

Local system に対する Hodge-Tate 分解の理論について

奈良女子大 理 兵頭 治

(Osamu Hyodo)

複素数体上の Hodge 理論に対応する理論が、 p 進体上の多様体にも存在することは、Tate [13] によって発見された。以降、Fontaine の努力により、 p 進体上の代数多様体の p 進 étale cohomology と微分形式の間の関係についての理解は深まってきました。(文献 [1] ~ [11])

Hodge 分解の p 進対応物として [13] で提出された、いわゆる Hodge-Tate 分解の予想は、Faltings [3] によって全く一般的に証明された。そこでは定数層の cohomology 群が扱われているが、もっと一般の local system の cohomology を相手にした理論を作るのは大切なことと思います。例えば、Faltings [2] は、 p -divisible group に対応する local system を考察して、modular form に対応する p 進表現の Hodge-Tate 分解を導いている。

本稿では、local sytem に対し、その Hodge-Tate 分解を定

義し、さらに Hodge-Tate 分解を持つような local system の cohomology 群の Hodge-Tate 分解についての結果をのべます。§1 では古典的な Hodge-Tate 分解の理論の復習をして、§2 では local system の Hodge-Tate 分解の理論に本質的な役割を果たす群 S_∞ を導入します。§3 では主要な結果をのべます。

記号を次のように定めておく。K は完備離散付値体で、その整数環を O_K 、剰余体を F とする。本稿では常に、 $\text{ch } K = 0$ $\text{ch } F = p > 0$ で、F は完全体と仮定する。 G_K で K の絶対 Galois 群 $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ を表す。一般に G_K が連続的に作用する $\mathbb{Z}_p$ -module M に対して、その Tate twist $M(r)$ は次のように定義される。 $\chi: G_K \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ を cyclotomic character、つまり、すべての 1 の p^n 乗根 ζ に対して、 $\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi(\sigma)}$ をみたすものとする。 $M(r)$ は加群としては M と同型で、 G_K の作用が変わる。 $x \in M$ に対応する $M(r)$ の元を x' と書くと、

$$\sigma(x') = ((\chi(\sigma))^r \cdot \sigma(x))'$$

となる。特に 1 の p^n 乗根全体の群を μ_{p^n} と書くと、

$$\mathbb{Z}_p(1) = \varprojlim_n \mu_{p^n}, \quad \mathbb{Z}_p(r) = \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes r}$$

である。

§1. Hodge-Tate 分解の古典理論.

G_K の p 進表現 V とは, 有限次元の $\mathbb{Q}_p$ -vector space で G_K の連続作用を持つものとしします. G_K の p 進表現のなかで, 代数幾何や保型形式から出てくるものには特別の「良い性質」があることが期待されます. この節では, その「良い性質」の一つである Hodge-Tate 表現について復習します. (他のより強い条件は [5] にありますが, 本稿では触れません.)

Hodge-Tate 表現の定義をする前に, $\mathbb{Q}_p$ という巨大な G_K -module の性質を調べる必要がある. $\mathbb{Q}_p$ は K の代数閉包の完備化として定義される. G_K の $\mathbb{Q}_p$ 係数 continuous cohomology について, 次の結果がある.

定理 (Tate [13]) (1) $\mathbb{Q}_p(V)$ の G_K 不変部分は,

$$H^0(G_K, \mathbb{Q}_p(V)) := \mathbb{Q}_p(V)^{G_K} = K \quad (V=0), \quad 0 \quad (V \neq 0)$$

$$(2) \quad \lambda \geq 1 \text{ の時, } H^i(G_K, \mathbb{Q}_p(V)) \simeq \begin{cases} K & (i, V) = (1, 0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

さて, G_K の p 進表現 V に対して, K -vector space $D^i(V)$ を

$$D^i(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{Q}_p(i))^{G_K}$$

で定義する. すると, $D^i(V)(-\lambda)$ は $V \otimes \mathbb{Q}_p$ の部分になる.

