

作用素環の接合積における或る結果について

大阪教育大 高井 博司

§1. 序

作用素環の接合積に関する研究は、1950年代の後半に東北大学の研究者によるグループが、種々の議論を展開して、今日のこの方面での基礎を築いたけれども、元來はMurrayとvon Neumannによるfactorのexampleに起因している。そして今日では、接合積の理論は、多方面に於いて用いられるに至った。例えばChingによるII-factorの存在と([5])、non-hyperfiniteなIII-factorが非可算無限有ることの証明や([6])、最近では、Nakamura-TakedaによるGaloisの理論([8])の一般化をHenleがやっている。([4])

一方C*-algebraの接合積についてはTurumaru([2])により始めて導入されその後の理論が基礎になりcontinuous groupによるC*-接合積の議論がGlimm([7])、Effros([10])、Guichardet([12][13])、などによりなされ、Søller-Meyer([20])がそれらを体

系的にまとめ議論を展開した。この paper では最近得たる、この結果について述べてみることにする。

§ 2. 作用素環の接合積の構成

先ず、von Neumann algebra から話をする。 $\mathcal{M}$ を Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の von Neumann algebra とする。 $\|\sum_{g \in G} g \otimes \xi_g\| = \sum_g \|\xi_g\|^2 < +\infty$ なる $\sum_{g \in G} g \otimes \xi_g$ の全体を $G \otimes \mathcal{H}$ で表わすことにする。ただし G は $\mathcal{M}$ 上の countable (discrete) automorphism group である。今 $G \otimes \mathcal{H}$ に Hilbert space の構造を次の様にして入れる：

$\sum g \otimes \xi_g, \sum h \otimes \eta_h \in G \otimes \mathcal{H}$ に対して

$$(\sum g \otimes \xi_g) + (\sum h \otimes \eta_h) = \sum h \otimes (\xi_h + \eta_h)$$

$$\lambda (\sum g \otimes \xi_g) = \sum g \otimes (\lambda \xi_g) \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

$$\langle \sum g \otimes \xi_g | \sum h \otimes \eta_h \rangle = \sum_g \langle \xi_g | \eta_g \rangle$$

そしてこの Hilbert space $G \otimes \mathcal{H}$ 上の bounded linear operator を次の様に定義する：

$g \in G, x \in \mathcal{M}$ に対して

$$(g \otimes x) (\sum_h h \otimes \xi_h) = \sum_h h g' \otimes h(x) \xi_h$$

$$(\sum_h h \otimes \xi_h \in G \otimes \mathcal{H})$$

($\mathcal{M}$ の G に対する接合積)

この時、 $\sqrt{G \otimes \mathcal{M}}$ を $g \otimes x$ ($g \in G, x \in \mathcal{M}$) で生成される von Neumann algebra とおると、 $g \otimes x, h \otimes y \in G \otimes \mathcal{M}$ に対してこれらの積と $\ast$ operation それから automorphism の関係は次の式で表わされ

る:

$$(g \otimes x)(h \otimes y) = gh \otimes h'(x)y$$

$$(g \otimes x)^* = g' \otimes g(x^*)$$

$$(g \otimes 1)(1 \otimes x)(g \otimes 1)^* = 1 \otimes g(x) \quad (g, h \in G, x, y \in M)$$

今 $G \otimes M$ から $1 \otimes M$ への mapping を次の様に定義する:

$$e(T) = \sum_{g \in G} P_g T P_g \quad (T \in G \otimes M)$$

ただし P_g は $G \otimes M$ から $g \otimes M$ への projection である。その時 e は $G \otimes M$ から $1 \otimes M$ への faithful normal expectation になる。以下これを canonical expectation と呼ぶことにする。さて今 f を M 上の faithful normal state とし $\tilde{f} = f \cdot e$ とおくと $\tilde{f}$ は $G \otimes M$ 上の faithful normal state となりよく知られているように $G \otimes M$ の任意の element T は uniquely に Fourier 展開されて次の様に書ける。

$$T = \sum_g g \otimes x_g \quad (\text{w.r.t } \tilde{f} \text{ norm}) \quad (x_g \in M)$$

実際は $x_g = e((g \otimes 1)^* T)$ となる。([4])

次に C^* 接合積の話をお少し述べよう。 $\mathcal{A}$ を C^* -algebra とし G をその上の countable discrete automorphism group とする。 $\ell^1(G, \mathcal{A})$ で G から $\mathcal{A}$ への mapping F で $\sum_g \|F_g\| < +\infty$ なる条件を満足するものの全体を表わす。 $\ell^1(G, \mathcal{A}) \rightarrow F, G$ に対して積と $*$ operation 及び norm を次の様に定義する:

$$(FG)_g = \sum_h F_h h(g h^{-1}g)$$

$$(F^*)_g = g(F_1^*)$$

$$\|F\|_1 = \sum_g \|F_g\|,$$

その時 $\mathcal{L}'(G; \mathcal{A})$ は *Banach $*$ algebra* となり、これは *group algebra* $\mathcal{L}'(G)$ の拡張になっていると考えられる。さらに $\mathcal{L}'(G; \mathcal{A}) \ni F$ に対して

$$\|F\|_1 = \sup_{\pi \in \text{Rep } \mathcal{L}'(G; \mathcal{A})} \|\pi(F)\|$$

とおくと $\|\cdot\|_1$ は $\mathcal{L}'(G; \mathcal{A})$ 上の C^* -norm になり

$$G \otimes \mathcal{A} = \overline{(\mathcal{L}'(G; \mathcal{A}), \|\cdot\|_1)}$$

