

Shifts の周辺の話題について

甲子園大経常情報 榎本雅俊 (Masatoshi Enomoto)

V. Jones の仕事以来, 作用環の指数理論は多くの異なる方向で発展している. このノートでは, Powers [43] により始められた $*$ -endomorphisms の分類問題についての話題を, 筆者の関心した観点から述べる. また, それらに関連した話題についても触れることにする.

[I] Powers の binary shifts について

ここでは後で必要となる言葉と概念を述べ, Powers の仕事を概説し, 我々の結果との関連を述べる.

定義 1 $\mathcal{O}$ を単位元をもつ C^* -algebra とする. $\text{End}(\mathcal{O})$ で, $\mathcal{O}$ 上の $*$ -endomorphisms 全体を表すとする. $\alpha, \beta \in \text{End}(\mathcal{O})$ として, α と β が conjugate であるというのを, ある $\gamma \in \text{Aut}(\mathcal{O})$ で $\beta = \gamma \alpha \gamma^{-1}$ となるものが存在することで決める. α と β が cocycle conjugate であるというのを, ある unitary $w \in \mathcal{O}$, ある $\gamma \in \text{Aut}(\mathcal{O})$ で, $\text{Ad } w \cdot \beta = \gamma \alpha \gamma^{-1}$ となるものが存在することで決める.

Powers は, $B(H)$ 上の $*$ -endomorphisms の間の conjugacy, cocycle conjugacy の問題を, 次の shifts のクラスについて解決した.

定義 2 $\mathcal{O}$ を単位元をもつ C^* -algebra で, $\alpha \in \text{End } \mathcal{O}$ とする.
 α が shift であるとは, $\alpha(1)=1$ で, $\bigotimes_{k=1}^{\infty} \alpha^k(\mathcal{O}) = \mathbb{C}1$ なることを決める.

定義 3 $\alpha \in \text{End}(B(H))$, $\alpha \notin \text{Aut}(B(H))$ とする. $N_1 = \alpha(B(H))'$ としたとき, $N_1 = \text{In-factor}$ ($n=2, 3, \dots, \infty$) で, n のことを, α の multiplicity と言う.

定理 4. α, β を $B(H)$ 上の shifts とする. $B(H)$ の pure normal state ω_0 で, α のもとに不変なものが存在すると仮定する. このとき, α と β が conjugate であることと, β のもとに不変な pure normal state ω_1 が存在して, α と β は同じ multiplicity をもつことは同値である.

定理 5 α と β を $B(H)$ 上の shifts とする. このとき, α と β が cocycle conjugate であることと, α と β が同じ multiplicity をもつことは同値である.

つまり, $B(H)$ 上の shifts 達は, multiplicity により殆んど決定されてしまうのである. その後, Powers は Hyperfinite II_1 factor R 上の shifts の分類を問題とした. まず, R 上の shifts の最も簡単なクラスとして, 次の binary shifts を考えた.

定義 6 α を R 上の shift とする. α が binary shift

であるとは、次を満たす unitary $u \in R$ が存在する ことである。

$$\textcircled{1} u^2 = 1 \quad \textcircled{2} u\alpha^k(u) = \pm \alpha^k(u)u \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$\textcircled{3} R = \{u, \alpha(u), \alpha^2(u), \dots\}''.$$

(注意として、このとき、Jones index $[R : \alpha(R)] = 2$ である。)

この binary shifts の conjugacy class について、Powers は
次を導いた。

定義 7 $\alpha \in R$ の binary shifts とし、 α の交換集合 $S(\alpha)$ を、

$$S(\alpha) \equiv \{k > 0 : u\alpha^k(u) = -\alpha^k(u)u\}$$

で定義する。

このとき、

定理 8 α と $\beta \in R$ 上の binary shifts とあり、 α と β が
conjugate である こと、 $S(\alpha) = S(\beta)$ とは 同値である。

これをを用いて、

定理 9 R の binary shifts は conjugacy を除いて uncountably
infinite 存在する。また、 R の binary shifts の cocycle conjugacy
classes は少なくとも countably infinite は存在する。

Powers は、[43] で次の問題を与えた。

問題 10 α と β を binary shifts とあり、

$$g(\alpha) = \min \{k \mid \alpha^k(R) \cap R \neq \mathbb{C}1\} \quad \text{と置く。このとき、}$$

$g(\alpha)$ は、 α の cocycle conjugacy invariant である。もし $g(\alpha) = g(\beta)$

ならば, α と β は cocycle conjugate であるか?

この問題は, [23] の中で, 次のように解決された.

定義 11 $G = \coprod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ とする. $a: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ が signature sequence

とは, $a(0) = 0$, $a(n) = a(-n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) なる α と β をいう. G 上の shift σ は, $(\sigma(x))(i) = x(i-1)$ ($i \geq 1$), $(\sigma(x))(0) = 0$ ($x = (x(i)) \in G$)

とする. a に対応する multiplier $m_a \in \mathbb{Z}^2(G, \mathbb{T})$ は,

$$m_a(x, y) = (-1)^{\sum_{i > j} a(i-j) x(i) y(j)} \quad (x = (x(i)), y = (y(j)) \in G)$$

で決まる.

$\ell^2(G)$ 上の unitary operator $\lambda_{m_a}(x)$ は,

$$(\lambda_{m_a}(x)\xi)(y) = m_a(x, x^{-1}y) \xi(x^{-1}y) \quad (x, y \in G, \xi \in \ell^2(G))$$

と定義する. $R_{m_a}(G)$ は, $\{\lambda_{m_a}(x) \mid x \in G\}$ により生成された von Neumann algebra である. signature sequence a が periodic とは, ある整数 k を, $a(k+n) = a(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$) が成立する α と β をいう. a が eventually periodic とは, ある整数 $k (\geq 0)$, $p (> 0)$ を, $\forall n \geq k$ により, $a(n+p) = a(n)$ となる α と β をいう.

