(1))}_{(2,1)} = \tau_{12} \circ e^{\frac{1}{2}t_{12}} : V^{(1)} \otimes V^{(2)} \rightarrow V^{(2)} \otimes V^{(1)} \quad (\tau_{12} \text{ は 互換}(12)) \text{ となり,}$$

monodromy 表現 $\rho(\sigma_1)(v_1 \otimes v_2) = \tau_{12} \circ e^{\frac{1}{2}t_{12}}(v_1 \otimes v_2) = R_{12}(v_1 \otimes v_2)$

が得られる. $R_{12} = \tau_{12} \circ e^{\frac{1}{2}t_{12}} : V^{(1)} \otimes V^{(2)} \rightarrow V^{(2)} \otimes V^{(1)}$ は ベクトル空
間の monoidal 圏における braiding 作用素となる. $R_{ij} = \tau_{ij} \circ e^{\frac{1}{2}t_{ij}}$ も
用いる. (R_{12} を単に, $U(t_2)_R$ の元と見なす場合もある)

§1. 解空間について. 微分方程式 (KZ_n) の解の在り場所を正確に定めるため 場合を分ける.

Case 1. $\mathbb{C}$ 上の ^{finite dim.} semi-simple Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその universal enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ をとり, 前節のベクトル空間 $V \in U(\mathfrak{g})$, $V^{\otimes n} = U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ とする場合. $\mathfrak{g}$ 上の bilinear form $\langle x, y \rangle \triangleq \text{Trace}(\text{Ad } x \cdot \text{Ad } y)$

(付録4のトリス) は Killing form と呼ばれて, 対称, 非退化 な $\mathfrak{g}$ 上の内積を定義する. これは, adjoint 不変: $\langle [z, x], y \rangle + \langle x, [z, y] \rangle = 0$

($\forall z \in \mathfrak{g}$) である. $\mathfrak{g}$ の一つの基 $\{x_i\}$ をとり, この内積に関する dual base $\{x^i\}$ をとる ($\langle x_i, x^j \rangle = \delta_{ij}$)

Lemma. $[x, x_i] = \sum_j \alpha_{ij}(x) \cdot x_j$, $[x, x^i] = \sum_k \beta_{ik}(x) \cdot x^k$ とおくと
 $\alpha_{ij}(x) = -\beta_{ji}(x)$

Lemma. 1) Casimir 元 $C = \sum_i x_i \cdot x^i \in U(\mathfrak{g})$ は基 $\{x_i\}$ のとり方に無関係に定まる. 2) C は $U(\mathfrak{g})$ の center に属する.

以上の良く知られた性質から, 次の事項, 性質が従う (証明を(1)に述べる) $t = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (x_i \otimes x^j + x^i \otimes x_j) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ は $U(\mathfrak{g})$ の余積 $\Delta: U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ を用いると

$$t = \frac{1}{2} (\Delta C - 1 \otimes C - C \otimes 1)$$

$$[\Delta x, t] = 0 \quad (\forall x \in \mathfrak{g})$$

$$t_{12} = t \in V^{\otimes 2} = V^{(1)} \otimes V^{(2)} \quad (V^{(i)} \text{ は } V \text{ のコホモロジー}) \text{ とおくと}$$

$$t = \sum_r y_r \otimes z_r \in V^{\otimes 2} \text{ のとき}$$

$$t_{ij} = \sum_r 1 \otimes \dots \otimes \overset{i}{y_r} \otimes 1 \otimes \dots \otimes \overset{j}{z_r} \otimes 1 \otimes \dots \text{ とおくと}$$

前節の関係式 (t) が成り立つ.

Case 2. V を $\mathbb{C}$ -ベクトル空間. $t_{ij} (1 \leq i < j \leq n) \in \text{End}(V^{(i)} \otimes V^{(j)})$
 $\subset \text{End}(V^{\otimes n})$ とし, $\sigma \circ t_{ij} \circ \sigma^{-1} = t_{\sigma(i)\sigma(j)}$ とする. このとき
 前節の関係式 (t) を仮定する.

t_{ij} で生成された $\mathbb{C}$ 上の Lie 環を $\mathfrak{t}_n$ とおく. $U(\mathfrak{t}_n) \subset \text{End}(V^{\otimes n})$
 と考えられる. $\text{degree}(t_{ij}) = 1$ と置けば, $\mathfrak{t}_n$ は graded Lie algebra
 $U(\mathfrak{t}_n)$ は graded algebra となる. 前節で導入した $\text{End } V^{\otimes n}$ 上の
 S_n の作用 $\sigma \cdot \varphi = \sigma \circ \varphi \circ \sigma^{-1}$ について $\sigma \cdot t_{ij} = t_{\sigma(i)\sigma(j)}$ となるから,
 $U(\mathfrak{t}_n)$ は S_n -不変な部分環にある.