とおき $\mathcal{A}$ の G による C^* -接合積 と呼ぶことにする。 $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ の場合は G の *enveloping C^* algebra* $C^*(G)$ である。 ([26])

さらに $\mathcal{L}'(G; \mathcal{A}) \ni F$ に対して

$$\|F\|_\alpha = \sup_{S \in \text{Rep } \mathcal{A}} \|(\text{Ind } S)(F)\|$$

とおく。 ただ $(\text{Ind } S)$ は $(\text{Ind } S)(F)$ の *matrix* 表示が $(\text{Ind } S)(F)_{s,t} = S[S^*(F_{st})]$ なる $\mathcal{L}'(G; \mathcal{A})$ から $G \otimes \mathcal{A}$ 上への表現を意味する。その時 $\|\cdot\|_\alpha$ も同様に $\mathcal{L}'(G; \mathcal{A})$ 上の C^* -norm になり

$$G \otimes_\alpha \mathcal{A} = \overline{(\mathcal{L}'(G; \mathcal{A}), \|\cdot\|_\alpha)}$$

とおきこの C^* -algebra を reduced な接合積 と呼ぶことにする。

([26]) これは *Tuymaev* による C^* -接合積 に一致する。 ([26])

しかも $(G \otimes_\alpha \mathbb{C})^\wedge = \hat{G}_r$ となる。 ([26])

§ 3. Extension property と property T

先ず Tomiyama ([24]) による extension property (略して (EP) と書く) を接合積の中に持ち込んだ話をしよう。 $\mathcal{A}$ を unital C^* -algebra とする。今 $\mathcal{A}$ が (EP) を持つ (略して $\mathcal{A} \in (EP)$ と書く) と云うのを $\mathcal{A}$ を含む任意の unital C^* -algebra B に対して B から $\mathcal{A}$ への expectation E が存在する時を云う。 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{H}$ 上の von Neumann algebra の時は $\mathcal{A} \in (EP)$ なる必要かつ十分な条件は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ から $\mathcal{A}$ への expectation E が存在することである。([24]) これを使って次の定理を証明する

定理 1. M を $\mathcal{H}$ 上の finite von Neumann algebra とし G を M 上の countable discrete group とする。そして τ を normalized な normal G -invariant trace ($\text{on } M$) とする。その時 $G \otimes M \in (EP)$ なる為の必要十分条件は $M \in (EP)$ かつ G が amenable であることである。

証明:

もし $G \otimes M \in (EP)$ なら $\mathcal{L}(G \otimes \mathcal{H})$ から $G \otimes M$ への expectation π が存在する。 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ から M への expectation π としては

$$\pi = \Phi^* \circ e \circ \pi \circ \Phi$$

とおけばよい。ただし Φ は $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ から $\mathcal{L}(G \otimes \mathcal{H})$ への amplification であり、 e は $G \otimes M$ から M への canonical expectation である。よって $M \in (EP)$ である。次に G が amenable を云う為に次の補題

をおく.

補題 2. ([3]) $\mathcal{L}^\infty(G)$ から $\mathcal{L}(G \otimes \mathcal{H})$ への *positive linear map* で次の性質を満たすものが存在する.

$f \mapsto A_f$ を求めるものとする $A_1 = I$, $(g \otimes 1) A_f (g \otimes 1)^* = A_{f_g}$ ただし $f_g(h) = f(hg)$ なる $\mathcal{L}^\infty(G)$ の *element* である.

証明:

$$A_f(\sum g \otimes x_g) = \sum_g f(g) g \otimes x_g \quad \text{とおけばよい.}$$

さて本論に戻って

$$\tilde{\tau}[\sum g \otimes x_g] = \sum_g \delta_{g,e} \tau(x_g)$$

とおくと、 $\tilde{\tau}$ は $G \otimes M$ 上の *normalized normal trace* となる。そこで $\mathcal{L}^\infty(G)$ 上の関数 μ を

$$\mu(f) = \langle A_f, {}^t\pi(\tilde{\tau}) \rangle \quad (f \in \mathcal{L}^\infty(G))$$