$m_a(\sigma(x), \sigma(y)) = m_a(x, y)$ なる σ は, $R_{m_a}(G)$ 上の shift であり, $\sigma(\lambda_{m_a}(x)) = \lambda_{m_a}(\sigma(x))$ ($x \in G$) なる σ を induce する. $e_0 = (1, 0, 0, 0, \dots) \in G$ を, $e_n = \sigma^n(e_0) \in G$ を, $u_0 = \lambda_{m_a}(e_0)$ とおくと, $u_n = \sigma^n(u_0)$ である. このとき, $u_n u_m = (-1)^{a(n-m)} u_m u_n$ を, Hyperfinite II₁ factor $R = R_{m_a}(G)$ は, $\{u_n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ により生成される. この $R_{m_a}(G)$ 上の shift $\sigma = \sigma_a$ は, signature

sequence a を持つ Powers の binary shift σ がある。

定理 12 a を aperiodic signature sequence σ , finite support を持つとある。つまり, $\#\{i \in \mathbb{N}; a(i) \neq 0\} < +\infty$ を仮定する。

$d = \max\{i \in \mathbb{N}; a(i) \neq 0\}$ とある。このとき, $\sigma^k(R)' \cap R = \mathbb{C}1$ ($0 \leq k \leq d$), $\sigma^k(R)' \cap R = \{u_i; 0 \leq i \leq k-d-1\}$ ($d+1 \leq k$) となるを使うと, Powers の問題には, 次の定理が取れる。

定理 13 a, b を次の signature sequence とする, $a(1)=a(3)=1$, $a(i)=0$ ($i \neq 1, 3$), $b(1)=b(2)=b(3)=1$, $b(j)=0$ ($j \neq 1, 2, 3$)。このとき, $\sigma_a^n(R)' \cap R \cong M_2 \otimes \mathbb{C}^q$, $\sigma_b^n(R)' \cap R \cong M_4$ 。このように, 二者は同型でない。よって, σ_a と σ_b は cycle conjugate ではない。

この問題を考へてみると, [22] の中で, a, b を finite support を持つ signature sequence とし, それらに対応する binary shifts を σ_a, σ_b とすると, σ_a が σ_b に conjugate であるとき, σ_a と σ_b が cycle conjugate が同値であるという予想を出したが, これは [9] の中で肯定的に解決された。

[9] では, a を eventually periodic な signature sequence とすると, $\exists r$ で, $\sigma_a^r(R)' \cap R \neq \mathbb{C}$ なる σ , 次の derived shift $(\sigma_a)_\infty$ を考えることができる, つまり,

$$(\sigma_a)_\infty \equiv \sigma_a \Big| \bigcup_{r \geq 0} \sigma_a^r R.$$

と a と σ_a と σ_b が *cycle conjugate* と a と $(\sigma_a)_\infty$ と $(\sigma_b)_\infty$ は *conjugate* が 成る ので, この よう に し て 我々 の 予想 が 成 り ました.

又, binary shifts の *cycle conjugacy* を 考へ る 中 で, [21] の 結果 を 得 た. finite support を もつ binary shifts に お ける relative commutant algebras の 構造 を 決定 し て, 殆ど の binary shifts が *cycle conjugacy* を 除 け る, relative commutant algebras で 分類 される. また, [9] の 結果 と 合 わ せ る と, ある 2 つ の 異なる signature sequences a_1, a_2 で, a_1 と a_2 から 得 ら れ る binary shifts の relative commutant algebras の Bratteli diagrams が 同 じ に な る も の の 存在 が 成 る.

また, Stacey [62] は, [21] の 議論 を 使 っ て, 一般 の p -shift (p は 素数) に お け る, 我々 の 結果 を 拡張 し て い る.

± 2, Powers の binary shift で は ない index 2 の shift の 存在 は, Price [52] に よ り, binary shifts を AF 群 に 積み重ね る こ と で 得 ら れ た. た だ し, [52] で は, binary shift で は ない index 2 の shift の 例 を 1 つ 作 っ た に 留 ま っ た. そ の 後, 我々 [20] に 於 て, [52] の 例 を 更 に 一般化 し て, binary shift で は ない index 2 の shifts を, uncountably many な non-conjugate shifts を 構成 し た. この 構成 は, 次の よう に な り ます.

$X = \coprod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ とし, signature sequence a に対応する X 上の multiplier ε m_a と書く. 同様に $Y = \coprod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ とおく. monic 多項式 $p(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_k t^k \in F_2[t]$ ($= z$, $c_0=1$) とおき,

$F_2[t]/p(t) = \{f(t)/p(t) : f(t) \in F_2[t]\}$ とし, 埋め込み $\psi: F_2[t] \rightarrow F_2[t]/p(t)$ ε , $\psi(f(t)) = \frac{p(t)f(t)}{p(t)}$ とおき, $\theta: X \rightarrow F_2[t]$ ε , $x = (x(i)) \in X$

に対し, $\theta(x) = \sum_{i \geq 0} x(i) t^i \in F_2[t]$ とおく.

また, $\gamma: Y \rightarrow F_2[t]/p(t)$ ε , $y = (y(i)) \in Y$ に対し,

$$\gamma(y) = \left(\sum_{i \geq 0} y(i) t^i \right) / p(t)$$

とおく. $\Phi_p: X \rightarrow Y$ ε , $\Phi_p = \gamma^{-1} \psi \theta$ とおく. signature sequence

a と monic 多項式 $p_\ell(t) = c_{\ell,0} + \dots + c_{\ell,k(\ell)} t^{k(\ell)}$ ($= z$, $c_{\ell,0}=1$),

$X_\ell = \coprod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ ($\ell=1,2,\dots$) とし,

$$\Phi_{p_\ell}: X_\ell \rightarrow X_{\ell+1}$$

ε 作る. nonperiodic signature sequences a_ℓ ($\ell=1,2,\dots$) ε ,

nonperiodic signature sequence $a_1 = a$ から出さず,

$$m_{a_{\ell+1}}(\Phi_{p_\ell}(x), \Phi_{p_\ell}(y)) = m_{a_\ell}(x, y) \quad (x, y \in X_\ell)$$

と作る = とが出来るので,

nonzero constant terms ε かつ monic polynomials p_ℓ の列 $p =$

$(p_1, p_2, \dots)$ と nonperiodic signature sequence a に対し,

$$X_{[p]} = \varinjlim (X_\ell, \Phi_{p_\ell}), \quad m_{[a,p]}(x, y) = m_{a_\ell}(x, y) \quad (x, y \in X_\ell)$$

とおく = とで, Hyperfinite II₁ factor $R_{m[a,p]}(X_{[p]})$ が作れ, そ
 の上に canonical shift $\sigma_{[p]}$ が持ちあがる. このとき, 埋め込
 んだ多項式の選び方により, uncountably many な non-conjugate,
 non-binary shifts で, index 2 のものを得る. 我々と異なるやり
 方で, [10] で同様の結果が得られていた. そこで, [52]
 の non-binary shift の例を用いて, abstract なものの group
 shift の方は固定して, 様々な multiplier を動かすことによ
 り, uncountably many な nonconjugate, non-binary shifts で,
 index 2 のものを得ていく.

[21] の中で得られた結果の一般化が, [50] でなされていく.
 [21] では, signature sequence に finite support をもつという条
 件を課していたのを, eventually periodic という条件にゆる
 めても, 我々のと同じ結果が成り立つことを示している.