命題 自然な準同型

$$\bigoplus_i D^i(V) \otimes_K \mathbb{C}_p(-i) \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$$

は injective である。

証明は [12] Prop. 5 を参照。先の定理 (1) を用いる。

定義 V が Hodge-Tate 表現とは、命題の準同型が同型なることを言う。言い換えれば、次の等式がなりたつこと。

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} V = \sum_i \dim_K D^i(V)$$

(一般には、上の命題より、(左辺) $\geq$ (右辺) がなりたつ。)

補題 Hodge-Tate 表現の部分、商、dual、直和、Tensor 積は、また Hodge-Tate 表現になる。

証明は易しい。[4] 3.4 と同じ議論を用いる。

Hodge-Tate 表現の例をあげよう。

(1) $\mathbb{Q}_p(r)$ は Hodge-Tate 表現で、(定理 (1) より、)

$$D^i(\mathbb{Q}_p(r)) = K \quad (i = -r), \quad 0 \quad (i \neq -r).$$

(2) (Hodge-Tate 分解, Faltings [3]) X を K 上の proper smooth variety とする。 X の p -進 étale cohomology 群 $H^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p)$ ($\bar{X} = X \otimes_K \bar{K}$) は Hodge-Tate 表現で $\pm r$ に

functorialな同型 $D^i(H^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p)) \simeq H^{m-i}(X, \Omega^i)$

がある。つまり、次の functorial な同型がある。

$$H^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \simeq \bigoplus_{i+j=m} H^i(X, \Omega^j) \otimes_{\mathbb{C}_p} \mathbb{C}_p(-i)$$

§2. $\mathbb{C}_p$ の高次元版 — S_∞ の定義

この節以降の我々の主目的は次のようである。 X を K 上の proper smooth variety とする。 V を X 上の smooth $\mathbb{Q}_p$ -sheaf, すなわち有限次元 $\mathbb{Q}_p$ -vector space で、 $\pi_1(X)$ の連続作用をもつものとする。このような V に対して、 V が Hodge-Tate sheaf であることの定義を与え、それが良い性質をみたすことを示す。例えば、§1 の補題に対応すること、あるいは、proper smooth morphism による Hodge-Tate sheaf の higher direct image もまた Hodge-Tate sheaf であること等である。§1 の例(2) も自然に後者に含まれることになる。

Hodge-Tate sheaf の定義は、 X の O_K 上の model をとり、その affine open subscheme ごとになされる。この節では、各 affine open ごとに、 $\mathbb{C}_p$ の役割を果たすことになる巨大な群 S_∞ を構成し、その性質を述べる。大切になるのは、 S_∞ の構成が functorial に行われることと、§1 の Tate の定理と同様の結果が得られることである。

この節では次の性質をみたす O_K -algebra R を fix する。

R は integral normal で O_K 上 flat of finite type, さらに $R[1/p]$ は K 上 smooth で, $d = \text{rel. dim } R/O_K$ とすると, R は d 個の unit $\{u_1, \dots, u_d\}$ で, $d \log(u_i)$ が自由 $R[1/p]$ 加群 $\Omega^1 = \Omega^1_{R[1/p]/K}$ の基底になっているものを含んでいるとする。簡単のため K は $R[1/p]$ 中代数的に閉じているとする。

$\bar{R}$ を $R[1/p]$ の最大不分岐拡大中の R の整閉包とする。 $\bar{R}$ は巨大な環だが, 注意するのは, $\bar{R} \ni u_i^{1/p^n}$ ($\forall n$), $\bar{R} \supset R \cdot O_K$ であることである。例えば, $R = O_K[T, T^{-1}]$ なら,

$\bar{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_K[T^{1/n}, T^{-1}]$ となる。簡単のため, $\Gamma = \text{Gal}(\bar{R}/R)$, $\Delta = \text{Gal}(\bar{R}/R \cdot O_K)$ とおく。すると, $\Gamma/\Delta \cong G_K$ である。

$\mathbb{C}_p$ の類似物を考えるためには, まず $\mathbb{C}_p$ が何に由来しているかを知らる必要があります。結論を言ってしまうと, 答は [6] で重要な役割を果たしている次の定理から出てきます。

定理 (Fontaine [6]) 次の自然な準同型は surjective。

$$O_K \otimes \mu_{p^\infty} \rightarrow \Omega^1_{O_K/O_K} ; a \otimes \zeta \mapsto a \cdot d \log \zeta$$

(μ_{p^∞} は 1 の p 中根全体のなす群。) 核も次のようになる。

(左辺) $\cong O_K \otimes (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)(1) \cong (\bar{K}/O_K)(1)$ と書くとき, ある

