

特異性の伝播と初期値問題の一意性

東 大 理 中 根 静 男

§ 1. 序

Treves [13] は、初期面が 2 重特異的な点を含むとき、初期値問題の解の一意性について、次の結果を得た。ここで、 $P(x, D) = D_1^2 - x_1^2 D_2^2 - C D_2$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i=1, 2$) とおく。(C は実パラメータ)。

定理 1.1 C は正の奇数でなるとする。

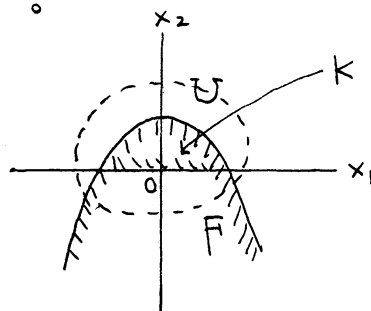
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を開集合、 F を Ω の閉集合で、

$x_2 \geq 0$ との交わり K はコンパクトに

なるとすると、C のみに依る整

数 $m (\geq 2)$ と K の開近傍 U があり、

$Pu = 0$, $\text{supp } u \subset F$ をみたす任意の $u \in C^m(\Omega)$ は U で消える。



定理 1.2 C は正の奇数とすると、 $Pu = 0$, $\text{supp } u = \{x_2 \leq \frac{x_1^2}{2}\}$

をみたす C^∞ 関数 u が存在する。

そして、Birkeland and Persson [2] は、定理 1.1 を $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ の場合に拡張した。一意性が低階に依るところが面白い。この論文では、主に定理 1.1 を $u \in \mathcal{B}(\Omega)$ 、つまり、 u が hyperfunction

の場合まで拡張することを目標にする。

考える operator も拡張して、 $\mathbb{R}^2$ で

$$(1.1) \quad Q(x, D) = (D_1 + ax^k D_2)(D_1 + bx^k D_2) - cx^{k-1} D_2$$

を考える。ここで $a, b \in \mathbb{R}, a < b, c \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$ である。 Q は x_1 方向には双曲型であることに注意する。原点を通る Q の特性曲線は $x_2 = \frac{s}{k+1} x_1^{k+1}$ ($s=a, b$) である。初期面として $x_2 = f(x_1)$, f は C^1 級で $f(0) = f'(0) = 0$ 、をとると原点で Q に關して 2 重特性的になる。(実は f は C^0 級でよい。) 以下、原点の近傍 Ω で考える。問題は、

$$(1.2) \quad \left. \begin{array}{l} u \in \mathcal{B}(\Omega) \\ Q(x, D)u = 0 \\ \text{supp } u \subset \{x_2 \leq f(x_1)\} \end{array} \right\} \Rightarrow u = 0 \text{ near } (0, 0)$$

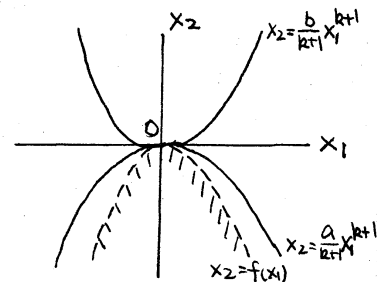
が成り立つか否か、である。

Case 1. $f(x_1) < \min_{s=a, b} \frac{s}{k+1} x_1^{k+1}$ のとき。

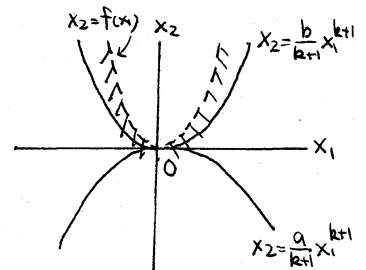
任意の C に対し、(1.2) は成り立つ。
これは、原点の依存領域で $u = 0$ であることから従う。

Case 2. $f(x_1) \geq \max_{s=a, b} \frac{s}{k+1} x_1^{k+1}$ のとき。

どんな C に対しても (1.2) は成り立たない。実際、[2] は、 $Pu = 0, \text{supp } u \subset \{x_2 \leq \max_{s=a, b} \frac{s}{k+1} x_1^{k+1}\}, \text{supp } u \ni (0, 0)$ をみたす、



($a=-1, b=1$ のとき)



C^∞ 解を原桌の近くで構成した。

以上は一意性が低階に依らぬ場合である。そこで、以下、

Case 3. $\min_{s=a,b} \frac{s}{k+1} x_1^{k+1} \leq f(x_1) < \max_{s=a,b} \frac{s}{k+1} x_1^{k+1} \quad (x_1 \neq 0)$ の場合を考える。

この場合には次の結果を得る。

定理 1.3 k が奇数のとき、 $C \neq (b-a) \{(n+1)(k+1) - m\}, (n=0, 1, 2, \dots, m=0, 1)$ なら、(1.2) が成り立つ。

定理 1.4 k が奇数のとき、 $C = (b-a) \{(n+1)(k+1) - m\}, (n=0, 1, 2, \dots, m=0, 1)$ なら、 $Qu = 0, \text{supp } u = \{x_2 \leq \frac{a}{k+1} x_1^{k+1}\}$ をみたす $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ が存在する。

定理 1.5 k が偶数のとき、 $C \neq (b-a) \{n(k+1) - \frac{1}{2}\}, (n \in \mathbb{Z})$ なら (1.2) が成り立つ。

定理 1.6 k が偶数のとき、 $C = (b-a) \{n(k+1) - \frac{1}{2}\}, (n \in \mathbb{Z})$ なら、 $Qu = 0, \text{supp } u = \{x_2 \leq \min_{s=a,b} \frac{s}{k+1} x_1^{k+1}\}$ をみたす $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ が存在する。