とおく。ただし A_f は補題 2 に於ける $G \otimes \mathcal{H}$ 上の *operator* である。 ${}^t\pi$ は π の *transpose map* である。その時 μ は $\mathcal{L}^\infty(G)$ 上の *mean* になることは明らかである。さらに

$$\begin{aligned} \mu(f_g) &= \langle A_{f_g}, {}^t\pi(\tilde{\tau}) \rangle = \langle (g \otimes 1) A_f (g \otimes 1)^*, {}^t\pi(\tilde{\tau}) \rangle \\ &= \langle (g \otimes 1) \pi(A_f) (g \otimes 1)^*, \tilde{\tau} \rangle = \langle \pi(A_f), \tilde{\tau} \rangle \\ &= \mu(f) \quad (g \in G) \end{aligned}$$

よって μ は $\mathcal{L}^\infty(G)$ 上の *right invariant mean* となり G は *amenable* になる。

逆に $\mu \in (EP)$ とし G を *amenable* とすると、Tomiyama ([24]) により

$M' \in (E, P)$ より $L(\mathcal{H})$ から M' への expectation π' が存在する。さらに $L(\mathcal{H})$ から $L(L^2(G)) \otimes M'$ への expectation $L\pi'$ で $(L\pi')(x \otimes y) = x \otimes \pi'(y)$ なる条件を満たすものが存在する。 $L(L^2(G)) \otimes M' = (I \otimes M)'$ より任意の $X \in L(\mathcal{H})$ に対して $(L\pi')(X) \in (I \otimes M)'$ として

$$(1) \quad (g \otimes 1)(L\pi')(X)(g \otimes 1) \in (I \otimes M)'$$

G は amenable より invariant measure μ が G 上に存在する。ゆえに (1) より

$$(2) \quad \int_G (g \otimes 1)(L\pi')(X)(g \otimes 1)^* d\mu(g) \in (I \otimes M)'$$

又 $h \otimes 1 \in G \otimes I$ に対して

$$\begin{aligned} (h \otimes 1) \left\{ \int_G (g \otimes 1)(L\pi')(X)(g \otimes 1)^* d\mu(g) \right\} (h \otimes 1)^* \\ = \int_G (hg \otimes 1)(L\pi')(X)(hg \otimes 1)^* d\mu(g) \\ = \int_G (g \otimes 1)(L\pi')(X)(g \otimes 1)^* d\mu(g) \end{aligned}$$

よって (2) より

$$(3) \quad \int_G (g \otimes 1)(L\pi')(X)(g \otimes 1)^* d\mu(g) \in (G \otimes M)'$$

よって

$$(4) \quad \overline{\omega} \{ U(L\pi')(X)U^*; U \text{ は } G \otimes M \text{ の unitary} \} \cap (G \otimes M)' \neq \emptyset$$

Tomiyama ([24]) により (4) から $(I \otimes M)'$ より $(G \otimes M)'$ への expectation が存在する。

$$\tilde{\pi}' = \mathcal{S} \circ (L\pi')$$

とおくと $\tilde{\pi}'$ は $L(\mathcal{H})$ から $(G \otimes M)'$ への expectation である。ゆえに $(G \otimes M)' \in (E, P)$ として $G \otimes M \in (E, P)$ となり証明が終る。

これは次の系の拡張になっていると考えられる。

系3. ([4]) G を countable discrete group とする。その時 G による group von Neumann algebra $\mathcal{O}(G)$ が (EP) を持つ為の必要十分な条件は G が amenable となることである。

この系に関連して極最近 Lance は $C^*(G)$ が Property T を持つ為の必要十分な条件は G が amenable である、という結果を出したが、これは C^* 接合積の中に話を持ち込むことが出来ることを以下に述べよう。ただしこのでいう Property T と云うのは $\mathcal{A}$ を C^* algebra とし、 $\mathcal{A}$ が Property T を持つと云うのを (以下 $\mathcal{A} \in (T)$ と書く) 任意の C^* algebra B に対して $\mathcal{A} \otimes B = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{C}} B$ が成り立つことをそういうのである。([20])

さて次のことを示そう。(証明は Takesaki によるところが多い)

定理4. $\mathcal{A}$ を separable C^* algebra とし G をその上の discrete automorphism group とする。その時 $G \otimes \mathcal{A} \in (T)$ なる為の必要十分な条件は $\mathcal{A} \in (T)$ で G が amenable となることである。

証明:

もし $G \otimes \mathcal{A} \in (T)$ ならば任意の C^* algebra B に対して

$$\mathcal{A} \otimes B \subset (G \otimes \mathcal{A}) \otimes B,$$

ただし $\otimes$ は代数的な tensor product を意味する。 $(G \otimes \mathcal{A}) \otimes B$ 上で $\alpha = \nu$ より $\mathcal{A} \otimes B$ 上で $\alpha = \nu$ 、よって $\mathcal{A} \in (T)$ となる。次に G が amenable になることを示す。 π を $\mathcal{A}$ の $\mathcal{H}$ 上への standard 表現とし、

J_π を $\mathcal{A}$ 上の involution とする. $(G, \mathcal{A})$ の covariant 表現を次の様に定義する:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(s)\xi)(t) &= \xi(ts), \quad (\pi(x)\xi)(t) = \pi \cdot tx \xi(t) \\ (\tilde{\pi}(s)\xi)(t) &= \xi(st), \quad (\tilde{\pi}(x)\xi)(t) = J_\pi \pi \cdot t^* x J_\pi \xi(t^*) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\left(\begin{array}{l} t, s \in G, x \in \mathcal{A} \\ \xi \in \mathcal{L}^1(G) \otimes \mathcal{H}_\pi \end{array} \right)$$

