

From homotopy to homeomorphy

九大 工 田尾 鶴三

“多様体を位相的に分類する問題はどの程度 homotopy 論の範囲で解決されるか?”ということが話の主題であります。 “Hurewicz の予想 (= homotopy 型のひとしい多様体は同相か)” 以来の伝統的問題でありますが “Hurewicz の予想が否定的に解かれている現在, 我々はより精密な議論をする必要があるわけです。さて, 多様体に何らかの “構造” が無いと現在では中々扱いにくい状態なので我々は Combinatorial structure (= piecewise linear structure 略して PL-structure) を入れ, それを媒介として問題を二つの段階に分けて考えることにします。

問題 1. 位相多様体には PL-structure が入るか? 更に一意的に入るか? (triangulation problem と Hauptvermutung)

問題 2. PL-manifold を PL-equivalence で分類せよ。

問題1が肯定的ならば勿論問題2の分類は“位相多様体の位相的分類”と同値になります。我々の問題は“問題1, 2をどのようにして homotopy 論の問題に帰着させるか?”ということですが、最初問題2を説明し、ついで問題1に対する D. Sullivan の obstruction theory を紹介したいと思います。

さて、問題2を homotopy の問題に帰着するためには次の二つの問題が解ければよいわけです。

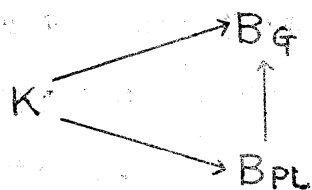
問題A. PL-manifold の homotopy 型を持つ複体を homotopy の範囲で characterize すること。

問題B. PL-manifold の homotopy 型 K が与えられたとき、 K と homotopy 型を同じくする全ての PL-manifold を (PL-isomorphism を同一視して) homotopical に数え上げること。

問題Aからはじめます。まず気付くことは、複体 K が manifold (simply connected, closed とする。) の homotopy 型を持つと必然的に Poincaré duality に相当するものが成立しなければなりません。即ち、或る正の整数 n に対して K の n 次元 (整係数) homology group が infinite cyclic group $\mathbb{Z}$ に同型であり、その generator を g とすれば、 $ng : H^i(K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{n-i}(K; \mathbb{Z})$ が全ての i に対し

7 isomorphism を引きおこしています。このような複体を
 我々は n 次元 Poincaré 複体とよぶことにします。さて、 K
 上の一般の spherical fibre space ξ に対し Thom isomor-
 phism 重 $\tau; H_n(K) \rightarrow H_{n+k}(T(\xi))$ が考えられますが、特
 に K が simply connected な Poincaré complex の場合に
 は重 τ が spherical な stable spherical fibre space が
 一意的に存在することが M. Spivak により知られています
 。このことは次の様に言い換えてもよいわけですから、 B_G
 を stable spherical fibre space の classifying space
 とするときに、 K から B_G への重 τ が spherical になるよ
 うな (homotopy を無視して) 唯一つの写像 $f; K \rightarrow B_G$
 が存在する。こゝに τ は f より induce される K 上の spherical
 fibre space の Thom isomorphism であります。さて、
 この f を Poincaré complex K の Spivak 写像と名付け
 ることにします。この Spivak 写像を用いますと問題 A は次
 の様な形で解決されます。

定理 A. K を単連結 n 次元 Poincaré 複体 ($n > 5$) とし
 , $f; K \rightarrow B_G$ を K の Spivak 写像とする。 K が閉 n 次元
 PL-manifold の homotopy 型を持つための必要十分条件
 は、 K から B_G への或る写像 $g; K \rightarrow B_{PL}$ が存在して次の
 diagram が homotopy commutative なことである。



こゝで B_{PL} は stable PL-bundles の classifying space である。

次に問題 B についてですが, simply connected PL closed n -manifold ($n > 5$) を M とし, M と同じ homotopy 型をもつ PL-manifold の全体を $PL(M)$ とかきます。このとき次の定理が成り立ちます。

$$\text{定理 B. } PL(M) = [M_0, G/PL]$$

こゝで $M_0 = M - \text{Int}(D)$ (D は M 内に埋入した n 次元 disk) であり G/PL は $B_{PL} \rightarrow B_G$ の fibre とします。又 $[X, Y]$ は space X から space Y への写像全体の homotopy 類を意味します。

定理 A, B により問題 Z は simply connected closed PL-manifold ($n > 5$) に対して解かれたと考えられます。さて, 次に問題 1 に対する D. Sullivan の obstruction theory を説明するわけですが, それは次の Browder-Hirsch による Browder-Novikov の定理の PL-analogy の精密化でもあるわけです。