係数域を $\text{End } V^{\otimes n}$ とする. h の形式的巾級数環 $(\text{End } V^{\otimes n})[[h]]$ の部
 分環 $U(\mathfrak{t}_n)_h$ を次の様に定義する. 左の系列 $U(\mathfrak{t}_n)[[h]]/(h^N)$
 の逆極限 $\varprojlim_{N \rightarrow \infty} U(\mathfrak{t}_n)[[h]]/(h^N)$ は, $U(\mathfrak{t}_n)[[h]]$ においてイデアル
 (h^N) を零の基本近傍系と考えて, $\sim$ 一様位相空間と考えられ
 るが, 更に, degree による $U(\mathfrak{t}_n)$ の完備化に相当する $U(\mathfrak{t}_n)_h$ を, h の形式的
 巾級数 $\sum_k \alpha_k h^k$ であって, 係数 α_k は t_{ij} に関する k 次の非可換斉次多項
 式. つまり $\text{degree}(\alpha_k(\cdot, t_{ij} \cdot)) = k$ なるものに限った $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k h^k$ の全体
 と定義する. これを $\varprojlim_{N \rightarrow \infty} U(\mathfrak{t}_n)[[h]]/(h^N)$ の部分空間と考えたもの
 が $U(\mathfrak{t}_n)_h \approx \widehat{U(\mathfrak{t}_n)}$ (degree による完備化) である. 以下 Case 2 の場
 合に限ることとし, Y_n 上の $\sqrt{\text{自然}}$ ベクトル・バンドルのファイバーとして

$U(\mathfrak{t}_n)_h \left(C(\text{End } V^{\otimes n})[[h]] \right)$ をとり, (KZ_n) の解は $U(\mathfrak{t}_n)_h$ -valued 正則関数
 であるとする. 実は, Case 1 において $\{t_{ij}\}$ から生成された Lie 環 $\mathfrak{t}_n \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$
 および $U(\mathfrak{t}_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ を考えれば, $U(\mathfrak{t}_n)$ に S_n が作用し, Case 2 に帰着
 する. $\therefore$ formal には $U(\mathfrak{t}_n)$ が $\mathfrak{g}$ で $\mathfrak{t}$ であり, $V^{\otimes n}$, $\text{End } V^{\otimes n}$ 等は, 場合に依りて考える.

§2. 変数の reduction. 前1節 §0. で与えた全微分方程式

$$(KZ_n) : dW = \hbar \left(\sum_{i < j} \frac{t_{ij}}{z_i - z_j} d(z_i - z_j) \right) W$$

は次の ~~偏~~ 微分方程式と同値である.

$$(KZ_n)' : \frac{\partial W}{\partial z_i} = \hbar \left(\sum_{j \neq i} \frac{t_{ij}}{z_i - z_j} \right) W \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

これから $\sum_i \frac{\partial W}{\partial z_i} = 0$ が従う. そこで $w_1 = z_1 + \dots + z_n$ とおけば
 $w_i = z_i - z_1 \quad (i > 1)$

$$\widetilde{W}(w_1, \dots, w_n) = W(z_1, z_2, \dots, z_n) \text{ について}$$

$$\frac{\partial \widetilde{W}}{\partial w_1} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial w_1}, \quad \frac{\partial z_i}{\partial w_1} = \frac{\partial z_1}{\partial w_1} = \frac{1}{n} \quad (i=2, \dots, n) \text{ 故に } \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial w_1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial z_i} = 0$$

従って変数 w_1 は余りて, $W(z_1, \dots, z_n) = \widetilde{W}(w_2, \dots, w_n)$ と置き, $(KZ_n)'$ は

$$(K\widetilde{Z}_n) : \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial w_i} = \hbar \left(\frac{t_{i1}}{w_i} + \sum_{2 \leq j \neq i} \frac{t_{ij}}{w_i - w_j} \right) \widetilde{W} \quad (i > 1)$$

と同値となる. この式から

$$\sum_{i=2}^n w_i \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial w_i} = \hbar T \widetilde{W}, \quad T = \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_{ij}$$

が従う. Euler により, この式は $\widetilde{W}$ が $(w_2, \dots, w_n)$ の, 指数 $\hbar T$ を持つ齊次関数であることと意味する: つまり

$$\widetilde{W}(u^{\frac{w_2}{u}} u^{\frac{w_3}{u}}, \dots, u u_n) = u^{\hbar T} \widetilde{W}(u_2, \dots, u_n) \text{ が成り立つ.}$$