[13] では Carleman の L^2 評価を用いたが、hyperfunction では Carleman の方法 (これは元来、 C^∞ 係数の微分方程式の Cauchy 問題の解の一意性の証明に使うものであった!) は使えそうもない、我々の証明の発想は Holmgren の定理にある。Hörmander [6] の第 5 章で、初期面が単純特性的な桌を含むとき、その桌で陪特性曲線が初期面とどのように接するかによって一意性がいえたりいえないたりすることを Holmgren の定理を使って

述べている。つまり、右図で初期面

$\varphi(x)=0$ は x_0 を単純特性的とすると、



(1) のように陪特性曲線が $x \neq x_0$ で $\varphi(x) > 0$

に入っている場合は一意性は成り立つ。(2)



即ち、 $\odot u=0, \text{supp } u \subset \{\varphi(x) \leq 0\}$ なら $u=0$ near x_0 が成り立つ。しかし、(2) のように、 $\varphi(x) \leq 0$ に含まれる場合には一意性は崩れる。

単純特性的なら、特異性の伝播は1本道だからよいが、多重特性的の場合、その場で特異性が分岐するので、陪特性曲線の幾何的性質だけでなく、実際に特異性が分岐するかどうかという、精密な議論が必要になる。ここで低階が効いてくるのである。ただ Case 1 と Case 2 の場合は、各々 (1) と (2) に対応しているので一意性は低階に依らない。 $k=1, a=-1, b=1$ のとき、我々の定理は [13] の拡張になっている。我々の立場では、定理 4.1 の F に関する条件は大体 $f(x) < 0$ ($x \neq 0$) であり、初期面の位置に関しても条件をゆるめられる。[13] では Carleman の評価を使う際に技術的にこのような条件を課す必要があったと思われる。尚、我々の証明では、解の support の伝播もわかってしまうので、Holmgren の定理を使う必要がないことと付記しておく。 実際には、

§ 2 解の特異性の伝播について

(1.1) の type a operator に対する distribution 解の wave front の伝播

に関して、最近、Alinhac [1], Hanges [5], Taniguchi-Tozaki [12] 等が調べられている。以下、(1.1) の hyperfunction 解の singular spectrum (SS とかく。distribution of analytic wave front に当たる) の伝播について述べる。すると §1 の結果に符号する結果が出てくる。以下に述べる結果は [1], [5], [12] の結果と同じで、hyperfunction で考えても違いが出てこない。これは、恐らく (1.1) が x_1 方向に distribution well-posed な hyperbolic op. であるためだろう。実際、以下の議論に現れる基本的な解 $E_j, E_s^\pm$ は全て distribution である。尚、以下の議論は、[1] の hyperfunction 版である。

$E_j(x)$ ($j=0,1$) を Cauchy 問題

$$(2.1) \quad \begin{cases} Qu = 0 \\ D_1^i u|_{x_1=0} = u_i(x_2) \end{cases}$$

の基本解系とする。 E_j は、

$$(2.2) \quad QE_j = 0 \quad D_1^i E_j|_{x_1=0} = \delta_i^j \delta(x_2)$$

を満たす。すると (2.1) の解 u は、

$$u(x) = \sum_{j=0,1} \int E_j(x_1, x_2 - y_2) u_j(y_2) dy_2$$

と書ける。次に "pure" な解 ($\pm x_1 \geq 0$) $E_s^\pm$ ($s=a, b$) を

$$(2.3) \quad \begin{cases} QE_s^\pm = 0 \\ \text{supp } E_s^\pm \cap \{\pm x_1 \geq 0\} \subset \{x_2 \leq \frac{s}{k+1} x_1^{k+1}, \pm x_1 \geq 0\} \\ S\dot{S}(E_s^\pm) \cap \{\pm x_1 \geq 0, \xi_2 > 0\} = (\text{bich. strip of } D_1 + s x_1^k D_2 \text{ through } (0,0) : \mathbb{R}(0,1) \cap \omega) \Big|_{\pm x_1 \geq 0} \end{cases} \quad (\xi_2 \text{ is } x_2 \text{ a dual variable})$$

$$(2.4) \quad \begin{pmatrix} E_0 \\ E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^\pm & C_2^\pm \\ C_1^\pm R(D_2) & C_2^\pm R(D_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_a^\pm \\ E_b^\pm \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順})$$

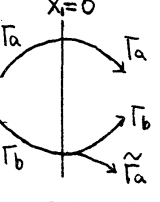
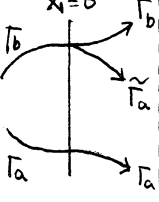
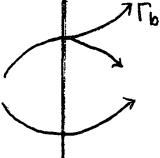
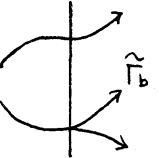
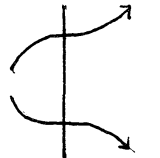
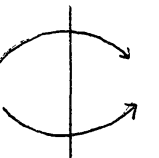
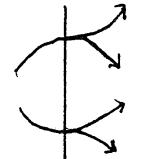
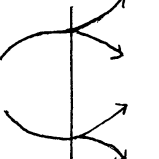
を満たすようにとる。\$C_{ij}^\pm\$ は \$a, b, c, k\$ のみに依る定数、\$R(D_2)\$ は \$\text{const} \times \{(x_2 + i0)^{-1+\frac{1}{k+1}} - (x_2 - i0)^{-1+\frac{1}{k+1}}\}\$ a convolution op. で order(\$\frac{1}{k+1}\$) の PDDP である。(2.1) の解 \$u\$ は、

$$(2.5) \quad u(x) = \int E_a^\pm(x_1, x_2 - y_2) \{ C_1^\pm u_0(y_2) + C_2^\pm R(D_2) u_1(y_2) \} dy_2 \\ + \int E_b^\pm(x_1, x_2 - y_2) \{ C_1^\pm u_0(y_2) + C_2^\pm R(D_2) u_1(y_2) \} dy_2$$