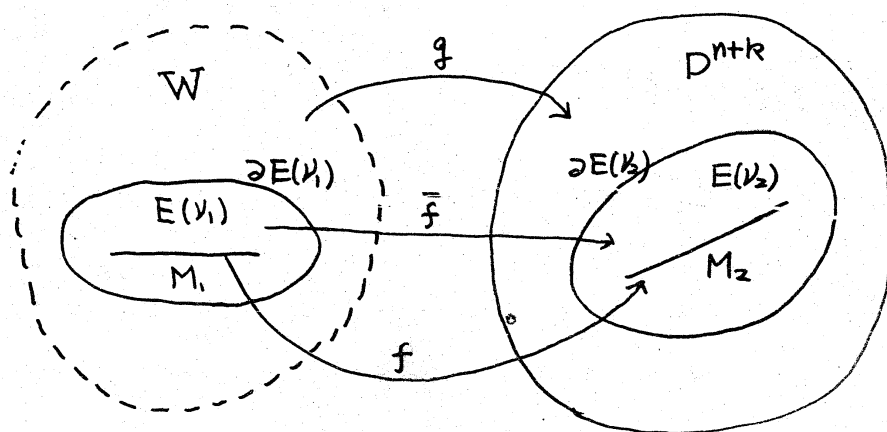
定理 (Browder-Hirsch) M_i ($i=1, 2$) を closed

simply connected PL- n -manifolds とする。 ($n \geq 5$).
 M_1 と M_2 が PL-isomorphic である必要十分条件は M_i の
embedding $M_i \subset S^{n+k}$ ($i=1,2$) と normal equivalence
 $b: (M_1; \nu_1) \rightarrow (M_2; \nu_2)$ が存在して $T(b)_*(C_1) = C_2$ を満
足することである。ここに C_i は $M_i \subset S^{n+k}$ ($i=1,2$) の
normal invariants, 即ち $T(\nu_i)$ ($i=1,2$) を $M_i \subset S^{n+k}$
の normal PL-bundle ν_i の Thom complex とするとき
 $C_i \in \pi_{n+k}(T(\nu_i))$ は collapsing 写像 $S^{n+k} \rightarrow T(\nu_i)$ の
homotopy 類, $T(b)_*$ は b により引きおこされる自然な hom-
omorphism $T(b)_*: \pi_{n+k}(T(\nu_1)) \rightarrow \pi_{n+k}(T(\nu_2))$ とします
。この Browder-Hirsch の定理の系として Hauptvermutung
に対する次の結果を得る。

定理 (Browder-Hirsch) M を simply connected
closed PL n -manifold ($n \geq 5$) とする。今、次の自然
な写像 $k_{PL}(M) \rightarrow k_{TOP}(M)$ が injective で更に $k_{PL}(\Sigma M) \rightarrow k_{TOP}(\Sigma M)$ が surjective ならば、 M に対して
Hauptvermutung が成立する。ここに ΣM は M の suspen-
sion とする。

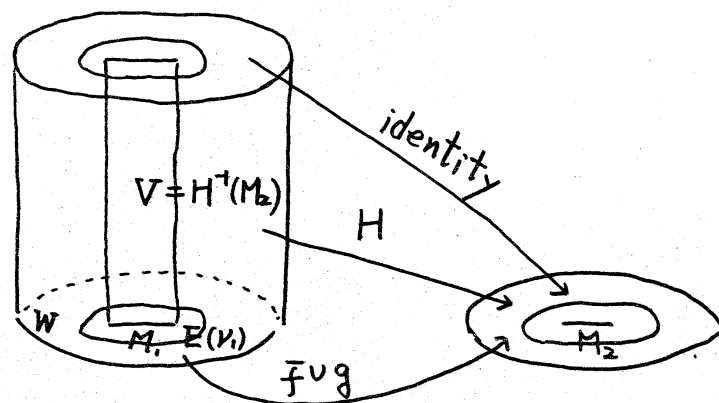
さて、Browder-Hirsch の定理をより幾何学的に考察する
ことにより Hauptvermutung の問題は実は或種の cobordism
construction の問題に reduce することがわかります。