そこで $u^{\hbar T} = \exp(\hbar T \log u)$ ($\hbar T \log u$ は自然対数)

$$\text{証) } \frac{d\widetilde{W}(u u_i)}{du} = \sum \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial w_i} \cdot u_i = \frac{\hbar T}{u} \widetilde{W}$$

$$\log \widetilde{W} = \hbar T \log u + C(\text{定数})$$

$$\widetilde{W} = u^{\hbar T} \cdot e^C \quad e^C = \widetilde{W}(u=1) = \widetilde{W}(u_2, \dots, u_n)$$

$$\left(\text{又は } \frac{d(\widetilde{W} \cdot u^{-\hbar T})}{du} = 0 \text{ から直ちに従う} \right)$$

ここで $u_n = 1$, $u = u_n$, $u_i = \frac{w_i}{w_n}$ とおくことにより

$$u^{-nT} \widetilde{W}(u u_2, \dots, u u_{n-1}, u) = \widetilde{W}(u_2, \dots, u_{n-1}, 1) = V(u_2, \dots, u_{n-1})$$

つまり変数の数を $(n-2)$ 個まで reduce することができ、 (KZ_n) は

$$(*_n): \quad \frac{\partial V}{\partial u_i} = n \left(\frac{t_{i1}}{u_i} + \sum_{1 \leq j \leq n-1} \frac{t_{ij}}{u_i - u_j} + \frac{t_{in}}{u_i - 1} \right) V \quad (\text{for } i=2, \dots, n-1)$$

と同値となる。念のため $u_i = \frac{w_i}{w_n} = \frac{z_i - z_1}{z_n - z_1}$ である。

§3. KZ -方程式の解

これまで述べた様に KZ_n -微分方程式の解 $W(z_1, \dots, z_n)$ は、パラメータ n の形式的巾級数 $W = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot t^k$ の形に表わされ、 α_k はベクトル空間 $V^{\otimes n}$ の有限次元部分空間に値をもつ (Y_n 上の) 正則関数 (または $\text{End } V^{\otimes n}$) と解すべきであるが、この言葉自体の意味をもう少し明確にしようとするには、先づ Y_n 上の複素正則関数の群を作る層 (sheaf) $\mathcal{F}$ を考え、constant sheaf $V^{\otimes n}$ (または $\text{End } V^{\otimes n}$) とのテンソル積 $\mathcal{F} \otimes V^{\otimes n}$ (または $\mathcal{F} \otimes \text{End } V^{\otimes n}$) の cross-section の module $\Gamma(\mathcal{F} \otimes V^{\otimes n})$ の元が、上記のベクトル値正則関数の意味である。もっと正確には正則関数 α_k の値は $V^{\otimes n}$ (または $\text{End } V^{\otimes n}$) の有限次元部分空間 (k に依存してよい) に属するものとする (この条件は、 n の巾級数同士の積を考える時に必要である)。

以下 $n=3, 4$ の場合には (KZ_n) -方程式の具体的な解を求めよう。Drinfeld associator の導入、その性質については $n \leq 4$ までの検討で、一応足りている。

$n=3$ の場合. 一変数の方程式

$$(*_3): \quad \frac{dV}{dz} = \hbar \left(\frac{t_{12}}{z} + \frac{t_{23}}{z-1} \right) V, \quad (z = u_2 = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1})$$

は係数に特異点 $z=0, z=1$ を含み, フックス型と呼ばれる常微分方程式であり, 各特異点の近傍で, 指定点で指定された初期値を有する ^{正則} 解が一意的に存在する. またその解は単連結な領域に解析接続できることが知られている. いまの場合例えば $\mathbb{C}' = \mathbb{C} - \{(-\infty, 0] \cup [1, \infty)\}$ 上で, 非可換な t_{12}, t_{23} の k 次齊次多項式と値とする正則関数 $\alpha_k(z)$ に対して h の巾級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(z) h^k$ の形の ^{収束} 解が次の様に求められる. 特異点 $z=0$ の近傍では, 方程式の係数のうち $\frac{t_{12}}{z}$ が支配的 (dominant) であるので解 $V(z)$ の漸近挙動が

$$V_0(z) \sim z^{\hbar t_{12}} \quad \text{なるものが存在して, } V_0(z) \text{ 自体は}$$

$V_0(z) = P(z) \cdot z^{\hbar t_{12}}$ ($P(z)$ は ^{上記の意味の} 正則関数, $P(0)=1$) の形で一意的な解として定まる.