Nagisa [36] では, Hyperfinite II₁ factor R 上の, 任意の binary
 shift α に対して, α と cocycle conjugate となる binary
 shifts で, その signature sequence がお互いに異なる無限に
 多くのものが存在することを示されている. 最近, Price
 [58] により, binary shifts で, commutant index = 2 をもつもの
 の cocycle conjugacy class は 1 つであることが示されてい
 る. 二 = で, commutant index K とは, $\sigma^K(R)' \cap R \neq \mathbb{C}$ となる
 最初の K のことである. 以上, index 2 の shifts を扱って来

たが、一般の index n の shifts について、index 2 に対応する結果が得られる。 ([8, 9, 10, 12, 19, 53, 62])

[II] Endomorphisms と Cuntz algebras

Arneson [1] の結果: 「 α は nonzero な normal $*$ -endomorphism of $B(H)$ としたとき, $\exists$ isometries の列 $v_1, v_2, \dots \in B(H)$ で, mutually orthogonal ranges をもつもの」で,

$$\alpha(a) = \sum_n v_n a v_n^* \quad (a \in B(H))$$

となるものの存在を示した。から, Lacan [33] は, この $*$ -endomorphism と, $v_1, v_2, \dots$ から生成される Cuntz algebra の表現を対応させるという idea により, $B(H)$ の $*$ -endomorphism についての結果を得ている。その内容の拡大 version が, Bratteli, Jorgensen, Price 達により, [6, 7] で調べられている。[27] の中で, 我々は Lacan の結果の II_1 -version を示した。結果としては,

定理 M は II_1 factor, α は M の unital $*$ -endomorphism とする。 $[M = \alpha(M)] < \infty$ と仮定する。このとき, ある自然数 n , M のある Hilbert 空間上への $*$ -表現 ρ と, Cuntz algebra $\mathcal{O}_n = C^*(\{v_i : i=1, \dots, n\})$ の $B(H)$ への $*$ -表現で,

$$n \leq 4([M = \alpha(M)]) \text{ の整数部分} + 1 \text{ と,}$$

$$\rho(\alpha(m)) = \sum_{i=1}^n \pi(v_i) \rho(m) \pi(v_i)^*, \quad m \in M$$

を満たすものが存在する。

定理 II_1 factor M が Hilbert space H に standardly 1-作用
 しているとする。 $\mathcal{O}_m = C^*(\{s_i : i=1, \dots, m\})$, $\mathcal{O}_n = C^*(\{t_j : j=1, \dots, n\})$ $\in$, H 上の isometries $\{s_i\}_i, \{t_j\}_j$ により生成された
 Cuntz algebras とする。 $\alpha, \beta \in$, $\alpha(x) = \sum_{i=1}^m s_i x s_i^*$, $\beta(x) = \sum_{j=1}^n t_j x t_j^*$
 ($x \in M$) とする unital $*$ -endomorphisms とする。

このとき、次は同値である：

(1) α と β は cocycle conjugate

(2) $m=n$ であり、ある unitary $w \in B(L^2(M, \tau))$, ある unitary $v \in M$

とある unitary 行列 $(u_{ij}) \in M' \otimes M_n(\mathbb{C})$ であり、

$$\sum_{j=1}^n v(w s_j w^*) u_{ji}$$

を満たすものが存在する。

[III] その他の shifts の関連する話題

Powers [43] に於て、 $B(H)$ 上の $*$ -endomorphisms の E_0 -
 semigroups の理論が始められた。その後、Anneron [1]
 により、product system の下の Powers の E_0 -semigroup の理
 論が再構築されている。hyperfinite II_1 factor R の E_0 -semigroups
 についても、[43] で考察されている。([3, 44, 45, 46, 47, 48,
 51])。shifts をつなぐ場合の endomorphisms の考察が、
 [54] にある。

[IV] 未発表の結果

以下では、綿谷氏と筆者の間で得られた結果で、結果だけアタウンスしたものの紹介をする。これは、 R 上の shifts の cocycle conjugacy を考へるとまに出たものである。(cf. [42])

主題 4.1 P は、Hilbert space 上の II_1 factor とある。 $\sigma \in P$ の unital $*$ -endomorphism とある。

$$N(\sigma) = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma(x) \end{pmatrix} : x \in P \right\} \subset P \otimes M_2(\mathbb{C})$$

とある。このとき、 $N(\sigma)$ は factor である。

最初に、次を要する。

補題 4.2 $\sigma \in P$ の unital $*$ -endomorphism で、 $\sigma(P) \neq P$ とある。もし $ax = \sigma(x)a$ ($\forall x \in P$) とあると、 $a=0$ が成立する。

証明 $ax = \sigma(x)a$ なる a で、 $xa^* = a^*\sigma(x)$ である。よって、

$$a^*ax = a^*\sigma(x)a = xa^*a \quad (\forall x \in P).$$

P は factor なるので、 $a^*a \in \mathbb{C}1$ 。もし $a \neq 0$ とあると、 $a^*a = \lambda 1 > 0$

とあると、 $u = \lambda^{-1/2}a$ 。このとき、

$$u^*u = (\lambda^{-1/2}a^*)(\lambda^{-1/2}a) = \lambda^{-1}a^*a = 1.$$

P は finite なるので、 $uu^* = 1$ 。このように、 u は unitary $\in P$ である。他方、 $x \in P$ について、

$$x = \lambda^{-1}\lambda x = \lambda^{-1}a^*ax = (\lambda^{-1/2}a)^*\sigma(x)(\lambda^{-1/2}a) = u^*\sigma(x)u$$

このように、 $\sigma(x) = u x u^* = (\text{Ad } u)(x)$ 。よって、 $\sigma(P) = P$ 。これは、

矛盾なので、主張を得る。

主題 4.3 σ_1 と σ_2 を II_1 factor P 上の unital $*$ -endomorphisms で、 $\sigma_i(P) \neq P$ なるものとする。 $\sigma_i(P)' \cap P = \mathbb{C}1$ かつ $[P : \sigma_i(P)] < \infty$ を仮定する。このとき、 σ_1 と σ_2 が cocycle conjugate であることと、 $N(\sigma_1)$ と $N(\sigma_2)$ が conjugate であることは同値である。

証明 σ_1 と σ_2 が cocycle conjugate である。このとき、ある unitary $w \in P$ と $\theta \in \text{Aut } P$ で、 $\sigma_2 = \text{Ad } w \circ \theta \sigma_1 \theta^{-1}$ となるものが存在する。

$$\Phi \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(x_1) & \theta(x_2) \\ \theta(x_3) & \theta(x_4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix}^*$$

と置く。このとき、 $\Phi \in \text{Aut}(M)$ 、もし $y = \theta(x)$ とおくと、

$$\Phi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \sigma_2(y) \end{pmatrix}.$$