まずはじめに M_2 を十分大きな次元の disk D^{n+k} に埋入し
 ておき, その normal disk bundle を ν_2 とします。 M_1
 から M_2 への homeomorphism f により ν_2 から M_1 上に
 induced される PL disk bundle を ν_1 とします。更に,
 ν_1 の total space $E(\nu_1)$ から ν_2 の total space $E(\nu_2)$
 へ f を cover する様な写像を $\bar{f}$ とします。 $E(\nu_2)$ は D^{n+k}
 に埋入されていますが, $D^{n+k} - \text{Int}(E(\nu_2))$ は D^{n+k} の境界
 である S^{n+k-1} と $E(\nu_2)$ の boundary $\partial E(\nu_2)$ の PL-cobor-
 dism を与えています。又 $\bar{f}$ を $E(\nu_1)$ の boundary $\partial E(\nu_1)$
 に制限した写像は homotopy equivalence



$\partial \bar{f} : \partial E(\nu_1) \rightarrow \partial E(\nu_2)$ を与えています。さて, 今 $\partial E(\nu_1)$
 を boundary とする様な PL-cobordism W と $\partial \bar{f}$ の exten-
 sion になる様な W から $D - \text{Int}(E(\nu_2))$ への homotopy eg-
 uivalence g が存在したとします。すると $\bar{f}$ と g とを合せる

ことにより $W \cup E(V_1)$ から D^{n+k} への homotopy equivalence
 が存在することになりますが, generalized Poincaré con-
 jecture により $W \cup E(V_1)$ は $(n+k)$ -次元 disk になります
 。従って f と g とを合せて作った写像は D^{n+k} からそれ自身
 への homotopy equivalence になり identity に homotopic
 になります。この homotopy $H: D^{n+k} \times I \rightarrow D^{n+k}$ ($I = [0, 1]$) を M_2 上で t -regular に修正し $H^{-1}(M_2)$ を考え
 ます。



$H^{-1}(M_2)$ は M_1 と M_2 の PL-cobordism V を与えています。
 次に V に PL-surgery をほどこして M_1 と M_2 の PL-h-co-
 bordism V' に変形します。そうすれば, PL h-cobordism
 theorem を用いることにより M_1 と M_2 は PL-isomorph な
 PL-manifolds になります。ここで PL-h-cobordism
 theorem を使うため考えている manifold の次元は 6 次元以
 上としなければなりません。以上の考察により Hauptvermu-

tung の本質は (少くも simply connected で 6次元以上の多様体に対しては) 次の cobordism construction problem になつたわけである。

cobordism construction problem : W を二つの PL-manifolds M, M' 間の PL-cobordism とし, f を PL-manifold N から M への homotopy equivalence とする。このとき, どのような条件の下に N を boundary とする PL-manifold V と V から W への homotopy equivalence F が存在して F が f の extension になるか?

ここまで来ますと Hauptvermutung は極めて homotopy 的な問題であることがわかります。D. Sullivan は, この cobordism construction problem に対して或る条件下に obstruction theory を構成し, かかる cobordism construction problem の obstruction は framed almost closed manifolds の framed cobordism classes のなす群

$$P_k = \begin{cases} 0 & k; \text{ odd} \\ \mathbb{Z}_2 & k \equiv 2 \pmod{4} \\ \mathbb{Z} & k \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}$$

を係数とする cohomology 群 $H^{RH}(W, M; P_k)$ の中にあり, 従つてこれらの cohomology 群が消える manifolds に対しては Hauptvermutung が成り立つことを示しました。

彼は更に obstruction を計算し次の定理を得ています。

定理 (Sullivan) M^n を simply connected closed PL-manifold ($n \geq 5$) とする。 M が次の条件を満足すれば M 上の PL-structure は一意である。

$$(1) \quad H^{4i+2}(M^n; \mathbb{Z}_2) = 0 \quad 4i+2 < n$$

$$(2) \quad H^{4i}(M^n; \mathbb{Z}) = \text{free abelian} \quad 4i < n$$

$P_R \cong \pi_R(G/PL)$ であるが obstruction を更に詳しく調べる問題が将来に残されている。

以上、講演の要旨です。

References

- [1] W. Browder - M. Hirsch ; Surgery on piecewise linear manifolds and applications, Bull. A.M.S. 72 (1966) 959 - 964.
- [2] R. Lashof - M. Rothenberg ; On the Hauptvermutung, triangulation of manifold and h-cobordism
同上 1040 - 1043.
- [3] D. Sullivan ; Ph.D. Thesis, Princeton Univ. 1966.
- [4] J.B. Wagoner ; Smooth and Piecewise linear surgery
- [5] J.B. Wagoner ; Producing PL-homeomorphism by surgery
([4], [5] to appear in Bull. A.M.S.)