証) $P(z) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r \cdot z^r$, $P_0=1$ と置いて, $V_0 = P(z) \cdot z^{\hbar t_{12}}$ を $(*_3)$ に代入すると $V_0'(z) = (P'(z) + P \cdot \frac{\hbar t_{12}}{z}) \cdot z^{\hbar t_{12}} = \hbar \left(\frac{t_{12}}{z} + \frac{t_{23}}{z-1} \right) P(z) \cdot z^{\hbar t_{12}}$ となり $z \cdot P'(z) - \hbar [t_{12}, P(z)] = \hbar \left(\frac{z \cdot t_{23}}{z-1} \right) P(z)$ を得る.

これを z の巾級数として展開すると $[t_{12}, P_0] = 0$ であるから $r > 0$ のとき $r \cdot P_r - \hbar [t_{12}, P_r] = -\hbar t_{23} (P_0 + P_1 + \dots + P_{r-1})$ (z^r の係数比較)

$$(r - \hbar \text{Ad } t_{12}) P_r = -\hbar t_{23} (P_0 + P_1 + \dots + P_{r-1}) \quad (\text{いいて,})$$

$r - \hbar \text{Ad } t_{12}$ は逆 $(r - \hbar \text{Ad } t_{12})^{-1} = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\hbar}{r} \text{Ad } t_{12} \right)^i$ をもつから r につき

帰納的に P_r が求められる. 従って $V_0(z)$ が得られる.

特異点 $z=1$ の近傍でも同様に、漸近展開 $(1-z)^{\hbar t_{23}}$ を一意的な解 $V_1(z) = Q(1-z)(1-z)^{\hbar t_{23}}$ ($Q(1-z)$ は $|1-z| < \varepsilon$ で正則, $Q(0)=1$) が存在する. $V_0(z)$ と $V_1(z)$ は二つの別々の解であり、これらを解析接続(或いは延長)して、同じ場所と比較しよう. $V_1(z)$ は逆をもつ: $V_1^{-1}(z) = (1-z)^{-\hbar t_{23}} \cdot Q(1-z)^{-1}$ から $V_1^{-1} V_0 = \Phi$ とおけば $V_0 = V_1 \Phi$ 両辺を微分して $V_0' = V_1' \Phi + V_1 \Phi'$, しかるに $V_0' = \hbar \left(\frac{t_{21}}{z_2} + \frac{t_{23}}{z_2 - z_1} \right) V_1 \Phi = V_1' \Phi$ であるから上式より $V_1 \Phi' = 0 \Rightarrow \Phi' = 0$ となり, Φ は z を含まない constant. $\Phi = \Phi(\hbar t_{12}, \hbar t_{23}) (\in U(\mathfrak{g}_3)_\hbar)$ と書いて、これを Drinfeld associator (結合子?) とよぶ.

$$\left(\begin{array}{l} \text{上記において, } (z-1)^{\hbar B} = \exp(\hbar B \log(z-1)) = \exp(\hbar B \log(-1)) \exp(\hbar B \log(1-z)) \\ \log(-1) = \pi\sqrt{-1} \text{ (主値) により } (z-1)^{\hbar B} = \exp(\hbar \pi\sqrt{-1} B) \cdot \exp(\hbar B \log(1-z)) \\ \left(\hbar = \frac{\hbar}{2\pi\sqrt{-1}}, B = t_{23} \right) \quad = e^{\frac{\hbar}{2} B} (1-z)^{\hbar B} \\ \Phi(\hbar t_{12}, \hbar t_{23}) : (V^{(1)} \otimes V^{(2)}) \otimes V^{(3)} \xrightarrow{\sim} V^{(1)} \otimes (V^{(2)} \otimes V^{(3)}) \text{ と考える} \end{array} \right)$$

$$\text{よって } (KZ_3)': \frac{\partial W}{\partial z_2} = \hbar \left(\frac{t_{21}}{z_2 - z_1} + \frac{t_{23}}{z_2 - z_3} \right) W$$

$$\text{において } W(z_1, z_2, z_3) = (z_3 - z_1)^{\hbar(t_{12} + t_{23} + t_{13})} V(z) \cdot \left(z = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right)$$

とおけば、この W が $(KZ_3)'$ の解 $\iff V(z)$ が $(\mathfrak{g}_3)$ の解

$$\text{よって } \text{この } W \text{ が } (KZ_3)' \text{ の解とすれば、代入して } (z_3 - z_1)^{\hbar(t_{12} + t_{23} + t_{13})} V(z) \\ (KZ_3)' \text{ の左辺} = \frac{\partial W}{\partial z_2} = \frac{\partial}{\partial z_2} \left((z_3 - z_1)^{\hbar(t_{12} + t_{23} + t_{13})} V(z) \right)$$

$$\text{右辺} = \hbar \left(\frac{t_{21}}{z_2 - z_1} + \frac{t_{23}}{z_2 - z_3} \right) \cdot (z_3 - z_1)^{\hbar(t_{12} + t_{23} + t_{13})} V(z)$$

$$\text{左辺} = \text{右辺} \text{ とおけば } V'(z) = \hbar \left(\frac{t_{21}}{z_2 - z_1} + \frac{t_{23}}{z_2 - z_3} \right) V \text{ すなわち } (\mathfrak{g}_3).$$

逆に V が $(\mathfrak{g}_3)$ の解なら上記の W が $(KZ_3)'$ の解となる.