さらに $G \otimes \mathcal{A} \rightarrow H$ に対して

$$\pi(H) = \sum_{g \in G} \pi(H_g) \mathcal{L}(g)$$

$$\tilde{\pi}(H) = \sum_{g \in G} \tilde{\pi}(H_g) \tilde{\pi}(g)$$

とおくと、 $\pi, \tilde{\pi}$ は $G \otimes \mathcal{A}$ の $\mathcal{L}^1(G) \otimes \mathcal{H}_\pi$ 上の表現となる。明らかに $\pi, \tilde{\pi}$ は可換より $(G \otimes \mathcal{A}) \hat{\otimes} (G \otimes \mathcal{A})$ の $\mathcal{L}^1(G) \otimes \mathcal{H}_\pi$ 上への表現 π_0 で次の条件を満たすものが存在する:

$$\pi_0(H \otimes G) = \pi(H) \tilde{\pi}(G) \quad (H, G \in G \otimes \mathcal{A})$$

π_0 の作り方より $\pi_0|_{G \times G} = \mathcal{L} \times \tilde{\pi}$ より $\mathcal{L} \times \tilde{\pi}$ に quasi-equivalent である。ただし $\mathcal{L}, \tilde{\pi}$ はそれぞれ G から $\mathcal{L}^1(G)$ 上の left regular, right regular 表現である。今仮定より $G \otimes \mathcal{A} \in (T)$ だから次のことが成立する:

$$(G \otimes \mathcal{A}) \hat{\otimes} (G \otimes \mathcal{A}) = (G \otimes \mathcal{A}) \hat{\otimes}_\alpha (G \otimes \mathcal{A}),$$

だから π_0 は α -norm に関して continuous である。よって $\mathcal{L} \times \tilde{\pi}$ は α -norm に関して continuous である。だから Lance によって G は amenable である。逆に $\mathcal{A} \in (T)$ で G が amenable とすると、

Zeller-Meier によって $G \otimes A = G \otimes_{\alpha} A$ である。 $A \in (T)$ だから、
任意の C^* -algebra B に対して

$$\begin{aligned} (G \otimes A) \hat{\otimes} B &= G \otimes (A \hat{\otimes} B) = G \otimes_{\alpha} (A \hat{\otimes} B) \\ &= G \otimes_{\alpha} (A \hat{\otimes} B) = (G \otimes_{\alpha} A) \hat{\otimes} B \\ &= (G \otimes A) \hat{\otimes} B, \end{aligned}$$

よって $G \otimes A \in (T)$ となる。

証明終。

注: C^* -algebra の type(I) の話も同様に出来るように思われる。

§ 4. Unequivalent non approximately finite groups

Krüger は ([15]) の中で inequivalent な nonapproximately finite な
いくつかの group を与えたが、ここでは Choda の結果を用いてさ
いくつかの inequivalent な non approximately finite group の example を
与える。 先ず Dye と Hager ([9], [27]) による full group の話を
少ししておく。 M を von Neumann algebra とし G をその
上の countable automorphism group とする。 今 $[G]$ を次の様に定
義する:

$$[G] = \{ \alpha \in \text{Aut}(M); \sup_{\beta \in G} F(\alpha, \beta) = 1 \},$$

ただし

$$F(\alpha, \beta) = \text{largest } \{ p \in (M \cap M')^p \mid \alpha \upharpoonright p \sim \beta \upharpoonright p; \text{ inner on } M_p \}$$

と定義する。 $[G]$ は G を含む group になり $[G] = [G]$ を満たす。
 この group を G による full group という。 さて今 M_2 を von Neumann algebra (i.e.) とし α, β をそれぞれ M_1, M_2 上の automorphism とする。 Φ を M_1 から M_2 上への isomorphism とした時 $\Phi(\alpha), \Phi^{-1}(\beta)$ を次の様に定義する:

$$\Phi(\alpha) = \Phi \circ \alpha \circ \Phi^{-1}, \quad \Phi^{-1}(\beta) = \Phi^{-1} \circ \beta \circ \Phi$$

その時 $\Phi(\alpha), \Phi^{-1}(\beta)$ はそれぞれ M_2, M_1 上の automorphism となる。
 この notation を使って Dye による weak-equivalence の notion を導入する。 G_2 を M_2 上の countable automorphism group とする。(i.e.) G_1 と G_2 が equivalent (Dye による weakly equivalent) であると言うのを M_1 から M_2 上への isomorphism Φ で次の条件を満たす時を言う:

$$[\Phi^{-1}(G_2)] = [G_1].$$

equivalence の特徴付けとして Choda による次の定理がある:

定理 5. (i.e.) M_2 を abelian von Neumann algebra とし、 τ_2 を M_2 上の normalized faithful normal trace とし、 G_2 を τ_2 -preserving な M_2 上の countable freely acting automorphism group とする。 その時、 G_1 と G_2 が equivalent である為の必要十分条件は $G_1 \otimes M_1$ から $G_2 \otimes M_2$ 上への isomorphism Φ が存在して次の条件を満足することである:

$$\Phi(M_1) = M_2.$$

これによりもし $G \otimes M_1$ から $G \otimes M_2$ への isomorphism が存在しないならば G_1 と G_2 は inequivalent である。一方 Dye による group の approximate finiteness について少し述べる。([9]) (X, Σ, μ) を standard normalized measure space とし G をその上の countable freely acting automorphism group とする。 G が approximately finite であると言うのを任意の $\varepsilon > 0$ と G の元 $(g_i)_{i=1}^n$ に対して G の finite subgroup G_0 と G_0 の元 $(h_i)_{i=1}^n$ で次の条件を満たすものが存在することである:

$$\sup_{E \in \Sigma} \mu(E g_i \Delta E h_i) \leq \varepsilon \quad (1 \leq i \leq n).$$

Dye により G が non approximately finite である為の十分条件は G の subset H と元 $(g_i)_{i=1}^n$ で

$$(*) \quad H \cup g_i H = G, \quad g_i H \cap g_j H = \emptyset, \quad g_i H \cup g_j H \subset g_k H.$$

なるものが存在することである。例えば $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ から生成される free group とすると $H = \{u^n \dots | n \neq 0\}$, $g_1 = u$, $g_2 = v$, $g_3 = v^{-1}$ とおくと (*) を満たすから $\mathbb{Z}$ は non approximately finite group である。

([9]) Π を finite permutation group とする。その時、Murray-von Neumann により $\mathbb{Z} \rtimes \Pi$ はそれぞれ或る maximal abelian von Neumann algebra 上の trace preserving な freely acting, ergodic automorphism group として表現される。その algebra を A, B とすると、よく知られているように $\Pi \otimes B$ は Property P を持ち $\mathbb{Z} \otimes A$ は持たない。([17]) 一方 Saito により $(\mathbb{Z} \rtimes \Pi) \otimes (A \otimes B)$ は

$(\mathfrak{K} \otimes \mathfrak{A}) \otimes (\Pi \otimes B)$ に isomorphic より ([17]), Missonou の結果より、
 $(\mathfrak{K} \times \Pi) \otimes (\mathfrak{A} \otimes B)$ は Property Γ を持つ。([16]) よって定理 5 を使う
 と次の Krieger の結果を得る:

定理 6. ([15]) $\mathfrak{K}$ と $\mathfrak{K} \times \Pi$ は互いに inequivalent な non approximately
 finite な countable freely acting ergodic group である。

さてこの group を作る為次に一連の補助定理を証明す
 に述べる:

先ず Bures によるものとして

補助定理 7. ([1]) $\mathfrak{A}_n$ を maximal abelian von Neumann algebra と
 し、 G_n をその上の freely acting ergodic automorphism group とす
 る。さらに x_n を $\mathfrak{A}_n$ に対する separating & generating unit vector
 とすると、($n \geq 1$)

① G_n の restricted direct product $\bigsqcup_n G_n$ は (x_n) -adic tensor
 product $\bigotimes_n^{(x_n)} \mathfrak{A}_n$ 上の freely acting ergodic group となる。

②

$(\bigsqcup_n G_n) \otimes (\bigotimes_n^{(x_n)} \mathfrak{A}_n)$ は $\bigotimes_n^{(e_n \otimes x_n)} (G_n \otimes \mathfrak{A}_n)$ に同型
 になる。ただし e_n は G_n の unit element である。

次に Sakai によるものとして

補助定理 8. ([20]) M を finite factor とすると M の $\mathbb{C}$ -adic
 tensor product $\bigotimes_n^{\mathbb{C}} M_n$ ($M_n = M$) は asymptotically abelian で
 ある。(略して $\bigotimes_n^{\mathbb{C}} M_n \in (AA)$ と書く。)

$\mathfrak{H}, (\mathfrak{H} \times \Pi)$ をそれぞれ $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 上で作用しているとする

補助定理 9. $\mathfrak{H} \otimes \mathcal{A}, (\mathfrak{H} \times \Pi) \otimes \mathcal{B} \notin (A.A)$

これだけの準備をして主結果を述べると

定理 10. $\mathfrak{H}$ による *restricted direct product* $\bigsqcup \mathfrak{H}$ は $\mathfrak{H}, \mathfrak{H} \times \Pi$ に *inequivalent* な *non approximately finite countable freely acting ergodic group* である。

証明:

x を $\mathcal{A}$ に対する *generating* かつ *separating unit vector* とする。補助定理 7 (iii) により