$c \in O_K$ があて, $(c^{-1}O_K/O_K)(1)$ が核になる。

定理よりただちに

$$\left(\varprojlim_n (\Omega_{O_K/O_K}^1)^{p^n\text{-torsion}} \right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p(-1) = \mathbb{Q}_p$$

となる。すなわち、 $\mathbb{Q}_p$ は微分加群から出てくるのです。

[6] では、上の同型を用いて、abelian variety の Tate module が Hodge-Tate 表現であることを示していた。）

さて、それでは $\Omega_{R/R}^1$ の構造がどうなっているか調べる必要があります。まず、一番簡単な場合 $R = O_K[T, T^{-1}]$ の時を考察してみる。この場合、次の完全系列

$$\bar{R} \otimes_{O_K} \Omega_{O_K/O_K}^1 \rightarrow \Omega_{R/O_K}^1 \rightarrow \Omega_{R/O_K}^1 \rightarrow 0$$

の最初の射は injective。 Ω_{R/O_K}^1 の生成元は $\{d\log T^{1/p^n}\}_n$

だから $\bar{R}[1/p] \otimes_R \Omega_{R/O_K}^1 \xrightarrow{\sim} \Omega_{R/O_K}^1$ 。右辺の生成元

$d\log T$ が丁度 $\Omega_{R/R, O_K}^1$ 内で消えるから、完全列

$$(*) \quad 0 \rightarrow \bar{R} \otimes_{O_K} \Omega_{O_K/O_K}^1 \rightarrow \Omega_{R/R}^1 \xrightarrow{\gamma} (\bar{R}[1/p]/\bar{R}) \otimes_R \Omega_{R/O_K}^1 \rightarrow 0$$

を得る。(*) の射 γ は T の p^n 乗根の列 $\{T^{1/p^n}\}$ を選ぶこ

とによって、 $\bar{R}$ 加群としての splitting をもつ。しかし、こ

の splitting は Δ の作用を保たない。今の例では $\Delta \simeq \mathbb{Z}$ な

ので、その生成元を σ とする。 ζ_{p^n} を適当な 1 の原始 p^n 乗

根とすると、 $\sigma(T^{1/p^n}) = \zeta_{p^n} T^{1/p^n}$ 。従って

$$\sigma(d\log T^{1/p^n}) = d\log T^{1/p^n} + d\log \zeta_{p^n}。$$

そして、 $n \gg 0$ では $d\log \zeta_{p^n} \neq 0$ なのである。

さて、一般の R の場合にもとる。再び、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{R} \otimes_{O_E} \Omega_{O_E/O_K}^1 & \xrightarrow{\alpha} & \Omega_{\bar{R}/R}^1 & \xrightarrow{\gamma} & \Omega_{\bar{R}/R, O_E}^1 & \rightarrow & 0 \quad (\text{exact}) \\ & & & & \uparrow \beta & & \\ & & & & (\bar{R}[1/p]/\bar{R}) \otimes_R \Omega_{R/O_K}^1 & & \end{array}$$

ここに、 β は R の単数 $\{u_i\}$ を用いて、

$$(a/p^n) \otimes d\log u_i \mapsto a d\log u_i^{1/p^n}$$

で定義される。Faltings [3] により先の (*) にあたることは
"大体" 成立している。

定理 (Faltings [3]) ある自然数 m があって
 $\text{Ker } \alpha$, $\text{Ker } \beta$, $\text{Cok } \beta$ はすべて p^m 倍すると消える。

今、 $M = (\varprojlim_n (\Omega_{\bar{R}/R}^1)_{p^n\text{-torsion}}) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p(-1)$ とおくと、

$$(*) \quad 0 \rightarrow \hat{\bar{R}}[1/p] \rightarrow M \xrightarrow{\gamma} \hat{\bar{R}}[1/p] \otimes_R \Omega_{R/O_K}^1(-1) \rightarrow 0$$

($\wedge$ は p -進完備化をあらわす)

という完全列が得られたのである。 $\checkmark$ 先の (*) の時と同様に、

γ は $\hat{\bar{R}}[1/p]$ 加群としては splitting をもつが、それは $\triangleleft$ の作用を保たない。また、 $d\log: \mu_{p^\infty} \rightarrow \Omega_{\bar{R}/R}^1$ により、