よって $(\mathfrak{g}_3)$ の解 V_i ($i=0, 1$) を使って

$$W_i(z_1, z_2, z_3) = (z_3 - z_1)^{\hbar T} \cdot V_i(z) \quad \text{とおけば} \quad (T = t_{12} + t_{23} + t_{13})$$

$$W_0(z_1, z_2, z_3) \sim (z_2 - z_1)^{\hbar t_{12}} (z_3 - z_1)^{\hbar(t_{23} + t_{13})} \quad \text{when } |z_2 - z_1| \ll |z_3 - z_1|$$

$$\therefore t_{23} + t_{13} = t_{(2)3} \quad \text{とおけば} \quad (t_{(2)3} = t_{12} \otimes 1 + (1 \otimes t_{23}) \circ (t_{13} \otimes 1) \circ (1 \otimes t_{23}))$$

$$W_0(z_1, z_2, z_3) \sim (z_2 - z_1)^{\hbar t_{12}} (z_3 - z_1)^{\hbar t_{(2)3}}$$

となり、同様にして

$$W_1(z_1, z_2, z_3) \sim (z_3 - z_2)^{\hbar t_{23}} (z_3 - z_1)^{\hbar t_{1(23)}} \quad |z_2 - z_3| \ll |z_3 - z_1|$$

— 上記で t_{12} は $t_{(12)3}$ と, t_{23} は $t_{1(23)}$ と, T は t_{ij} ($1 \leq i < j \leq 3$) と可換であること, また W_0, W_1 は上の漸近挙動で一意的に定まることに注意しよう.

$V_0 = V_1 \Phi_{1,2,3}$ の関係 (p.10) から $W_0 = W_1 \Phi_{1,2,3}$ の関係が生ずる.

(T は $\Phi(\hbar t_{12}, \hbar t_{23})$ と可換であることを使った.)

$$W_{(12)3} = W_0 \sim (z_2 - z_1)^{\hbar t_{12}} (z_3 - z_1)^{\hbar t_{(2)3}} : V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3}$$

$$W_{1(23)} = W_1 \sim (z_3 - z_2)^{\hbar t_{23}} (z_3 - z_1)^{\hbar t_{1(23)}} : V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3}$$

さらに z_1, z_2, z_3 を permute して次の四つの解を得る.

$$W_{1(32)} = W_2 \sim (z_2 - z_3)^{\hbar t_{32}} (z_2 - z_1)^{\hbar t_{1(32)}} \quad \text{when } |z_2 - z_3| \ll |z_2 - z_1|$$

$$W_{(13)2} = W_3 \sim (z_3 - z_1)^{\hbar t_{13}} (z_2 - z_1)^{\hbar t_{(13)2}} \quad \text{when } |z_3 - z_1| \ll |z_2 - z_1|$$

$$W_{(31)2} = W_4 \sim (z_1 - z_3)^{\hbar t_{31}} (z_2 - z_3)^{\hbar t_{(31)2}} \quad \text{when } |z_1 - z_3| \ll |z_2 - z_3|$$

$$W_{3(12)} = W_5 \sim (z_2 - z_1)^{\hbar t_{12}} (z_2 - z_3)^{\hbar t_{3(12)}} \quad \text{when } |z_2 - z_1| \ll |z_2 - z_3|$$