と書ける。(2.3)より、第1項 (resp. 第2項) は、\$x_1 > 0, x_2 > 0\$ で初期値の特異性を \$D + ax_1^k D_2\$ (resp. \$D + bx_1^k D_2\$) の bich. strip のみに沿って伝えるものである。support についても同様のことが言える。故に、解の特異性や位の伝播を調べる上では、“pure”な解が本質的である。半空間で“pure”な解も、全空間で“pure”とは言えず、\$x=0\$で特異性が分岐する場合が出てくる。それは位階の \$c\$ が影響する。それを調べるには、\$E_a^+, E_b^+\$ を \$x_1 < 0\$ で \$E_a^-, E_b^-\$ を用いて表わしてやらねばよい。

$$(2.6) \quad \begin{pmatrix} E_a^+ \\ E_b^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_a^- \\ E_b^- \end{pmatrix} \quad (x_1 < 0)$$

実は (2.6) は全空間で成り立つ。\$g_{ij}\$ は \$a, b, c, k\$ に依る定数であり、\$g_{ij}\$ が消えるか否かで特異性の分岐が決まる。\$g_{ij}\$ は後で具体的に計算する。これから、一般の解の特異性の分岐も決まる。\$(g'_{ij}) = (g_{ij})^{-1}\$ を計算すれば (実は、\$g'_{ij} = 0 \Leftrightarrow g_{ij} = 0\$)、次表を得る。

$k : \text{odd}$		$k : \text{even}$	
$k = 1$ $k \geq 3$			
① 	$\frac{c}{b-a} = (n+1)(k+1) - m$ ($n=0,1,2,\dots, m=0,1$)	⑤ 	$\frac{c}{b-a} = (n+1)(k+1) - m$ ($n=0,1,2,\dots, m=0,1$)
② 	$\frac{c}{b-a} = -n(k+1) - m$ ($n=0,1,2,\dots, m=0,1$)	⑥ 	$\frac{c}{b-a} = -n(k+1) - m$ ($n=0,1,2,\dots, m=0,1$)
③ 	/ $\frac{c}{b-a} = n(k+1) - \frac{1}{2}$ $-\frac{k+1}{2\pi} i \log(\omega \frac{\pi}{k+1})$ ($n \in \mathbb{Z}$)	⑦ 	$\frac{c}{b-a} = n(k+1) - \frac{1}{2}$ ($n \in \mathbb{Z}$)
④ 		⑧ 	otherwise

ここで $\Gamma_s, \tilde{\Gamma}_s$ は $D_1 + sX^k D_2$ の bich. strips, Γ_s は本来の、 $\tilde{\Gamma}_s$ は分岐した特異性の流れを示す。 $a=-1, b=1, c \in \mathbb{R}$ のときは [12] の結果と全く同じである。上は $\beta_2 > 0$ で考えたが、 $\beta_2 < 0$ では、 $c \in \mathbb{C}$ の複素共役によればよい。つまり、変わる所は③のみで $-i$ にすればよい。③と⑦の場合は特異性が分岐するということよりは、乗りかえるという感じである。この“乗りかえ”は、 $k=1$ のときはおこらない。これは、 $k \geq 2$ のときは、2つの bich. strips が 2重特性点で接しているのに対し、 $k=1$ のときは垂直になっているためだと思われる。定理 1.3 ~ 1.6 と比べて

みると、一意性に関係するのは、①と⑦の場合である。次の Cauchy 問題を考えると主には、③と⑦が関係してくる。

$$(2.7) \quad \left. \begin{array}{l} u \in \mathcal{B}(\Omega) \\ Q u = 0 \\ \text{supp } u \subset \{x_2 \geq f(x_1)\} \end{array} \right\} \Rightarrow u \stackrel{?}{=} 0 \text{ near } (0,0)$$

不等号の向きに注意されたい。

§3. 前節の結果の証明

$E_{\pm}^{\pm}$ の構成法は、かなり天下りの的であるが、以下に示す。まず、 $E_j (j=0,1)$ を構成する。そのためには、複素領域で次の特異 Cauchy 問題 (3.1) を解き、その解の実軸への境界値をとればよい。この方法は、単純特性のときに Kawai [9] が構成した方法をまねたものである。

補題 3.1

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q(z, D) u_j(z) = 0 \\ D_1^i u_j|_{z_1=0} = \delta_{ij} \cdot z_2^{-1} \quad (i, j=0,1) \end{array} \right.$$

の解は、 $|Z/W_b'| < 1$ で

$$(3.2) \quad u_0(z) = W_b'^{-1} F(1, \gamma; 1-\gamma; -Z/W_b'),$$

$$(3.3) \quad u_1(z) = z_1 \cdot W_b'^{-1} F(1, \gamma+\delta; 1+\delta; -Z/W_b'),$$

また、 $|Z/W_a'| < 1$ で、

$$(3.4) \quad u_0(z) = W_a'^{-1} F(1, 1-\gamma-\delta; 1-\delta; Z/W_a')$$

$$(3.5) \quad u_1(z) = z_1 \cdot W_a'^{-1} F(1, 1-\gamma; 1+\delta; Z/W_a')$$

で表わされる。ここで、 F は超幾何函数、 $W_s' = z_2 - \frac{s}{k+1} z_1^{k+1}$,

$$Z = \frac{b-a}{k+1} z_1^{k+1}, \quad \delta = \frac{1}{k+1}, \quad \gamma = \frac{c}{(b-a)(k+1)} \text{ である。}$$