$(\bigsqcup \mathfrak{H}) \otimes \bigotimes_{\mathbb{N}}^{(\infty)} \mathcal{A}$ は $\bigotimes_{\mathbb{N}}^{(\infty)} (\mathfrak{H} \otimes \mathcal{A})$ に同型で $\mathfrak{H} \otimes \mathcal{A}$ は *finite factor* より補助定理 8 により $(\bigsqcup \mathfrak{H}) \otimes (\bigotimes_{\mathbb{N}}^{(\infty)} \mathcal{A})$ は (A.A) を持つ。一方補助定理 9 により $\mathfrak{H} \otimes \mathcal{A}, (\mathfrak{H} \times \Pi) \otimes \mathcal{B}$ は (A.A) を持たない。よって定理 5 により $\bigsqcup \mathfrak{H}$ は $\mathfrak{H}, \mathfrak{H} \times \Pi$ に *inequivalent* である。 *non approximately finite* は明らかである。 証明終。

注: Ching により *inequivalent* な *non approximately finite group* の個数は連続濃度程有るらしいように思われる。[6]

§ 5. *modular automorphism and algebraic invariant T.*
最後に Connes の導入した *algebraic invariant T* について、これを接合積に持ち込んだ話をして話を終ります。

極最近 Connes は faithful normal state に depend する modular automorphism は inner を除いて決まることを示した。([7]) さらに彼は algebraic invariant T を導入して種々の性質を求めた。

.[8]) 今 M を σ -finite G -finite von Neumann algebra とする。

これは faithful normal G -invariant state ϕ が存在することと同値である。ただし G は M 上の countable automorphism group とする。 ϕ を ϕ に depend して決まる modular automorphism とすると、Takesaki により ϕ は G -invariant だから ϕ と G は互いに elementwise に可換である。([9]) だから次の automorphism が $G \otimes M$ 上に定義される：

$$(1) \quad (L \otimes \phi_x)(\sum g \otimes x_g) = \sum g \otimes \phi_x(x_g).$$

今 Gelfond-Segal 表現により $\phi = \omega_\xi$ と仮定できる。ただし ω_ξ は separatingかつ generating unit vector ξ に対する vector state である。

さて modular automorphism について、 ω_ξ は $G \otimes M$ に対する separatingかつ generating unit vector より ω_ξ に対する modular automorphism $\phi_x^{\omega_\xi}$ は次の様になる。ただし e は G の unit element である。

補助定理 11.

$$\phi_x^{\omega_\xi} = L \otimes \phi_x \quad (x \in \mathcal{P})$$

証明：

ω_{ξ} が $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}})$ に対して KMS 条件を満たすことを示す。

$$\begin{aligned}\omega_{\xi}[(\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}})(\sum_j g \otimes x_j)(\sum_k h \otimes y_k))] &= \sum_j \langle g \cdot \mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}}(x_j) y_{j+1} | \xi \rangle \\ &= \sum_j \mathcal{P}[\mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}} \cdot g(x_j) y_{j+1}],\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\omega_{\xi}[(\sum_k h \otimes y_k)(\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}})(\sum_j g \otimes x_j))] &= \sum_j \langle g(y_{j+1}) \mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}}(x_j) | \xi \rangle \\ &= \sum_j \mathcal{P}[y_{j+1} \mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}}(g(x_j))].\end{aligned}$$

$\mathcal{P}$ は $\mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}}$ に対する KMS state より、 $(g(x_j), y_{j+1})$ に対して $B = \{0 \leq \operatorname{Im} z\}$ 上で bounded continuous function F_g で B の中で holomorphic であり次の条件を満たすものが存在する：

$$F_g(t) = \mathcal{P}[\mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}} \cdot g(x_j) y_{j+1}], \quad F_g(t+i) = \mathcal{P}[y_{j+1} \mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}} \cdot g(x_j)] \quad (t \in \mathbb{R}).$$

そこで G は countable より $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ としよ。

$$\tilde{F}_n(z) = \sum_{k=1}^n F_{g_k}(z)$$

とおくと $\tilde{F}_n$ は B 上で bounded continuous で B の中で holomorphic となる。又 $\{\tilde{F}_n(t)\}_n$ と $\{\tilde{F}_n(t+i)\}_n$ はそれぞれ uniformly bounded で $\mathbb{R}, \mathbb{R}+i$ 上で uniformly converge する。よって maximum-modulus theorem により $\{\tilde{F}_n\}_n$ は或る bounded function $F(z)$ に uniformly converge する。ゆえに F は B 上で continuous であり、 B の中で holomorphic である。さらに

$$F(t) = \sum_j F_{g_j}(t) = \omega_{\xi}[(\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}})(\sum_j g \otimes x_j)(\sum_k h \otimes y_k))]$$

$$F(t+i) = \sum_j F_{g_j}(t+i) = \omega_{\xi}[(\sum_k h \otimes y_k)(\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}})(\sum_j g \otimes x_j))].$$

$\mathcal{P}$ は $\mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}}$ -invariant より ω_{ξ} は $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\xi}^{\mathcal{P}})$ -invariant になる。よって

uniquenessにより $\phi_t^{\otimes \infty} = \iota \otimes \phi_t^{\otimes \infty}$ となる。 証明終。