これは夫々の領域での一意的な解を定め, それらの間に次の関係がある: W_2 は W_1 から z_2, z_3 の交換で得られる: $W_1 = W_2 \circ R_{23}$ (p.4 参)

$$W_3 \text{ と } W_2 \text{ は } t_{23} \text{ と } t_{13} \text{ の入れ換えで得られる: } W_3 \circ \Phi_{1/32}^{-1} = W_2 \quad (\Phi(v, u) =$$

$$\Phi(u, v)^{-1} \text{ でありことに注意})$$

要証明

W_4 は W_3 から z_1 と z_3 の交換で得られる: $W_4 \circ R_{13} = W_3$

W_5 は W_4 から t_{31} と t_{12} の入れかえで得られる: $W_5 \circ \Phi_{3,2} = W_4$

W_5 は W_0 から (z_1, z_2) と z_3 の交換で得られる: $W_5 \circ R_{(12)3} = W_0$

これらの関係から

$$\begin{aligned} W_0 &= W_1 \Phi_{1,2} = W_2 R_{23} \Phi_{1,2} = W_3 \Phi_{1,2}^{-1} R_{23} \Phi_{1,2} = W_4 R_{13} \Phi_{1,2}^{-1} R_{23} \Phi_{1,2} \\ &= W_5 \Phi_{3,2} R_{13} \Phi_{1,2}^{-1} R_{23} \Phi_{1,2} \end{aligned}$$

一方 $W_0 = W_5 \circ R_{(12)3}$ であるから

$$R_{(12)3} = \Phi_{3,2} R_{13} \Phi_{1,2}^{-1} R_{23} \Phi_{1,2} \quad (\text{Hexagon axiom}) \quad R_{12} \circ R_{(12)3} = R_{(21)3} \circ R_{12}$$

これは monoidal (張) (または tensor (張) とせう) における associator

$$\Phi_{V_1, V_2, V_3} = (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$

なる自然同型と braiding $R_{V,W} = V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V$ との

coherence を意味する公理 (MacLane の本 Category theory for Working

Mathematician) である。(これは Yang-Baxter 方程式に相当する等式が得られる) (non-associative の場合の)

次に更に面倒な $n=4$ の場合が残っている。

(KZ_4) と同値な

$$(*_4) : i) \frac{\partial V}{\partial u_2} = \hbar \left(\frac{t_{12}}{u_2} + \frac{t_{23}}{u_2 - u_3} + \frac{t_{24}}{u_2 - 1} \right) V$$

$$ii) \frac{\partial V}{\partial u_3} = \hbar \left(\frac{t_{13}}{u_3} + \frac{t_{23}}{u_3 - u_2} + \frac{t_{34}}{u_3 - 1} \right) V$$

を考えると、この場合、2変数 u_2, u_3 の関数 V を考えればよい。 $\begin{cases} u = u_2 = \frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_1} \\ v = u_3 = \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1} \end{cases}$

とおいて

$u = u_2 = 0$ 点 $(u, v) = (0, 1)$ の近傍では、方程式 $(*_4)$ i) の第1項, ii) の第3項がゼロ
 $v = u_3 = 1$

を dominant とする v , $(*_4)$ の normal form $(*_4)^{\wedge} = \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial u} = \hbar \left(\frac{t_{12}}{u} + P \right) V \\ \frac{\partial V}{\partial v} = \hbar \left(\frac{t_{34}}{v-1} + Q \right) V \end{cases}$ の解が

$$R_{12} \circ R_{23} \circ R_{13} = R_{13} \circ R_{23} \circ R_{12}$$

Hex. B

漸近挙動

$$V(u, v) \sim u^{\hbar t_{12}} (v-1)^{\hbar t_{34}}$$

で定まると期待できる. 実際 $V(u, v) = \tilde{V}(u, v) \cdot u^{\hbar t_{12}} (v-1)^{\hbar t_{34}}$

$\tilde{V}(u, v)$ は $(0, 1)$ の近傍で正則かつ $\tilde{V}(0, 1) = 1$ な関数とあり, $n=3$ の場合

と同様に求めることが出来る (t_{12}, t_{34} は可換)

このとき $(z_4 - z_1)^{\hbar T} \cdot V(u, v) = X_5$ は (KZ_4) の解となる $\left(\begin{array}{l} T = t_{12} + t_{13} + t_{23} \\ + t_{24} + t_{14} + t_{34} \end{array} \right)$

$$X_5 = W_{(12)(34)} \tilde{U}_{(u,v)} (z_2 - z_1)^{\hbar t_{12}} \cdot (z_4 - z_3)^{\hbar t_{34}} (z_4 - z_1)^{\hbar t_{(12)(34)}} \left(\begin{array}{l} t_{(12)(34)} = T - t_{12} - t_{34} \end{array} \right)$$

$$\text{for } |z_2 - z_1| \ll |z_4 - z_1|, |z_4 - z_3| \ll |z_4 - z_1|$$

次に特異点 $(u_2, u_3) = (0, 0)$ のときは, そのままだけは (x_*) を標準形に持込むとほいさ

らしいので点 $(0, 0)$ の近くで座標 $u = u_3, v = \frac{u_2}{u_3}$ を導入し (blowing up 方法)