このように、 $\Phi(N(\sigma_1)) = N(\sigma_2)$ 。逆に、ある automorphism $\Phi \in \text{Aut}(M)$ で、 $\Phi(N(\sigma_1)) = N(\sigma_2)$ なるものが存在すると仮定する。

よって、 $x \in P$ について、

$$\Phi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \sigma_2(y) \end{pmatrix}$$

がある $y \in P$ に対して成立する。このとき、automorphism $\theta \in \text{Aut}(P)$ を、 $\theta(x) = y, x \in P$ と定義する。次に、

$$\Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ w & c \end{pmatrix} \text{ を考える。このとき、} w \text{ が } P \text{ の}$$

unitary である $\Leftrightarrow$ $\exists$ u, v である. 最初に, $\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ である. 明らかに,

$$\Phi(N(\sigma_1)' \cap M) = N(\sigma_2)' \cap M$$

である. 次に,

$$N(\sigma_2)' \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\} \text{ である.}$$

$$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \in N(\sigma_2)' \cap M \text{ ならば,}$$

$$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \sigma_2(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & \sigma_2(y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}.$$

$$\text{よって, } \forall y \in P \text{ ならば,}$$

$$sy = ys, v\sigma_2(y) = \sigma_2(y)v, t\sigma_2(y) = yt, vy = \sigma_2(y)u.$$

P は factor である $\Leftrightarrow$ $\exists$ $y \in P$ であり, $\sigma_2(y)' \cap P = \mathbb{C}I$ である lemma 1 から,

$$s, v \in \mathbb{C}I, t = u = 0$$

よって,

$$N(\sigma_2)' \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}I \right\}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N(\sigma_1)' \cap M \text{ である,}$$

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \in N(\sigma_2)' \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C}I \right\}.$$

よって,

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ であり, } \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

しかし, $\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ は起らない. これは, 次の理由

による.

$$\left[\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)M\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)N(\sigma_1)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right] = [P \oplus 0 : P \oplus 0] = 1$$

が成立するが, 他方,

$$\left[\Phi\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)M\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right) = \Phi\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)N(\sigma_1)\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)\right] = [0 \oplus P : 0 \oplus \sigma_2(P)]$$

$$\geq 2 \quad (\Phi(N(\sigma_1)) = N(\sigma_2) \text{ を使って 2 になる.})$$

と矛盾が, index は isomorphism invariant なのだから, これは矛盾.

よって,
$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

更に,
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ w & c \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a & b \\ w & c \end{pmatrix}.$$
 が成立する.

これは,
$$\Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \Phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 から導かれる.

よって,
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^*a + w^*w & a^*b + w^*c \\ b^*a + c^*w & b^*b + c^*c \end{pmatrix}.$$
 これは, $b = c = 0$.

他方,
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^*\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} aa^* & aw^* \\ wa^* & ww^* \end{pmatrix}.$$

よって,

$a = 0$ かつ, w は P の unitary となる. 更に,

$$\Phi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \Phi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(x) & 0 \\ 0 & \sigma_2(\theta(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} = \Phi \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2(\theta(x)) \end{pmatrix}.$$

$$\text{よって}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2(\theta(x)) \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1(x) \end{pmatrix} = \Phi \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^* \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(\sigma_1(x)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w \theta(\sigma_1(x)) w^* \end{pmatrix}.$$

よって, $\sigma_2(\theta(x)) = w \theta(\sigma_1(x)) w^*$. したがって, σ_1 と σ_2 は *cocycle conjugate*.

$N(\sigma)$ の M の ϕ の index は, local index を使って計算できる.

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N(\sigma) \cap M \text{ かつ, } p_1 \text{ と } p_2 \text{ は } N(\sigma) \cap M$$

の partition である. よって,

$$[M : N(\sigma)] = \frac{[M : N(\sigma)]_{p_1}}{\tau_M(p_1)} + \frac{[M : N(\sigma)]_{p_2}}{\tau_M(p_2)}$$

$$= \text{よって}, \tau_M(p_1) = \tau_M(p_2) = \frac{1}{2}.$$

$$[M : N(\sigma)]_{p_1} = [M_{p_1} : N(\sigma)_{p_1}] = [p = p] = 1.$$

$$[M : N(\sigma)]_{p_2} = [M_{p_2} : N(\sigma)_{p_2}] = [p = \sigma(p)].$$

したがって,

$$[M : N(\sigma)] = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \frac{[p = \sigma(p)]}{\frac{1}{2}} = 2(1 + [p = \sigma(p)]).$$

より, もし σ が binary shift ならば, σ の index は 6 である。
 次に, $N(\sigma)$ は M の infinite depth をもつことを示す。Popa
 の結果から, もし $N \subsetneq^{\text{eo}} M$ が finite depth をもたなければ,
 $E_{N \cap M}(e_0) = [M:N]^{-1}I$ が成立する。ここで, $N \subset M$ が
 finite depth をもつとは, $\sup \dim \mathbb{Z}(M' \cap M_{i+1}) < \infty$ のことである。
 Pimener-Popa により, $N \subset M$ は finite factors であり,
 $[M:N] < \infty$ としたとき, 次の (1) と (2) の同値が成り立つ。
 3.

$$(1) H(M|N) = \log [M:N]$$

$$(2) E_{N \cap M}(e_0) = [M:N]^{-1}I_M.$$

次に考えよう。

$$N(\sigma) \cap M = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{C}I \right\} = \mathbb{C}p_1 \oplus \mathbb{C}p_2.$$

p_1 と p_2 は, $N(\sigma) \cap M$ の minimal projection である。従って, Pimener-Popa の公式より,

$$\begin{aligned} H(M|N(\sigma)) &= \tau(p_1) \log \left(\frac{[M_{p_1} : N(\sigma)_{p_1}]}{\tau(p_1)^2} \right) + \tau(p_2) \log \left(\frac{[M_{p_2} : N(\sigma)_{p_2}]}{\tau(p_2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \log \left(\frac{1}{\frac{1}{4}} \right) + \frac{1}{2} \log \left(\frac{[p : \sigma(p)]}{\frac{1}{4}} \right) = \log 4 [p : \sigma(p)]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

よって,

$$H(M|N(\sigma)) \neq \log [M:N(\sigma)].$$

何故なら, もし一致したとすると, $16 [p : \sigma(p)] = 4(1 + [p : \sigma(p)])^2$
 となるが, $[p : \sigma(p)] = 1$ を得る。これは, $\sigma(p) \neq p$ に矛盾する。