さて次に Connes により導入された T の話をしよう。 M を任意の von Neumann algebra とする。

$$T(M) = \{T \in \mathbb{R}^1 \mid \text{ある faithful normal state } \phi \text{ に対して } \phi_T = \iota_M\}$$

として $T(M)$ を定義するとこれは $\mathbb{R}^1$ の sub (additive) group となる。 ([7]) さらに $T \in T(M)$ である為の必要十分条件は ϕ_T を inner にするような faithful normal state ϕ が存在することである。 ([7]) 話を接合積にもどすと $T(G \otimes M)$ は次のように特徴付けられることができる：

補助定理 12. M を σ -finite G -finite von Neumann algebra とし ξ を M に対する separating かつ generating unit vector とし、 α_g を G -invariant とすると、 $T_0 \in T(G \otimes M)$ である為の必要かつ十分な条件は次の条件を満たす family $(a_g)_{g \in G}$ が M の中に存在することである：

$$(i) \sum_g a_g^* a_g = 1 = \sum_g a_g a_g^*, \quad (ii) g(a_h) = a_{gh} a_{g^{-1}}, \quad (iii) \phi_{T_0}^{\otimes \infty}(x) a_g = a_g g(x) \\ (g, h \in G, x \in M)$$

証明：

$T_0 \in T(G \otimes M)$ ならば $\phi_{T_0}^{\otimes \infty} = \iota_{G \otimes M}$ なる $G \otimes M$ 上の faithful normal state ψ が存在する。 Connes により

$$(2) \quad \phi_t^{\otimes \infty}(x) = u_t \phi_t^{\otimes \infty}(x) u_t^* \quad (t \in \mathbb{R}^1, x \in G \otimes M)$$

なる $G \otimes M$ の unitary operator u_t ($t \in \mathbb{R}^1$) が存在する。 補助定理 11

と(2)によって

$$(3) \quad (1 \otimes \sigma_{T_0}^{\otimes \infty})(x) = u_{T_0} x u_{T_0}^* \quad (x \in G \otimes M)$$

u_{T_0} は unitary operator より

$$u_{T_0} = \sum g \otimes a_g \quad (\text{with } \tilde{\omega}_\infty\text{-norm})$$

とすると $\sum g a_g^* a_g = 1 = \sum a_g a_g^*$ は明らかである。又(3)によつて

$$g \otimes 1 = (1 \otimes \sigma_{T_0}^{\otimes \infty})(g \otimes 1) = u_{T_0} (g \otimes 1) u_{T_0}^* \quad (g \in G)$$

よって $g(a_h) = a_{gh} a_g^{-1}$ を得る。さらに

$$1 \otimes \sigma_{T_0}^{\otimes \infty}(x) = u_{T_0} (1 \otimes x) u_{T_0}^* \quad (x \in M)$$

よって $\sigma_{T_0}^{\otimes \infty}(x) a_g = a_g g(x)$ を得る。逆は $u = \sum g \otimes a_g$ とおくと $\sum a_g^* a_g = 1 = \sum a_g a_g^*$ より u は $G \otimes M$ 上の unitary operator となる。又(3)により $\sigma_{T_0}^{\otimes \infty}(x) = u x u^* \quad (x \in G \otimes M)$ となり Connes より T_0 は $T(G \otimes M)$ に属する。証明終。

この補助定理により次の主結果を証明する:

定理13. M を σ -finite G -finite von Neumann algebra とする。ただし G は M 上の countable automorphism group とする。 H を G の subgroup とし、次の条件を満たすとする:

$G \setminus H \ni g$ に対して

$$C_g = \{h g h^{-1} \mid h \in G\} \text{ は infinite である。}$$

その時

$$T(G \otimes M) \subset T(H \otimes M)$$

証明:

$T(G \otimes M) \ni T_0$ に対して、補助定理12より

$$(i) \sum a_g^* a_g = 1 = \sum a_g a_g^*, \quad (ii) h(a_g) = a_{hg} h^{-1}, \quad (iii) \varphi_{T_0}^{\otimes \mathbb{E}}(x) a_g = a_g \varphi(x) \\ (g, h \in G, x \in M)$$

なる M の family $(a_g)_{g \in G}$ がとれる。ただし $\mathbb{E}$ は M に対する cyclic かつ separating unit vector で $a_{\mathbb{E}}$ は G -invariant である。

今も $G \setminus H$ の或る element g_0 に対して $a_{g_0} \neq 0$ とすると、 φ は G -invariant より、(iii) の条件から

$$(4) \quad 0 \neq \varphi(a_{g_0}^* a_{g_0}) = \varphi[h(a_{g_0})^* h(a_{g_0})] = \varphi(a_{hg_0h^{-1}}^* a_{hg_0h^{-1}}) \quad (h \in G),$$