この補題は、Chi Min You [3], 柏原・河合 [8], 浦部 [14] 等で計算されているもので、解を z_1 について Taylor 展開し、各係数 (z_2 の函数) も逐次決めていけばよい。超幾何函数は、

$$F(a, b; c; z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (b)_r}{(c)_r r!} z^r \text{ で、元来、}|z| < 1 \text{ で収束する級数}$$

だが、全平面に (一般には多価に) 解析接続され、 $z=0, 1, \infty$ に特異点をもつ。 $z=0$ で正則な枝をとれば、 $z=1, \infty$ に対応する u_0, u_1 の特異点は、 $z_2 - \frac{s}{k+1} z_1^{k+1} = 0$ ($s=a, b$) で、これは初期値の特異性が Q の特性曲線に沿って伝播することと意味する。尚、補題 3.1 は、Hamada の定理 (cf. Hamada [4]) の 2 重特性的な場合の 1 例である。また、(3.2), (3.3) と (3.4), (3.5) は、同じ Cauchy 問題 (3.1) の解であるから、Cauchy-Kowalevski の定理から、その共通の定義域では一致する。つまり、互いに他の解析接続になっている。

次に、 u_0, u_1 の境界値を、 $\pm \operatorname{Im} (z_2 - \frac{s}{k+1} z_1^{k+1}) > 0$ ($s=a, b$) からとり、その差をとれば求める基本解が得られるが、その前に、よく知られた超幾何函数の接続公式を用いて、解を全空間 $\mathbb{C}^2$ に接続しておく。その際、一般には多価になるので、適当な枝をとる。枝のとり方には注意を要し、みやすくするために、まず $z_1 = x_1 \in \mathbb{R}$ としておいて、 x_1 をやうな x ータをみ

なして、 $\pm \operatorname{Im} z_2 > 0$ から境界値をとる。次の記号を用いる。

$$X = \frac{b-a}{k+1} x_1^{k+1}, \quad W_S = z_2 - \frac{S}{k+1} x_1^{k+1}, \quad Y = \mathbb{R}_{x_1} \times \mathbb{C}_{z_2}$$

$$U_S = \{ (x_1, z_2) \in Y; |X/W_S| < 1 \}$$

$$V_S = \{ (x_1, z_2) \in Y; |X/W_S| > 1 \}$$

$$V_S^\pm = \{ (x_1, z_2) \in V_S; \pm x_1 > 0 \}$$

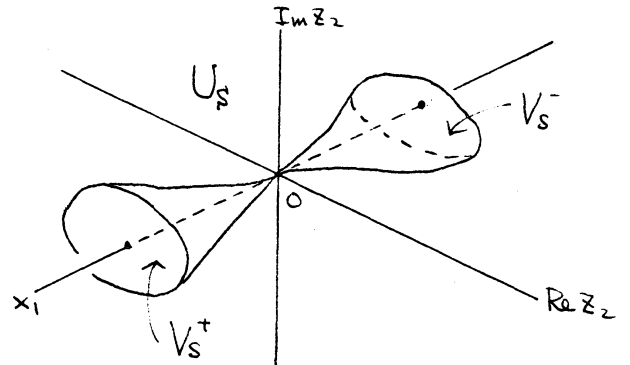
(3.2) と (3.3) は U_b で、

(3.4) と (3.5) は U_a で

正則である。

枝としては原点で正則

な a をとる。



さて、(3.3) を V_b に接続してみよう。尚、以下の議論で、 γ は関数の pole 等は、一切身にする必要はなく、うまく意味付けられることは保証できる。

$$\begin{aligned} (3.6) \quad u_0(x_1, z_2) &= W_b^{-1} \left\{ \frac{-\delta}{\delta-1} \cdot \frac{W_b}{X} F(1, 1+\delta; 2-\delta; -W_b/X) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(1-\delta)\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(1-\delta-\delta)} (W_b/X)^\delta F(\delta, \delta+\delta; \delta; -W_b/X) \right\} \\ &= \Gamma(1-\delta) \left\{ \frac{\delta}{\Gamma(2-\delta)} X^{-1} F(1, 1+\delta; 2-\delta; -W_b/X) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(1-\delta-\delta)} W_b^{-1} (W_b/X)^\delta (W_a/X)^{-\delta-\delta} \right\} \end{aligned}$$

ここで、 $F(a, b; a; z) = (1-z)^{-b}$ を用いた。また $(\cdot)^\delta$ 等は主枝をとる。 $X > 0, \operatorname{Im} z_2 > 0$ では、

$$(3.7) \quad (W_b/X)^\delta (W_a/X)^{-\delta-\delta} = \left(\frac{b-a}{k+1} \right) x_1 W_a^{-\delta-\delta} W_b^\delta,$$

$x_1 < 0$, $\text{Im } z_2 > 0$ では,

$$(3.8) \quad (W_b/x)^\delta (W_a/x)^{-\delta-\delta} = \begin{cases} -(\frac{b-a}{k+1})^\delta x_1 W_a^{-\delta-\delta} W_b^\delta & (k: \text{odd}) \\ -e^{\pi\delta i} (\frac{b-a}{k+1})^\delta x_1 W_a^{-\delta-\delta} W_b^\delta & (k: \text{even}). \end{cases}$$

$z = z$, $V_b^\pm$ で.

$$(3.9) \quad u_a^\pm(x_1, z_2) \equiv \frac{\delta}{\Gamma(2-\delta)} \cdot X^{-1} \cdot F(1, 1+\delta; 2-\delta; -W_b/x) \quad (\text{in } V_b^\pm)$$