自然な準同型 $\mathbb{Z}_p \rightarrow M$ が得られる。これは単射で

1 つ固定した、 $\mathbb{Z}_p$ の生成元を 1 と記す。 M は $\hat{\bar{R}}[1/p]$ 加群としては自由、rank $d+1$ で base $\{1, "d\log u_i"\}$ となる。

いよいよ S_∞ の構成をする。

$$S_n := \text{Sym}_{\hat{R}[1/p]}^n M, \quad S_\infty = \varinjlim S_n$$

ここで順極限は、 $S_n \rightarrow S_{n+1}, [x_1 \otimes \cdots \otimes x_n] \mapsto [1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n]$ により走る。定義より、完全列

$$0 \rightarrow S_{n-1} \rightarrow S_n \rightarrow \hat{R}[1/p] \otimes_R (\text{Sym}_R^n \Omega_{R/k}^1)(-n) \rightarrow 0$$

が得られる。以下 S_∞ の基本性質をのべる。

命題 1. S_∞ 係数の continuous cohomology は次のとおり。

$$(1-1) \quad H^i(\Delta, S_\infty) = \begin{cases} (R \cdot 0_K)^\wedge[1/p] & (i=0 \text{ の時}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$(1-2) \quad H^i(\Gamma, S_\infty(r)) = \begin{cases} R^\wedge[1/p] & (i, r) = (0, 0), (1, 0) \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

(1-2) と、§1 でのべた Tate の定理が類似しているのが大切な所です。(1-2) は (1-1) と Spectral sequence

$$H^s(\mathfrak{g}_k, H^t(\Delta, S_\infty(r))) \Rightarrow H^{s+t}(\Gamma, S_\infty(r))$$

から出ます。(1-1) は、 S_∞ の構成の仕方と、次の Faltings の定理から従います。

定理 (Faltings [3]) 次の canonical な同型がある。

$$H^i(\Delta, \hat{R}[1/p]) \simeq (\Omega_{R/k}^i) \otimes_R (R \cdot 0_K)^\wedge[1/p](-i)$$

同型の構成は、 $\lambda=1$ の時は、 $(*)$ を用い、 $\lambda>1$ では、両辺の積構造を用いる。

次に, S_∞ から, 複体 $DR(S_\infty)$ を構成する, 具体的には,

$$0 \rightarrow S_\infty \xrightarrow{\partial_0} S_\infty \otimes_R \Omega_{R/O_K}^1(-1) \xrightarrow{\partial_1} S_\infty \otimes_R \Omega_{R/O_K}^2(-2) \rightarrow \dots$$

という形をくいて, differential は.

$$S_n \otimes_R \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^i(-i) \rightarrow S_{n-1} \otimes_R \Omega_{R/\mathcal{O}_K}^{i+1}(-i-1);$$

$$[X_1 \otimes \dots \otimes X_n] \otimes w \mapsto \sum_{1 \leq i \leq n} [X_1 \otimes \dots \otimes \hat{X}_i \otimes \dots \otimes X_n] \otimes (\tau(x_i) \wedge w)$$

(これは (a) にある準同型.) からひきおこされるものである. 次の命題の証明も略する.

命題 2. $DR(S_\infty)$ は $\hat{R}[1/p]$ (degree 0 にのみある複体) と quasi-isomorphic. つまり, $DR(S_\infty)$ は degree 0 以外で exact, $\text{Ker } d_0 = \hat{R}[1/p]$.

§3. Hodge-Tate sheaf の定義と Global theory.

この節では、§2 で定義した S_∞ を用いて、Hodge-Tate sheaf の定義を行い、その性質を調べます。主定理は、proper smooth morphism による higher direct image もまた Hodge-Tate sheaf になるということです。

(3.1) R, Γ 等は §2 のとおりとして、まず有限次元 $\mathbb{Q}_p$ -vector space V で Γ の連続作用をもつものが Hodge-Tate であることを定義しよう。まず古典理論と同様の手法により次の命題が示される。

命題 $D^i(V) = (V \otimes_{\mathbb{Q}_p} S_{\infty}(i))^{\Gamma}$ とおく。自然な準同型

$$\bigoplus_i D^i(V) \otimes_{R^{\wedge}} S_{\infty}(-i) \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}_p} S_{\infty}$$

は injective.