仮定より C_{g_0} は infinite より、(4) から

$$+\infty = \sum_{h \in G} \varphi(a_{g_0}^* a_{g_0}) = \sum_{h \in G} \varphi(a_{hg_0h^{-1}}^* a_{hg_0h^{-1}}) \\ \leq \sum_{g \in G} \varphi(a_g^* a_g) = \varphi[\sum_g a_g^* a_g] = \varphi(1) = 1$$

これは矛盾。よって $G \setminus H \ni g$ に対して $a_g = 0$ となる。だから補助定理12により $T_0 \in T(H \otimes M)$ となる。証明終

$H = \{e\}$ とした時上の定理より次の系を得る:

系14. G を ICC-group とした時

$$T(G \otimes M) \subset T(M)$$

が成り立つ。

注: 補助定理11より $\Delta_{G \otimes M}^{\text{tr}} = 1 \otimes \Delta_M^{\text{tr}}$ を得られると思われるので $S(G \otimes M) \subset S(M)$ が十分多くの faithful normal G -invariant state が M 上に存在する時成り立つように思われる。ただし

$$S(M) = \bigcap_{\substack{\mathfrak{F}, \text{ faithful normal} \\ \text{state of } M}} \sigma(\Delta_{\mathfrak{F}})$$

である。[8]

最近の情報によれば Connes は G -invariant でない場合、 M を abelian として $T(G \otimes M)$, $S(G \otimes M)$ について解析しているそうです。

参考文献

- [1] D.J.C. Bures : Certain factors constructed as infinite tensor products, *Comp Math.*, 15, 169-191 (1963).
- [2] H. Choda : On the crossed product of abelian von Neumann algebras II, *Proc. Japan Acad.*, 43, 198-201 (1967).
- [3] H. Choda and M. Echigo : Some Remarks on von Neumann algebras with Property Q , *memoirs of Osaka Gakugei University*, 13, 13-21 (1964).
- [4] M. Choda and H. Choda : A remark on a construction of finite factors I, II, *Proc. Japan. Acad.*, 40, 471-478 (1964), 479-481 (1964).

- [5] W. Ching: Non-isomorphic non-hyperfinite factors,
Canad. J. Math., 21, 1293-1308 (1969).
- [6] ———: A continuum of non-isomorphic non-hyperfinite
factors, Comm on pure and applied. Math., XXIII, 921-
937 (1970).
- [7] A. Connes: Groupe modulaire d'une algèbre de genre
denombrable, to appear.
- [8] ———: Un nouvel invariant pour les algèbres de
von Neumann, C.R. Acad. Paris, Ser. A. 273, 900-
903 (1971).
- [9] H.A. Dye: On groups of measure preserving transformations
I, Amer. J. Math., 81, 119-159 (1959).
- [10] E.G. Effros and F. Hahn: Locally compact transformation
groups and C^* -algebras, Memoirs of the Amer. Math. Soc.,
75 (1967).
- [11] J. Glimm: ~~Eff~~ Families of induced representations,
Pacific J. Math., 12 (1962) 885-911.
- [12] A. Guichardet: Caractères des algèbres de Banach involutives,
Ann. Inst. Fourier, 13, (1963) 1-81.
- [13] ———: Produits tensoriels infinis et représentations
des relations d'anticommutation. Ann. Soc. École Norm. Sup.,

- [14] M. Henle: Galois theory of W^* -algebras, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [15] W. Krieger: On the isomorphy problem for ergodic equivalence relations, *Math. Z.*, 103, (1968) 78-84.
- [16] Y. Misonou: On divisors of factors, *Tohoku Math. J.*, 3, (1951) 132-135.
- [17] F. J. Murray and J. von Neumann: On rings of operators III, IV, *Ann. Math.*, 41, (1940) 94-161, 44, (1943) 716-808.
- [18] M. Nakamura and Z. Takeda: A Galois theory for finite factors, *Proc. Japan Acad.*, 36 (1960) 258-260.
- [19] T. Saitô: The direct product and crossed product of rings of operators, *Tohoku Math. J.*, 11, (1959) 229-304.
- [20] S. Sakai: Asymptotically abelian II_1 -factors, *Publ. Res. Inst. Soc.*, 4, (1968) 299-307.
- [21] M. Takesaki: Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, *Lecture notes in mathematics* 128, Springer-Verlag (1970).
- [22] ■: On the cross-norm of the direct product of C^* -algebras, *Tohoku Math. J.*, 16, 111-122 (1964).
- [23] —: Covariant representations of C^* -algebras and their locally compact automorphism groups,

Acta. Math., 119, (1967) 273-303.

- [24] J. Tomiyama : Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras, Lecture note, Univ of Copenhagen., (1970).
- [25] T. Tsurumaru : On the crossed product of operator algebras, *Tohoku Math. J.*, 10, (1958) 355-365.
- [26] G. Zeller-Meier : Produits croisés d'une C^* algèbre par un groupe d'automorphismes, *J. math. pures et appl.*, 47, ~~1968~~ (1968) 101-239.
- [27] Y. Haga and S. Takeda : Correspondence between subgroups and subalgebras in a cross product von Neumann algebra, *Tohoku Math. J.*, 24 (1972) 167-190.