と定義すると, x_1 を固定したとき, $u_a^\pm(x_1, z_2)$ は, $z_2 = \frac{a}{k+1} x_1^{k+1}$,

∞ のみで特異。一方 $w(x_1, z_2) \equiv \Gamma(1-\delta) (\frac{b-a}{k+1})^\delta x_1 W_a^{-\delta-\delta} W_b^{\delta-1}$ は

全平面 Y に自然に (多価に) 接続されるので, (3.6) から逆に

$u_a^\pm$ の U_b への接続

$$(3.10) \quad u_a^\pm(x_1, z_2) = \frac{u_0(x_1, z_2)}{\Gamma(1-\delta)} - \frac{w(x_1, z_2)}{\Gamma(1-\delta-\delta)}$$

$$(3.11) \quad u_a^\pm(x_1, z_2) = \begin{cases} \frac{u_0(x_1, z_2)}{\Gamma(1-\delta)} + \frac{w(x_1, z_2)}{\Gamma(1-\delta-\delta)} & (k: \text{odd}) \\ \frac{u_0(x_1, z_2)}{\Gamma(1-\delta)} + e^{\pi\delta i} \frac{w(x_1, z_2)}{\Gamma(1-\delta-\delta)} & (k: \text{even}) \end{cases}$$

が得られる。次に, (3.4) を V_a に接続すると, 同様にして,

$$(3.12) \quad u_0(x_1, z_2) = \Gamma(\delta+\delta) \left\{ -\frac{\delta}{\Gamma(1+\delta+\delta)} \cdot X^{-1} \cdot F(1, 1+\delta; 1+\delta+\delta; W_a/x) \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(1-\delta)}{\Gamma(\delta)} \cdot W_a^{-1} \cdot (-W_a/x)^{1-\delta-\delta} (-W_b/x)^{\delta-1} \right\}$$

$z = z$, $V_a^\pm$ で.

$$(3.13) \quad u_b^\pm(x_1, z_2) \equiv -\frac{\delta}{\Gamma(1+\delta+\delta)} \cdot X^{-1} \cdot F(1, 1+\delta; 1+\delta+\delta; W_a/x) \quad (\text{in } V_a^\pm)$$

と定義すると, $u_b^\pm$ は x_1 を fix したとき, $z_2 = \frac{b}{k+1} x_1^{k+1}$, ∞ のみ

で特異。上と同様にして, $u_b^\pm$ も U_a に接続されて,

$$(3.14) \quad u_b^+(x_1, z_2) = \frac{u_0(x_1, z_2)}{\Gamma(\delta + \delta)} - e^{\pi\delta i} \frac{w(x_1, z_2)}{\Gamma(\delta)}$$

$$(3.15) \quad u_b^-(x_1, z_2) = \begin{cases} \frac{u_0(x_1, z_2)}{\Gamma(\delta + \delta)} + e^{\pi\delta i} \frac{w(x_1, z_2)}{\Gamma(\delta)} & (k: \text{odd}) \\ \frac{u_0(x_1, z_2)}{\Gamma(\delta + \delta)} + \frac{w(x_1, z_2)}{\Gamma(\delta)} & (k: \text{even}) \end{cases}$$

ここで、直接計算により次を得る。

$$\text{補題 3.2} \quad \begin{cases} Q(\delta, D) w(z) = 0 \\ Q(z, D) u_s^\pm(z) = 0 \end{cases}$$

尚、(3.9)で u_a^+ と u_a^- は同じ形をしているが、定義 V_b^+ と V_b^- が $V_b^+ \cap V_b^- = \emptyset$ 故、上のように枝を指定して接続したとき、互いにつながるとは限らないことに注意しておく。上の関係式から $u_b^\pm$ は γ までは接続されて

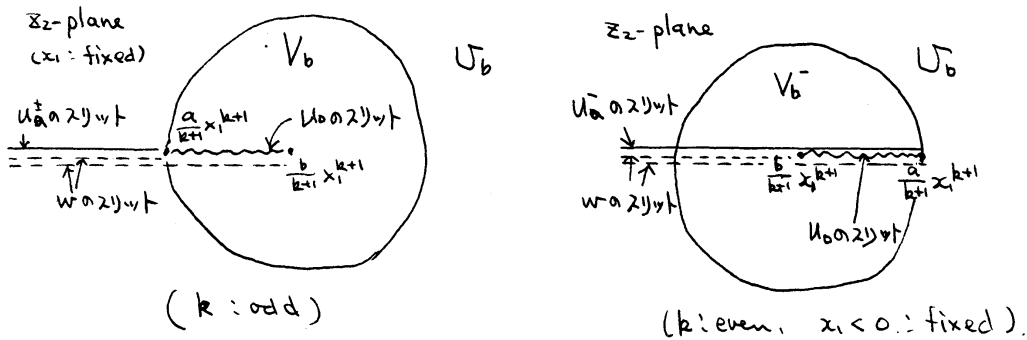
$$(3.16) \quad \begin{cases} u_a^+ = \begin{cases} \left(1 + \frac{2}{A \cdot \Gamma(\delta) \Gamma(1-\delta)}\right) u_a^- - \frac{2}{A \Gamma(1-\delta) \Gamma(1-\delta-\delta)} u_b^- & (k: \text{odd}) \\ \left(1 - \frac{1+e^{\pi\delta i}}{B \cdot \Gamma(\delta) \Gamma(1-\delta)}\right) u_a^- + \frac{1+e^{\pi\delta i}}{B \Gamma(1-\delta) \Gamma(1-\delta-\delta)} u_b^- & (k: \text{even}) \end{cases} \\ u_b^+ = \begin{cases} \frac{2e^{\pi\delta i}}{A \cdot \Gamma(\delta) \Gamma(\delta+\delta)} u_a^- + \left(1 - \frac{2e^{\pi\delta i}}{A \cdot \Gamma(\delta) \Gamma(1-\delta)}\right) u_b^- & (k: \text{odd}) \\ -\frac{1+e^{\pi\delta i}}{B \Gamma(\delta) \Gamma(\delta+\delta)} u_a^- + \left(1 + \frac{1+e^{\pi\delta i}}{B \Gamma(\delta) \Gamma(1-\delta)}\right) u_b^- & (k: \text{even}) \end{cases} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、 $A = \frac{e^{\pi\delta i}}{\Gamma(\delta) \Gamma(1-\delta)} - \frac{1}{\Gamma(\delta+\delta) \Gamma(1-\delta-\delta)}$, $B = \frac{e^{\pi\delta i}}{\Gamma(\delta+\delta) \Gamma(1-\delta-\delta)} - \frac{1}{\Gamma(\delta) \Gamma(1-\delta)}$ とおいた。A, B は δ の entire function で、 $\delta \neq 0$ なる $\delta \in \mathbb{C}$ に対しても $A, B \neq 0$ は容易にわかる。
 であること