定義 命題の準同型が同型になる時 V は Hodge-Tate 表現 (あるいは $(\text{Spec } R[1/p])_{\text{ét}}$ 上の Hodge-Tate sheaf) という。

V が Hodge-Tate 表現 とする時 $DR^i(D(V))$ を $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} DR(S_{\infty}(i)))^{\Gamma}$ で定義する。 $DR^i(D(V))$ は

$$0 \rightarrow D^i(V) \xrightarrow{(1)} D^{i-1}(V) \otimes_{R^{\wedge}} \Omega_{R/\mathbb{Q}_p}^1 \rightarrow D^{i-2}(V) \otimes_{R^{\wedge}} \Omega_{R/\mathbb{Q}_p}^2 \rightarrow$$

の形をしている。もちろん

$$\bigoplus_i DR^i(D(V)) \otimes_{R^{\wedge}} S_{\infty}(-i) \simeq V \otimes_{\mathbb{Q}_p} DR(S_{\infty})$$

がなりたつ。

古典理論と同様にして 次の補題がなりたつ。

補題. Hodge-Tate 表現の部分, 商, dual, 直和, tensor 積は, また Hodge-Tate 表現になる。

(3.2) R' を §2 の条件をみたす環, $f: \text{Spec } R' \rightarrow \text{Spec } R$ を O_K -scheme の morphism とする。 V を $(\text{Spec } R)_{\text{ét}}$ 上の smooth $\mathbb{Q}_p$ -sheaf, つまり, 有限次元 $\mathbb{Q}_p$ -vector space Z' 上の連続作用をもつものとする。 §2 で, S_∞ は R に関して functorial に構成されたことから, 次の補題が導かれる。

補題 V が Hodge-Tate ならば, f^*V も Hodge-Tate である。 しかも,
$$D^i(f^*(V)) = D^i(V) \otimes_{R^\wedge} R'^\wedge.$$

(3.3) X を K 上の proper smooth variety とする。 $X_{\text{ét}}$ 上の smooth $\mathbb{Q}_p$ -sheaf V が Hodge-Tate であることを定義する。 X の O_K 上の model $\mathcal{X}$ をとる。 $\mathcal{X}$ は normal で O_K 上 proper, flat, $\mathcal{X} \otimes_{O_K} K \simeq X$ をみたす。

定義 V が Hodge-Tate sheaf とは, $\mathcal{X}$ の affine open $\text{Spec } R$ で, R が §2 の条件をみたすものすべてに対して, V の $(\text{Spec } R[1/p])_{\text{ét}}$ へのひきもとしか Hodge-Tate であることと定義する。

実際には、 X の open covering $\coprod \text{Spec } R_i \rightarrow X$ について確かめれば良いことがわかる。model X のとり方によさぬこともわかる。

各 affine open $\text{Spec } R$ ごとに、有限生成 $R[\frac{1}{p}]$ 加群 $D^i(V)$ が定まるが、これは (3.2) により sheaf になる。さらに X は OK 上 proper なので代数化されて、coherent $\mathcal{O}_X$ -module を定める。同様に $DR^i(D(V))$ も coherent $\mathcal{O}_X$ -module の複体 を定める。記号の濫用により、これらも $D^i(V)$, $DR^i(D(V))$ と記す。さらに、(3.2) を $R' = \mathcal{O}_L$ (L は K の有限次拡大) に対してあてはめることにより、各 $D^i(V)$ は locally free とわかる。(X の各閉点での $D^i(V)$ の rank の和は常に $\dim V$ と等しくなければならない。)