これに関連し 2, index 6 の subfactor の 1 つの部分 は 次で特徴づけられる。

主題 4.4 $N \subset M$ は II_1 factor とし, $[M:N]=6$ とする. τ は faithful normal trace on M とする. 次を仮定する.

$$N' \cap M = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_p \oplus \mathbb{C}_{(1-p)}, \quad p \in M^p.$$

＝ a とし, (1) $\tau(p) = \frac{3 \pm 3^{\frac{1}{2}}}{6}$ とすると, ある onto $*$ -endomorphism

$$\sigma: M_p \rightarrow M_{1-p} \text{ が存在し, } N = \{x \oplus \sigma(x) \mid x \in M_p\} \subset M$$

となる. (2) $\tau(p) = \frac{1}{3}$ か $\frac{1}{2}$ とすると, $\exists *$ -isomorphism $\sigma:$

$$M_p \rightarrow N_{1-p} = \sigma(M_p) \subset M_{1-p} \text{ で, } [M_{1-p} : N_{1-p}] = 2 \text{ かつ}$$

$$N = \{x \oplus \sigma(x) : x \in M_p\} \subset M \text{ を満たすものが存在する.}$$

(3) $\tau(p) = \frac{1}{2}$ か $\tau(p) = \frac{2}{3}$ ならば, ある $*$ -isomorphism σ で,

$$\sigma: M_{1-p} \rightarrow N_p \subset M_p, [M_p : \sigma(M_{1-p})] = 2 \text{ で, } N = \{\sigma(x) \oplus x : x \in M_{1-p}\} \subset M$$

となるものが存在する.

証明 $p \in N' \cap M \neq 1$, $N_p \simeq N \simeq N_{1-p}$ である.

$$x p \xrightarrow{\theta_1} x \xrightarrow{\theta_2} x(1-p).$$

＝ b かつ, $\theta: N_p \rightarrow N_{1-p}$ は, $\theta(xp) = x(1-p)$ で定義する.

＝ a とし,
$$[M:N] = \frac{[M_p:N_p]}{\tau(p)} + \frac{[M_{1-p}:N_{1-p}]}{\tau(1-p)}.$$

(A) $\frac{1}{\tau(p)} + \frac{1}{\tau(1-p)} = 6$ かつ 1 は, $\tau(p) = \frac{3 \pm 3^{\frac{1}{2}}}{6}.$

(B) $\frac{1}{\tau(p)} + \frac{2}{\tau(1-p)} = 6$ かつ 1 は, $\tau(p) = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}.$

$$(c) \frac{2}{\tau(p)} + \frac{1}{\tau(1-p)} = 6 \text{ のとき } \tau(p) = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}.$$

(D) $\neq 1$

$$\frac{m}{\tau(p)} + \frac{n}{\tau(1-p)} = 6, m \geq 2, n \geq 2 \text{ のとき } \tau(p) = \frac{2}{3}, \frac{1}{2}.$$

$$\frac{m-2}{\tau(p)} + \frac{2}{\tau(p)} + \frac{n-2}{1-\tau(p)} + \frac{2}{1-\tau(p)} \geq 8$$

となり不可能である。

次に, M_∞ の algebra に関する話題について述べる. N を II_1 -factor M の subfactor であり index が有限なものとする. このとき, conditional expectation $E_N: M \rightarrow N$ を使って, II_1 -factor M_1 を構成できる. これを繰り返して, II_1 -factor $M_\infty = \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i}$ をもつ. この algebra M_∞ の性質については, Masahood [34] は, M_∞ が property T を持たないことを示した. しかし, さらに強く, M_∞ は strongly stable であることが示せる.

主題 4.5 II_1 -factor M_∞ は, strongly stable である. 即ち, $M_\infty \sim M_\infty \otimes R_0$ ($=$ 2, R_0 は hyperfinite II_1 -factor) が成立する.

証明 McDuff の結果を使うことにより, M_∞ の hypercentral sequences の集合が, M_∞ の central sequences の集合と一致しないことが示されれば, $M_\infty \sim M_\infty \otimes R_0$ が示せる. その為, Jones projections $e_N = e_1, e_M = e_2, \dots (e \in M_\infty)$ を考える. Jones projections $\{e_n\}$ の性質により, $n \geq 2$ により, $e_n x = x e_n$

($\forall x \in M$). 更に, $\forall \text{mod } e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m} (\{e_n\}_n)$ に対し,
 n を十分大きく選べば, $e_n(e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m}) = (e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_m}) e_n$.
 $\Rightarrow$ ように, $\{e_n\}_n$ は, M_∞ の central sequence である. 次に,
 $(e_n)_n$ が hypercentral seq であることは $\parallel = \perp$ である. $x_n = e_{n+1}$ ($n \geq 1$)
と置く. $\Rightarrow$ ように, $(x_n)_n$ は又, M_∞ の central sequence である.
次に計算する.

$$\begin{aligned} \|[e_{n+1}, e_n]\|_2^2 &= \|e_{n+1}e_n - e_n e_{n+1}\|_2^2 = \tau((e_{n+1}e_n - e_n e_{n+1})^*(e_{n+1}e_n - e_n e_{n+1})) \\ &= \tau(e_n e_{n+1} e_n - e_n e_{n+1} e_n e_{n+1} - e_{n+1} e_n e_{n+1} e_n + e_{n+1} e_n e_{n+1}) \\ &= \tau(\lambda e_n - \lambda e_n e_{n+1} - \lambda e_{n+1} e_n + \lambda e_{n+1}), \quad \lambda = \frac{1}{[M=N]}, \\ &= 2\lambda^2(1-\lambda) > 0. \end{aligned}$$

よって, $\|[e_{n+1}, e_n]\|_2 \not\rightarrow 0$. $\Rightarrow$ ように, $(e_n)_n$ は hypercentral sequence ではない. よって主張を得る.

4.6 M_∞ は, property T をもたない.

次に, 有限 index をもつ II_1 factor の組について述べる.
有限 index をもつ 2 つの II_1 factor の組 $N \subset M, \tilde{N} \subset \tilde{M}$ を考える.
 $\Rightarrow$ ように, $N \subset M$ と $\tilde{N} \subset \tilde{M}$ の間の conjugacy と, $N \subset M_\infty$
と $\tilde{N} \subset \tilde{M}_\infty$, $(M \subset M_\infty$ と $\tilde{M} \subset \tilde{M}_\infty)$ の間の conjugacy を見せる.
 $N \subset M, \tilde{N} \subset \tilde{M}$ が conjugate であることとを考えると, $N \subset M$ について,
 $\tilde{N} = N, \tilde{M} = M$ と置く. $\Rightarrow$ ように, $N \subset M$ と $\tilde{N} \subset \tilde{M}$ は conjugate である.
しかし, $N \subset M_\infty, \tilde{N} \subset \tilde{M}_\infty$ は conjugate である.