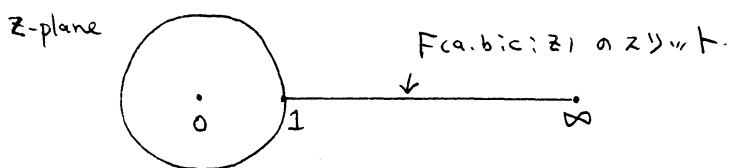
さて、

$$\begin{cases} E_j(x) \equiv -\frac{1}{2\pi i} (u_j^-(x_1, x_2 + i0) - u_j^-(x_1, x_2 - i0)) & (j=0,1) \\ E_s^\pm(x) \equiv -\frac{1}{2\pi i} (u_s^\pm(x_1, x_2 + i0) - u_s^\pm(x_1, x_2 - i0)) & (s=a,b) \end{cases}$$

と定義すると、 $E_j, E_s^\pm$ が (2.2), (2.3) を満たすことは容易にわかる。(複素領域での性質がその境界値である hyperfunction の性質を規定する。) 台に関する条件は、 $u_s^\pm(x_1, z_2)$ のスリットがどこにあるかをみてやればよい。 k が even で、 $x_1 < 0$ のとき



きは、図(右の)のように、スリットを半回転することに注意する。これは、超幾何函数のスリットが、下図のように入る



ことが示される。(2.4)は $E_j, E_s^\pm$ の $x_1=0$ での初期値を比較すれば、Holmgrenの定理から出る。 $C_{ij}^\pm$ も求まる。(2.6)は(3.16)から出る。 g_{ij} は具体的に求まった。 g_{ij} が消えるかどうかをみてやれば、§2の結果は示される。尚、台の伝播に関しても

同様のことが言えるわけだが、この事実を用いて、§4で定理を証明する。

§4. 定理の証明

まず定理1.3を示す。定理1.5も全く同様である。(1.2)の仮定を満たす u を持ってくると $u_j(x_2) = D_1^j u|_{x_1=0}$ が定義できて、 $\text{supp } u_j \subset (-\infty, 0]$ が成り立つ。定理1.3の仮定から、実は $u_j(x_2) = 0$ near $x_2 = 0$ が出ることを示せばよい。何とすれば、 Q は x_1 方向に双曲型で有限伝播速度を持つので、 u_0, u_1 の台は、 $(0, 0)$ の十分小さい近傍には伝播しないからである。

$\text{supp } u_j \neq 0$ を言うためには Green の公式を用いる。 Q の adjoint op. を Q^* とし、 $F_j, F_S^\pm$ を、各々 $Q^*(x, D_1, -D_2) = (D_1 - b x^k D_2) \times (D_1 - a x^k D_2) - c x^{k-1} D_2$ の Cauchy 問題の基本解系、"pure" 解とすると、この op. は、 Q で a, b を各々 $-b, -a$ に置きかえただけだから、 $F_S^\pm$ に関して、§2 と全く同じ関係が成り立つ。とくに、 $\wedge$ (これは $(a, b) \rightarrow (-b, -a)$ で不変故)

$$(4.1) \quad \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}^\pm & c_{12}^\pm \\ c_{21}^\pm R(D_2) & c_{22}^\pm R(D_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{-b}^\pm \\ F_{-a}^\pm \end{pmatrix}$$

($c_{ij}^\pm$ は前出と同じもの) が成り立つ。

補題 4.1 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$(4.2) \quad -\frac{\delta(y_2)}{|C^\pm|} = \int E_b^\pm(\pm\varepsilon, x_2) \cdot (D_1 R(D_2) F_{-b}^\pm)(\pm\varepsilon, y_2 - x_2) dx_2 \\ - \int (D_1 E_b^\pm)(\pm\varepsilon, x_2) \cdot (R(D_2) F_{-b}^\pm)(\pm\varepsilon, y_2 - x_2) dx_2$$

$$(4.3) \quad \frac{\delta(y_2)}{|C^\pm|} = \int E_a^\pm(\pm\varepsilon, x_2) \cdot (D_1 R(D_2) F_{-a}^\pm)(\pm\varepsilon, y_2 - x_2) dx_2 \\ - \int (D_1 E_a^\pm)(\pm\varepsilon, x_2) \cdot (R(D_2) F_{-a}^\pm)(\pm\varepsilon, y_2 - x_2) dx_2$$