$$\hat{V}(v, u) = \tilde{V}\left(\frac{u_2}{u_3}, \frac{u}{u_3}\right) \text{ とおけば }$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{V}}{\partial u} &= \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u_2} \cdot \frac{u_2}{u_3} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u_3} = \hbar v \left(\frac{t_{12}}{u_2} + \frac{t_{23}}{u_2 - u_3} + \frac{t_{24}}{u_2 - 1} \right) \tilde{V} \\ &\quad + \hbar \left(\frac{t_{13}}{u_3} + \frac{t_{23}}{u_3 - u_2} + \frac{t_{34}}{u_3 - 1} \right) \tilde{V} \\ &= \hbar \left(\frac{t_{12} + t_{13} + t_{23}}{u} + \frac{v t_{24}}{u v - 1} + \frac{t_{34}}{u - 1} \right) \hat{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{V}}{\partial v} &= \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u_2} \cdot u = \hbar u_3 \left(\frac{t_{12}}{u_2} + \frac{t_{23}}{u v - u} + \frac{t_{24}}{u v - 1} \right) \tilde{V} \\ &= \hbar \left(\frac{t_{12}}{v} + \frac{t_{23}}{v - 1} + \frac{t_{24} u}{u v - 1} \right) \hat{V} \end{aligned}$$

従ってこれは

$$(x_*)^{\wedge} \text{ i) } \frac{\partial \hat{V}}{\partial u} = \hbar \left(\frac{t_{12} + t_{13} + t_{23}}{u} + \dots \right) \hat{V} \quad \text{near } \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } \frac{\partial \hat{V}}{\partial v} = \hbar \left(\frac{t_{12}}{v} + \dots \right) \hat{V}$$

という標準形になり, 前と同様に $(x_*)^{\wedge}$ i), ii) の解

$$\hat{V}_{(12)(34)}(v, u) = \tilde{V}_{(12)(34)}(v, u) \cdot v^{\hbar t_{12}} u^{\hbar(t_{12} + t_{13} + t_{23})} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{V} \text{ は正則} \\ \tilde{V} \dots (0, 0) = 1 \end{array} \right.$$

および ~~near (1, 0)~~ near $\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の解

$$\hat{V}_{(12)(34)}(v, u) = \tilde{V}_{(12)(34)}(v, u) (1-v)^{\hbar t_{23}} u^{\hbar(t_{12} + t_{13} + t_{23})} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{V}_{(12)(34)}(1, 0) = 1 \\ \tilde{V} \text{ は正則} \end{array} \right.$$

が得られ、従って対応する (KZ_4) の解

$$X_1 = W_{(1(2)3)4} = \hat{V}_{(1(2)3)4} \left(\underbrace{\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}}_v, \underbrace{\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_1}}_u \right) \cdot (z_4 - z_1)^{\pi T}, \quad T = \frac{t_{12} + t_{23} + t_{34} + t_{14} + t_{24}}{+ t_{34}}$$

$$X_2 = W_{(1(3)2)4} = \hat{V}_{(1(3)2)4}(v, u) \cdot (z_4 - z_1)^{\pi T} \quad \text{が得られる.}$$

near $(u_2, u_3) = (1, 1)$ では z_2, z_3, z_4 が互いに接近状態にあるので新たに

$$\text{変数 } w = \frac{1 - u_3}{1 - u_2} = \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \text{ を導入し}$$

$$\check{V}(u_2, w) = \check{V}(u_2, \underbrace{1 + (u_2 - 1)w}_{u_3}) \text{ を定義すると}$$

$$(*) \quad \frac{\partial \check{V}}{\partial u_2} = \frac{\partial V}{\partial u_2} + \frac{\partial V}{\partial u_3} \cdot \underbrace{w}_{\frac{\partial u_3}{\partial u_2}} = \pi \left(\frac{t_{12}}{u_2} + \frac{t_{23} + t_{24} + t_{34}}{u_2 - 1} + \frac{t_{13}}{1 + (u_2 - 1)w} \right) \check{V}$$

$$\frac{\partial \check{V}}{\partial w} = \frac{\partial V}{\partial u_3} \cdot (u_2 - 1) = \pi \left(\frac{(u_2 - 1)t_{13}}{1 + (u_2 - 1)w} + \frac{t_{23}}{w - 1} + \frac{t_{34}}{w} \right) \check{V}$$

と成り、これは、 $(u_2 = 1, w = 1)$ および $(u_2 = 1, w = 0)$ の近傍でそれぞれ標準型と成り、それぞれ漸近解

$$\check{V}_{1(23)4} \sim (1 - u_2)^{\pi(t_{23} + t_{24} + t_{34})} (1 - w)^{\pi t_{23}}$$

$$\text{および} \quad \check{V}_{1(23)4} \sim (1 - u_2)^{\pi(t_{23} + t_{24} + t_{34})} w^{\pi t_{34}}$$