ある. $n \neq m$ ならば, $\text{index } 4\cos^2 \frac{\pi}{n}$ の組 $N \subset M$, $\text{index } 4\cos^2 \frac{\pi}{m}$ の組 $\tilde{N} \subset \tilde{M}$ を取る. Ocneanu の central sequence thm により, $M \subset M_\infty$ と, $\tilde{M} \subset \tilde{M}_\infty$ は conjugate であり, 何故なら,

$$[M_\infty = M \otimes (M' \cap M_\infty)] = n \left\{ 4 \sin^2 \frac{\pi}{n} \right\}^{-1}.$$

次に, 無限 index をもつ II_1 factor の組 $N \subset M$ を取る. II_1 -factor の列 $(M_n)_{n \geq 0}$ を考える. この列が $N \subset M$ に対する filtration であるとは, 次を満たすときを言うことにする.

- (1) $M_0 = N \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M$, (2) $\overline{\bigcup_n M_n} = M$ (3) $[M_n : N] < +\infty$ ($\forall n \geq 0$).

更に, $N \subset M$ に対する filtration が次の (4) を満たすとき, それらを $N \subset M$ に対する proper filtration と呼ぶことにする.

- (4) $M_n \not\subset M_{n+1}$ ($\forall n \geq 0$) で, もし L_n が II_1 factor で, $M_n \leq L_n \leq M_{n+1}$ があると, そのとき, $L_n = M_{n+1}$ か又は, $L_n = M_n$ が, 任意の $n \geq 0$ に対して成立する.

$\varphi(n) = [M_n : M_0]$ とおくと, $\varphi(n) \in (M_n)_{n \geq 0}$ に対する growth function と呼ぶ. 以下では, 群の場合のみを考える. 群 $H \subset G$ に対する proper filtration $(G_n)_{n \geq 0}$ を次のように定義する.

- $(G_n)_{n \geq 0}$ を群の列とする. それらが, $H \subset G$ に対する filtration であるとは, 次を満たすときを言うことにする,
(1) $G_0 = H \subset G_1 \subset \dots \subset G$, (2) $\langle G_n \mid n \geq 0 \rangle = G$, (3) $[G_n : H]$

$< +\infty$ ($\forall i \geq 0$).

更に, もし $H \subset G$ に対する filtration が次の (4) を満たすとき,
 それを $H \subset G$ に対する proper filtration と呼ぶことにする.

(4) $G_n \not\subset G_{n+1}$ ($n \geq 0$) であり, もし K_n が subgroup であり, $G_n < K_n < G_{n+1}$ のとき, $K_n = G_{n+1}$ かしくは, $K_n = G_n$ ($\forall n \geq 0$) が成立する.

$\varphi(n) = [G_n : G_0]$ ($\forall n \geq 0$) とおく. 次の値 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log \varphi(n)) / n$
 は, $(G_n)_{n \geq 0}$ に対する growth rate と呼ぶ.

restricted direct product group $G = \prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ を取る. ($= \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$)
 であるとき, subgroup $\{e\} \subset G$ を考える. G は $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ 上の
 vector space と考えられ, G の vector-subspaces はその bases として
 記述されるので, もし $\{e\} \subset G$ が proper filtration $(H_i)_{i \geq 0}$
 をもつならば, そのとき, H_i は proper であり, $\dim H_{i+1} = \dim H_i$
 $+ 1$ をもつ. 同様に, growth function $\varphi(n) = [H_n : H_0]$
 $= 2^n$ となるので, growth rate $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log \varphi(n)) / n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\log 2^n) / n$
 $= \log 2$ をもつ. p を素数として, $\mathbb{Z}_p$ の場合も同様に考える
 ことが出来る. 次に, infinite symmetric group S_{∞} を考える. である
 とき, S_n から S_{n+1} への埋め込みを次のようにもつ. 埋め込み
 $\sigma: S_n \rightarrow S_{n+1}$ を, $(\sigma(i))(i) = i$ ($1 \leq i \leq n$), $(\sigma)(n+1)$
 $= (n+1)$ ($\sigma \in S_n$) と決める. であるとき, $S_n < S_{n+1}$ であり,
 もし $S_n < L_n < S_{n+1}$ であるとき, $L_n = S_n$ か $L_n = S_{n+1}$ をもつ.
 よって, $(S_n)_{n \geq 0}$ は, $\{e\} \subset S_{\infty}$ に対する proper filtration である

る. $\varphi(n) = [S_n = \{e\}] = n!$ である.

また, $\{e\} \subset G$ に与えられる finite group $(G_n)_{n \geq 0}$ の proper filtration $(G_n)_{n \geq 0}$ があれば, proper filtration $(R_0 \rtimes G_n)_{n \geq 0}$ を, $R_0 \subset R_0 \rtimes G$ により 2 作る ことが出来る. $\Rightarrow$ R_0 は hyperfinite II_1 -factor で, その action は outer とある.

[IV] Hyperfinite II_1 -factor 上の Frobenius endomorphisms

Powers の shift は, $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ 上の canonical shift ε , $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ 上の shift invariant multiplier を使って, $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ の twisted group von Neumann algebra を作り, その上に, 持ち上げたものであった. ± 2 , $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ は, $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\} = F_2$ 上の vector space として見る ことが出来て, $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}_2 = F_2[t]$ (F_2 上の多項式環) と同一視 することができる. $\Rightarrow$ の見方からすれば, canonical shift とは, 多項式の t 倍に他ならない. $\Rightarrow$ のように, 多項式環の間の homomorphism として, 有限体の Galois 群の generator として, 有名な Frobenius map を拡張したもの を考える ことができる.

定義 5.1 p を素数 とする. α が $F_p[t]$ 上の Frobenius map とは, $\alpha(f(t)) = (f(t))^p$ ($f(t) \in F_p[t]$) のこと とする. また, α が, multiplier $m \in \mathbb{Z}^2(F_p[t], \mathbb{I})$ を 伴存 するとし, m による twisted von Neumann algebra $R_m(F_p[t])$ 上に, α を 拡張 した ものを Frobenius endomorphism と呼ぶこと とする.

$\Rightarrow$ のこと とし,

主題5.2 a を $\mathbb{Z}$ 上の signature sequence とする. M_a を対応する multiplier とする. α のとき, M_a が α -invariant であること必要十分条件は, $a(pn) = a(n)$ ($n=1, 2, \dots$) なることである.