(複号同順)。そこで $C^\pm = \det(C_{ij}^\pm) (\neq 0)$ とおいた。

証明 Green の公式により、 $Qu = 0$ を満たす u に対し、

$$0 = \iint Q(x, D) [u(x) \chi(x_1) \chi(\varepsilon - x_1)] \cdot F_j(x_1, y_2 - x_2) dx \\ = \delta_0^j \cdot u_1(y_2) - \delta_1^j \cdot u_0(y_2) \\ + \int u(\varepsilon, x_2) (D_1 F_j)(\varepsilon, y_2 - x_2) dx_2 - \int (D_1 u)(\varepsilon, x_2) F_j(\varepsilon, y_2 - x_2) dx_2$$

($j=0,1$)。そこで $u_j(x_2) = D_1^j u|_{x_1=0}$ とおいた。そこで $u = E_\pm$ ($i=0,1$) とおいて計算すれば補題は示される。

(2.4) と (4.1) を用いて

系 4.2 $v \in B(R)$ 、 $\sup v$ は上に有界とすると

$$-\frac{v(y_2)}{|C^\pm|} = \int [\int E_b^\pm(\pm\varepsilon, x_2 - t) v(t) dt] \cdot (D_1 R(D_2) F_{-b}^\pm)(\pm\varepsilon, y_2 - x_2) dx_2 \\ - \int [(D_1 E_b^\pm)(\pm\varepsilon, x_2 - t) v(t) dt] \cdot (R(D_2) F_{-b}^\pm)(\pm\varepsilon, y_2 - x_2) dx_2$$

定理 1.3 の証明 $x_1 = 0$ は Ω に關して非特性的だから、(1.2)

の仮定を満たす u は x_1 を実解析的パラメータに持ち、 $x_1 = 0$

に制限できる。そこで $u_j(x_2) \equiv D_1^j u|_{x_1=0}$ とおく。 $\sup u_j < (-\infty, 0]$

であり、(2.5)で $\widehat{u}_a^+(y_2) \equiv c_1^+ u_0(y_2) + c_{2,1}^+ R(D_2) u_1(y_2)$ 、 $\widehat{u}_b^+(y_2) =$

$c_{1,2}^+ u_0(y_2) + c_{2,2}^+ R(D_2) u_1(y_2)$ とおくと、その形から、 $R(D_2)$ は台

を上方には増やさないので、 $\sup \widehat{u}_s^+ < (-\infty, 0]$ ($s=a, b$)。か

つ、 $u(x)$ は

$$(4.4) \quad u(x) = \sum_{s=a,b} \int E_s^+(x_1, x_2 - y_2) \widehat{u}_s^+(y_2) dy_2$$

と書ける。 E_S^+ の性質から $x_1 \geq 0$ で、 $\text{supp} \left[\int E_a^+(x_1, x_2 - \gamma_2) \hat{u}_a^+(\gamma_2) d\gamma_2 \right]$
 $\subset \{x_2 \leq \frac{a}{k+1} x_1^{k+1}\}$ 故、 $x_1 \geq 0$ で、 $\text{supp} \left[\int E_b^+(x_1, x_2 - \gamma_2) \hat{u}_b^+(\gamma_2) d\gamma_2 \right]$
 $\subset \{x_2 \leq f(x_1)\}$ 。一方、(4.2) から、 $\varepsilon > 0$ に対し、

$$-\frac{\hat{u}_b^+(\gamma_2)}{|\mathbb{C}^\pm|} = \int \left[\int E_b^+(\varepsilon, x_2 - t) \tilde{u}_b^+(t) dt \right] \cdot (D_1 R(D_2) F_{-b}^+)(\varepsilon, \gamma_2 - x_2) dx_2 \\ - \int \left[\int (D_1 E_b^+)(\varepsilon, x_2 - t) \tilde{u}_b^+(t) dt \right] \cdot (R(D_2) F_{-b}^+)(\varepsilon, \gamma_2 - x_2) dx_2$$

だが、 $\text{supp}_{x_2} F_{-b}^+(\varepsilon, \gamma_2 - x_2) \subset \{\gamma_2 - x_2 \leq -\frac{b}{k+1} \varepsilon^{k+1}\}$ 故、convolution
 の台をみると、

$$\text{supp } \tilde{u}_b^+(\gamma_2) \subset \{\gamma_2 \leq f(\varepsilon) - \frac{b}{k+1} \varepsilon^{k+1} (< 0)\}$$

が出る。故に、 $\hat{u}_b^+(\gamma_2) = 0$ near $\gamma_2 = 0$ 。故に、 $\hat{u}_b^+$ は u に、
 $(0,0)$ の近傍では影響しない。次に (2.6) から、 $x_1 < 0$ では、

$$u(x) = \int E_a^-(x_1, x_2 - \gamma_2) \{g_{11} \hat{u}_a^+(\gamma_2) + g_{21} \hat{u}_b^+(\gamma_2)\} d\gamma_2 \\ + \int E_b^-(x_1, x_2 - \gamma_2) \{g_{12} \hat{u}_a^+(\gamma_2) + g_{22} \hat{u}_b^+(\gamma_2)\} d\gamma_2$$

である。 $(0,0)$ の近くで考えれば、 $\hat{u}_b^+$ を含む項は無視できる

ことに注意する。(3.16) より、 $g_{12} = -\frac{2}{A\Gamma(1-\delta)\Gamma(1-\delta\delta)}$ であり、

定理の仮定： $\mathbb{C} \neq (b-a)\{m+1(k+1)-m\}$ ($n=0,1,2,\dots, m=0,1$) は

$g_{12} \neq 0$ と同値である。そこで、 $x_1 \geq 0$ のときと同様にして、

$x_1 \leq 0$ で、

$$\text{supp} \left[\int E_a^-(x_1, x_2 - \gamma_2) \hat{u}_a^+(\gamma_2) d\gamma_2 \right] \subset \{x_2 \leq \frac{a}{k+1} x_1^{k+1}\}$$

と仮定から、

$$\text{supp} \left[\int E_b^-(x_1, x_2 - \gamma_2) \hat{u}_a^+(\gamma_2) d\gamma_2 \right] \subset \{x_2 \leq f(x_1)\}$$

が $(0,0)$ の十分近くで言え、(4.2) から、 $\varepsilon > 0$ (十分小) に対し、

$$\sup \hat{u}_a^+(y_2) < \{ y_2 \leq f(-\varepsilon) - \frac{b}{k+1} \varepsilon^{k+1} (< 0) \}$$

故. $\hat{u}_a^+(y_2) = 0$ near $y_2 = 0$ が出る。(4.4) の形から.