が得られ、対応する (KZ_4) の解

$$X_3 = W_{1(23)4} = \check{V}_{1(23)4} \cdot (z_4 - z_1)^{\pi T}$$

$$X_4 = W_{1(234)} = \check{V}_{1(234)} \cdot (z_4 - z_1)^{\pi T} \quad \text{を得る.}$$

これらの (KZ_4) の解は 次の標準漸近展開で一意的に定まる

$$W_{(12)34} = X_1 \sim (z_2 - z_1)^{\hbar t_2} (z_3 - z_1)^{\hbar t_{(12)3}} (z_4 - z_1)^{\hbar t_{(123)4}} \quad \text{for } |z_2 - z_1| \ll |z_3 - z_1| \ll |z_4 - z_1|$$

$$W_{1(23)4} = X_2 \sim (z_3 - z_2)^{\hbar t_{23}} (z_3 - z_1)^{\hbar t_{(123)4}} (z_4 - z_1)^{\hbar t_{(23)4}} \quad |z_3 - z_2| \ll |z_3 - z_1| \ll |z_4 - z_1|$$

$$W_{(12)34} = X_3 \sim (z_3 - z_2)^{\hbar t_{23}} (z_4 - z_2)^{\hbar t_{(23)4}} (z_4 - z_1)^{\hbar t_{(123)4}} \quad |z_3 - z_2| \ll |z_4 - z_2| \ll |z_4 - z_1|$$

$$W_{1(234)} = X_4 \sim (z_4 - z_3)^{\hbar t_{34}} (z_4 - z_2)^{\hbar t_{2(34)}} (z_4 - z_1)^{\hbar t_{1(234)}} \quad |z_4 - z_3| \ll |z_4 - z_2| \ll |z_4 - z_1|$$

$$W_{(12)34} = X_5 \sim (z_2 - z_1)^{\hbar t_{12}} (z_4 - z_3)^{\hbar t_{34}} (z_4 - z_1)^{\hbar t_{(12)34}} \quad |z_2 - z_1| \ll |z_4 - z_1|, |z_4 - z_3| \ll |z_4 - z_1|$$

$$z \sim X_1 \cdot (z_4 - z_1)^{-\hbar t_{(123)4}} \sim W_0(z_1, z_2, z_3)$$

$$X_2 \cdot (z_4 - z_1)^{-\hbar t_{(23)4}} \sim W_1(z_1, z_2, z_3)$$

$$\text{つまり } W_0 = W_1 \cdot \bar{\mathbb{P}}_{123} \quad \text{つまり } X_1 = X_2 \cdot (\bar{\mathbb{P}}_{123} \otimes 1)$$

$$\text{同様の考察で } X_3 \cdot \bar{\mathbb{P}}_{1(23)4} = X_2, \quad X_4 \cdot \bar{\mathbb{P}}_{1(23)4} = X_3$$

$$\cancel{X_5 \cdot \bar{\mathbb{P}}_{(12)34} = X_4} \quad X_4 \cdot \bar{\mathbb{P}}_{1,2(34)} = X_5, \quad X_5 \cdot \bar{\mathbb{P}}_{(12)34} = X_1$$

これから

$$\bar{\mathbb{P}}_{1,2(34)} \circ \bar{\mathbb{P}}_{(12)34} = \bar{\mathbb{P}}_{2,34} \cdot \bar{\mathbb{P}}_{1(23)4} \circ \bar{\mathbb{P}}_{123} \quad (\text{Pentagon axiom})$$

を得る. これは4つのベクトル空間 V_1, V_2, V_3, V_4 のテンソル積

$$\begin{array}{ccc} (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \otimes V_4 & \xrightarrow{\bar{\mathbb{P}}_{123}} & (V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes V_4 \\ \downarrow \bar{\mathbb{P}}_{(12)34} & & \downarrow \bar{\mathbb{P}}_{1(23)4} \\ (V_1 \otimes V_2) \otimes (V_3 \otimes V_4) & \xrightarrow{\bar{\mathbb{P}}_{123(34)}} & V_1 \otimes (V_2 \otimes (V_3 \otimes V_4)) \end{array}$$

の積の順序のくり方によって、その間の結合子同型の合成が「通り」の経路を通っても同じである(つまり上図が可換図式である)ことを意味する coherence 条件 (MacLane). これらの性質によって、重非結合的代数 (Drinfeld の量子群) の結合子として利用された ($[D]_1, [D]_2$)

文献は参考文献 1057 p.86 参