例5.3 a を, $a(2^n) = 1$ ($n=0, 1, 2, \dots$) をみたす signature sequence とする. α のとき, α は non-periodic で, α -invariant である. よって, α を使って, hyperfinite II₁ factor $R_{M_a}(F_2[t])$ 上に α を持ち上げることができる. また, Frobenius endomorphism は, 例5.1は, 次の性質をもつ.

$$(1) [R_{M_a}(F_2[t]) = \alpha(R_{M_a}(F_2[t]))] = \infty \quad (2) \bigcap_n \alpha^n(R_{M_a}(F_2[t])) = \mathbb{C}^2.$$

注意5.4 $F_2[t, s]$ は $F_2[t]$ 上の polynomial ring で, $s^2 + s + 1 = 0$, t は transcendental variable を満たすものとする. α のとき, $\sigma(f(t, s)) = tf(t, s)$ ($f(t, s) \in F_2[t, s]$) とおくと,

$$[F_2[t, s] = \sigma(F_2[t, s])] = 4, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma^n(F_2[t, s]) = \{0\} \text{ かつ,}$$

σ は shift である. $F_2[t, s]$ 上の適当な multiplier を与えることで, $\{R_{M_a}(F_2[t, s]), \sigma\}$ と $\{\otimes M_2(\mathbb{C}), \text{canonical shift}\}$ の間の conjugacy を持つ.

注意5.5 α のとき, このような Frobenius endomorphism を考える理由は, 数論との接点を見つける為である. 例5.1は, Carlitz module に出て来る $\sigma_t + \alpha$ (t によるかけ算と, Frobenius endomor-

phism との和) も, multiplier をうまく決めればよいとて,
 hyperfinite II_1 factor 上に実現される.

[VI] 未解決問題

(1) binary shifts には, 非可算な cocycle conjugacy classes が
 存在するか. 特に, signature sequences が eventually periodic
 である binary shifts はどの位の cocycle conjugacy classes をも
 つか. 現在の所, 二つの間に cocycle conjugacy classes が 1 個
 より多いかも知れられている. しかし binary shifts の strong
 cocycle conjugacy classes については, 1 個より多くあることが
 示されている.

(2) II_1 factor M 上に, index finite な shift が存在すれば,
 M は hyperfinite であるか.

(3) σ が index 2 の group shift ならば, それは Price 型の
 shift であるか.

(4) (nontrivial な form である) index 2 をもつ III 型の shift は存
 在するか.

(5) a と b が eventually periodic signature sequence とある.
 もし $(\sigma_a)_\omega$ と $(\sigma_b)_\omega$ が conjugate ならば, σ_a と σ_b は cocycle
 conjugate であるか.

(6) $a = (a_i)_{i \geq 0}$, $b = (b_j)_{j \geq 0} \in \{0, 1\}^\mathbb{N}$ の signature sequences
 とする. σ_a と $\sigma_b \in$, hyperfinite II_1 -factor R 上の対応する

binary shifts とする. signature sequence a に対し z , number $\bar{a}$ を,

$$\bar{a} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n / 2^n$$
と対応させる. σ_a と σ_b が cycle conjugate

で, a と b が aperiodic と仮定する. σ_a と σ_b が Liouville number とあると, $\bar{b}$ は Liouville number であるか.

(7) σ を, signature sequence $0100000\cdots$ をもつ binary shift とする. もし τ が σ に cycle conjugate とあると, τ の signature sequence は, $01111\cdots$ が periodic である. σ と cycle conjugate である binary shift の signature sequence は 周期の長さ $2^n - 1$ をもち, ある長さ n の word で $\mathbb{C}^2(R)^c$ を生成するといふことが成立するか.

(8) binary shifts が cycle conjugate ならば, その center sequences は 高々有限個のみ異なるか.

(9) σ の sequences が, eventually periodic な center sequences とし z 起まるか.

(10) α を hyperfinite II₁ factor R 上の binary shift とする. $I(n)$ を, algebra $\mathcal{A}^n(R)$ が nontrivial commutant をもつ最初の index n とする. これを commutant index とする. commutant index が 3 以上の binary shifts を分類せよ.

(11) binary shift z ない R 上の shift α で, $\alpha^2(R) \cap R \neq \mathbb{C}$ とするものが存在するか.

REFERENCES

1. W.Arveson, *Continuous analogues of Fock space*, Memoirs A.M.S. 80(409) (1989).
2. V.A.Arzumanjan and Am.Versik, *Factor representations of the crossed product of a commutative C^* -algebra and a semigroup of its endomorphisms*, Soviet Math.Dokl.19(1978),48-52.
3. B.V.R.BHat, *An index theory for quantum dynamical semigroups*, Trans.Amer.Math.Soc. 348(1996),561-583.
4. D.Bisch, *Entropy of groups and subfactors*, J.Func.Anal. 103(1992), 190-208.
5. S.Boyd, N.Keswani, and I.Raeburn, *Faithful representations of crossed products by endomorphisms*, Proc.Amer.Math.Soc. 118(1993),427-436.
6. O.Bratter, P.E.T.Jorgensen, and G.L.Price, *Endomorphisms of $B(H)$* , Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Amer.Math.Soc.(1995).
7. O.Bratteli and P.E.T.Jorgensen, *Endomorphisms of $B(H)$, II: finitely correlated states on O_n* , Univ.Iowa preprint,1995.
8. D.Bures and H.S.Yin, *Shifts on the hyperfinite factor of type II_1* , J.Operator Theory 20 (1988),91-106.
9. D.Bures and H.S.Yin, *Outer conjugacy of shifts on the hyperfinite II_1 factor*, Pacific J.Math. 142(1990),245-257.
10. D.Bures and H.S.Yin, *A class of shifts on the hyperfinite II_1 factor*, Proc.Amer.Math.Soc. 110 (1990), 169-175.
11. M.Choda, *The conjugacy classes of subfactors and the outer conjugacy classes of the automorphism group*, Math.Japon. 32(1987),379-388.
12. M.Choda, *Shifts on the hyperfinite II_1 -factor*, J.Operator Theory,17(1987),223-235..
13. M.Choda, *Entropy for $*$ -endomorphisms and relative entropy for subalgebras*, J.Operator Theory, 25(1991),125-140.
14. M.Choda, *Endomorphisms and automorphisms for factor inclusions (in Quantum and Non-Commutative Analysis,291-304)*, Kluwer Academic Publishers.
15. A.Connes, *Outer conjugacy classes of automorphisms of factors*, Ann.Sci.Ec.Norm.Sup., 8(1975),383-419.
16. A.Connes and V.Jones, *Property T for von Neumann algebras*, Bull.London Math.Soc., 17(1985),57-62.
17. J.Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*, Commun. Math. Phys. 57 (1977), 173-185.
18. S.Doplicher and J.E.Roberts, *Endomorphisms of C^* -algebras, cross products and duality for compact groups*, Ann.Math.130(1989),75-119.
19. M.Enomoto, M.Choda and Y.Watatani, *Generalized Powers' binary shifts on the hyperfinite II_1 factor*, Math.Japon. 33(1988),831-843.
20. M.Enomoto, M.Choda and Y.Watatani, *Uncountably many non-binary shifts on the hyperfinite II_1 -factor*.
21. M.Enomoto, M.Nagisa, Y.Watatani and H.Yoshida, *Relative commutant algebras of Powers' binary shifts on the hyperfinite II_1 factor*, Math.Scand.68(1991),115-130.
22. M.Enomoto and Y.Watatani, *A solution of Powers' problem on outer conjugacy of binary shifts*, preprint (1986).
23. M.Enomoto and Y.Watatani, *Powers' binary shifts on the hyperfinite factor of type II_1* , Proc.Amer.Math.Soc. 105(1989),371-374.
24. M.Enomoto, *Entropy of certain endomorphisms of the II_1 -factor of the free group in infinite number of generators*, Bull.Koshien Univ. (1993),1-5.
25. M.Enomoto, *Frobenius endomorphisms on the hyperfinite II_1 -factor*, preprint (1995).
26. M.Enomoto, *A characterization of Powers' binary shifts on the hyperfinite II_1 -factor via group shifts*, Bull.Koshien Univ.16(1988),91-93.
27. M.Enomoto and Y.Watatani, *Endomorphisms of type II_1 -factors and Cuntz algebras*, J.Austral.Math.Soc.(Series A)60(1996),1-13.
28. M.Enomoto and Y.Watatani, *Endomorphisms on II_1 -factors and associated C^* -algebras*, in preparation.
29. F.Hiai, *Entropy and growth for derived towers of subfactors*, Preprint (Jan.1993).
30. V.Jones, *Index for subfactors*, Invent.Math. 72(1983),1-25.