$u(x) = 0$ near $(0, 0)$ が従う。尚、 ε と $u_j(y_2) = 0$ near $y_2 = 0$ は明らかだろう。

定理 1.4 の証明 $\frac{c}{b-a} = (n+1)(k+1) - 1$ ($n=0, 1, 2, \dots, m=0, 1$)

のときは、(3.4) が、

$$\begin{aligned} u_0(z) &= W_a^{-1} F\left(1, 1 - \frac{1}{k+1} - \frac{c}{(b-a)(k+1)}; \frac{k}{k+1}; Z/W_a\right) \\ &= (z_2 - \frac{a}{k+1} z_1^{k+1})^{-1} F\left(1, -n; \frac{k}{k+1}; \frac{b-a}{k+1} z_1^{k+1} / (z_2 - \frac{a}{k+1} z_1^{k+1})\right) \\ &= \sum_{r=0}^n \frac{(-n)_r (1)_r}{(\frac{k}{k+1})_r r!} \left(\frac{b-a}{k+1} z_1^{k+1}\right)^r (z_2 - \frac{a}{k+1} z_1^{k+1})^{-r-1} \end{aligned}$$

と書ける。これは、 $u_0(z)$ が全空間 $\mathbb{C}^2$ で 1 価になる場合である。 ε と u と

$$E_0(x) = \sum_{r=0}^m \frac{(-n)_r (-1)^r}{(\frac{k}{k+1})_r r!} \left(\frac{b-a}{k+1} x_1^{k+1}\right)^r \delta^{(r)}\left(x_2 - \frac{a}{k+1} x_1^{k+1}\right) \quad \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^\infty$$

となる。故に、 $u_0(y_2)$ として、 $(-\infty, 0]$ に台をちょうど持つ $\mathbb{C}^\infty$ 関数もとり、

$$\begin{aligned} u(x) &= \int E_0(x_1, x_2 - y_2) u_0(y_2) dy_2 \\ &= \sum_{r=0}^m \frac{(-n)_r}{(\frac{k}{k+1})_r r!} \left(\frac{b-a}{k+1} x_1^{k+1}\right)^r u^{(r)}\left(x_2 - \frac{a}{k+1} x_1^{k+1}\right) \end{aligned}$$

とあければ、 ε が求める null solution である。尚、 ε と u と

$$E_0(x) = \frac{e^{\pi i \delta}}{A \Gamma(n+1-\delta)} E_a^+(x), \quad E_a^+(x) = E_b^-(x),$$

で、要するに、基本解 E_0 が全空間 $\mathbb{R}^2$ で "pure" になる。

$\frac{c}{b-a} = (n+1)(k+1)$ のときは、(3.5) が "多項式" になり、上と同様に ε null solution が構成できる。 ε と u と、基本解 E_1

が全空間 $\mathbb{R}^2$ で "pure" になる。

定理 1.6 の証明も、定理 1.4 の証明とほとんど同様にできる。

References

- [1] S. Alinhac : Branching of singularities for a class of hyperbolic operators. Indiana Univ. Math. J., 27, 1027-1037 (1978).
- [2] B. Birkeland and J. Persson : The local Cauchy problem in $\mathbb{R}^2$ at a point where two characteristic curves have a common tangent. J. Diff. Eq., 30, 64-88 (1978).
- [3] Chi Min-You : On the Cauchy problem for a class of hyperbolic equations with data given on the degenerate parabolic line. Acta Math. Sinica, 8, 521-529 (1958).
- [4] Y. Hamada : The singularities of the solutions of the Cauchy problem. Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., 5, 21-40 (1969).
- [5] N. Hanges : Parametrices and propagation of singularities for operators with non-involutive double characteristics. Indiana Univ. Math. J., 28, 87-97 (1979).
- [6] L. Hörmander : "Linear Partial Differential Operators". Springer, Berlin (1963).

- [7] 大井鉄郎: 「特殊函数」. 岩波全書 (1962).
- [8] 相原-河合: 単一特性的でない場合の浜田の定理について.
数理解析研究所講究録, 226, 105-113 (1975).
- [9] T. Kawai: Construction of local elementary solutions for linear partial differential equations with analytic coefficients (I).
Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., 7, 363-397 (1971).
- [10] S. Nakane: Propagation of singularities and uniqueness of the Cauchy problem at a class of doubly characteristic points.
東京大学修士論文 (1980).
- [11] M. Sato, T. Kawai and M. Kashiwara: Microfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Math., 287, Springer, 265-529 (1973).
- [12] K. Taniguchi and Y. Tozaki: A hyperbolic equation with double characteristics which has a solution with branching singularities.
To appear.
- [13] F. Trèves: Discrete phenomena in uniqueness in the Cauchy problem.
Proc. Amer. Math. Soc., 46, 229-233 (1974).
- [14] 浦部治一郎: ある種の線型2階方程式に対する浜田の定理について, 東京大学修士論文 (1975).