31. V.Jones, *On a family of almost commuting endomorphisms*, J.Func.Anal.122(1994)84-90.
32. E.Kirchberg and G.Vaillant, *On C^* -algebras having linear, polynomial and subexponential growth*, Invent.math. 108(1992),635-652.
33. M.Laca, *Endomorphisms of $B(H)$ and Cuntz algebras*, J.Oper.Thy. 30(1993)85-108.
34. B.Mashood, *Notes on Property T for type II_1 factors*, preprint.
35. M.Nagisa, *On properties of the approximately finite dimensionality for C^* -algebras*, Thesis, 1988.
36. M.Nagisa, *Cocycle conjugacy of binary shifts on the hyperfinite factor of type II_1* , preprint (1995).
37. M.Nakamura and Z.Takeda, *On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras*, Proc.Jap.Acad. 34(1958),489-494.
38. M.Nakamura and Z.Takada, *On inner automorphisms of finite factors*, Proc.Jap.Acad. 37(1961),31-32.
39. W.L.Paschke, *The crossed product of a C^* -algebra by an endomorphism*, Proc. Amer. Math. Soc. 80 (1980), 113-118.
40. M.Pimsner and S.Popa, *Entropy and index for subfactors*, Ann.Scient.Ec.Norm.Sup. 19 (1986), 57-106.
41. C.Pinzari, *Semigroups of non-unital endomorphisms of C^* -algebras and compact group duality*, J.Funct.Anal.,115(1993),432-453.
42. S.Popa, *Soufacteurs, actions des groupes et cohomologie*, C.R.Acad.Sci.Paris, 309 (1989), 771-776.
43. R.T.Powers, *An index theory for semigroups of $*$ -endomorphisms of $B(H)$ and type II_1 factors*, Canadian J.Math.40(1988),86-114.
44. R.T.Powers, *Continuous semi-groups of endomorphisms of $B(H)$* , Abstracts of A.M.S. 13(1992)450(876-46-156).
45. R.T.Powers, *Continuous semigroups of endomorphism of $B(H)$. Preliminary report*, Abstracts of A.M.S. 15(1994)93.
46. R.T.Powers, *A non-spacial continuous semigroups of $*$ -endomorphism of $B(H)$* , Publ. Res. Inst. Math. Sci..
47. R.T.Powers and G.Price, *Continuous spacial semigroups of $*$ -endomorphism of $B(H)$* , preprint.
48. R.T.Powers and D.Robinson, *An index for continuous semigroups of $*$ -endomorphism of $B(H)$* , J.Funct.Anal.,84(1989),85-96.
49. R.T.Powers and G.Price, *Binary shifts on the hyperfinite II_1 factor*, Contemporary Math. 145(1993),453-464.
50. R.T.Powers and G.Price, *Cocycle conjugacy classes of shifts on the hyperfinite II_1 factor*, J.Func.Anal.121(1994),275-295.
51. G.Price, *The C^* -algebras generated by paires of semigroups of isometries satisfying certain commutation relations*, preprint.
52. G.Price, *Shifts on type II_1 factors*, Canadian J.Math. 39 (1987), 493-511.
53. G.Price, *Shifts of integer index on the hyperfinite II_1 factor*, Pac.J.Math., 132 (1988), 379-390.
54. G.Price, *Endomorphisms of certain operator algebras*, Publ.RIMS 25(1989),45-57.
55. G.Price, *Shifts on certain operator algebras (in Operator Theory:Proceedings of the 1988 GPOTS-Wabash conference*, Longman Scientific and Technical, 1990.
56. G.Price, *Binary shifts on the hyperfinite II_1 factor*, Abstracts of A.M.S. 13 (1992) 450 (876-46-27).
57. G.Price, *Shifts on the hyperfinite II_1 factor (Preliminary report)*, Abstracts of A.M.S. 15 (1994) 94.
58. G.Price, *Cocycle conjugacy classes of shifts on the hyperfinite II_1 factor, II* , preprint (1995).
59. Y.Sekine, *An inclusion of type III factors with index 4 arising from an automorphism*, preprint.
60. J.Slawny, *On factor representations and the C^* -algebra of canonical commutation relations*, Comm.Math.Phys., 24(1972),151-170.
61. P.J.Stacy, *Product shifts on $B(H)$* , Proc.Amer.Math.Soc.113(1991),955-963.

- 62. P.J.Stacy, *A comment of certain p-shift algebras*, J. Austral. Math. Soc. 49(1990),55-58.
- 63. P.J.Stacy, *Crossed products of C^* -algebras by $*$ -endomorphisms*, J. Austral. Math. Soc. 54(1993),204-212.
- 64. K.Watanabe, *Shifts with two generators on the hyperfinite II_1 -factor*, Nihonkai J.Math.
- 65. H.Yin, *Entropy of certain noncommutative shifts*, Rocy Mtn.J.Math. 20(1990),651-656.