(3.4) 結果をのべよう。 X は K 上の proper smooth variety, V は X 上の Hodge-Tate sheaf とする。

定理. $H^m(\bar{X}, V)$ は Hodge-Tate 表現になる。さらに、次のような functorial な injection がある。

$$D^i(H^m(\bar{X}, V)) \hookrightarrow H^m(X, DR^i(D(V))).$$

ここで H は hypercohomology を表す。

定理の injection は実際、同型と予想される。

例をあげよう。constant sheaf $\mathbb{Q}_p$ は Hodge-Tate sheaf で $D^i(\mathbb{Q}_p) \simeq \mathbb{Q}_X$ ($i=0$), 0 ($i \neq 0$) であることは S_∞ の性質よりすぐわかる。従って $DR^i(D(\mathbb{Q}_p)) \simeq \Omega_X^i[-i]$ (i 次のみ 0 でない複体) となる。これに定理をあてはめると、 $H^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p)$ は Hodge-Tate sheaf で、functorial な単射 $D^i(H^m(\bar{X}, \mathbb{Q}_p)) \hookrightarrow H^m(X, \Omega^i[-i]) = H^{m-i}(X, \Omega^i)$ がある。実際、次元を数えることにより、この単射は全射であることがわかる。丁度 §1 の例(2)にあたることが出てくる。このように、我々の定理は Faltings の定理の自然な一般化になっている。

Relative version の結果も得られる。 $f: X \rightarrow Y$ を K 上 proper smooth variety の間の proper smooth morphism V を $X_{\text{ét}}$ 上の Hodge-Tate sheaf とする。

定理. $R^m f_* V$ は $Y_{\text{ét}}$ 上の Hodge-Tate sheaf.

$D^i(R^m f_* V)$ についての結果と、予想も先の定理と同様にのべられるが省略する。 $V = \mathbb{Q}_p$ の時にどうなるかを説明しよう。まず、

$$D^i(R^m f_* \mathbb{Q}_p) \simeq R^{m-i} f_* \Omega_{X/Y}^i$$

である。 $DR^i(D(R^m f_* \mathbb{Q}_p))$ の方は少し複雑になる。

Relative de Rham cohomology sheaf $H_{DR}^m(X/Y) = R^m f_* \Omega_{X/Y}^\bullet$ を考える。この sheaf には, Hodge filtration fil^i と, Gauss-Manin connection $\nabla: H_{DR}^m(X/Y) \rightarrow H_{DR}^m(X/Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/K}^1$ がある。Hodge filtration は, $fil^i / fil^{i+1} = R^{m-i} f_* \Omega_{X/Y}^i$ をみたし, Gauss-Manin connection は Griffiths transversality: $\nabla(fil^i) \subset fil^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/K}^1$ をみたしている。

従って Gauss-Manin connection は複体 $fil_{DR}^i: fil^i \rightarrow fil^{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/K}^1 \rightarrow fil^{i-2} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/K}^2 \rightarrow \dots$ をひきおこし, その $gr_{DR}^i = fil_{DR}^i / fil_{DR}^{i+1}$ は

$$R^{m-i} f_* \Omega_{X/Y}^i \rightarrow (R^{m-i+1} f_* \Omega_{X/Y}^{i+1}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/K}^1 \rightarrow \dots$$

となる。 $DR^i(D(R^m f_* \mathcal{O}_P))$ は gr_{DR}^i と同型である。

(3.5). (3.4) の定理の証明には, (3) の手法を用いる。 X の $\mathcal{O}_K$ 上の model $\mathcal{X}$ をとり, その affine open $\text{Spec } R$ (R は §2 の条件をみたす) ごとに étale cohomology と, $\mathcal{X}$ 上の coherent module の cohomology を結びつけるのである。記号は §2 のとおりとし, $C^\bullet(\Delta, A)$ で Δ の A -係数 continuous cochain complex を表す。(その cohomology 群が $H^\bullet(\Delta, A)$ となる。) すると, 次の図式が得られる。

$C^\bullet(\Delta, V \otimes_{\mathcal{O}_P} \hat{R}[\frac{1}{p}]) \xrightarrow{\alpha} C^\bullet(\Delta, V \otimes_{\mathcal{O}_P} DR(S_\infty))$

$\sim$

$$C^\bullet(\Delta, \bigoplus_i DR^i(D(V)) \otimes_{R^\wedge} S_\infty(-i)) \xleftarrow{\beta} \bigoplus_i DR^i(D(V)) \otimes_{R^\wedge} (R \cdot \mathcal{O}_K) \left[\frac{1}{p} \right](-i)$$

ここで、 α, β はそれぞれ、§2. 命題2, 命題1 より quasi-isomorphism。中央の同型は Hodge-Tate sheaf の定義より出る。従って、[3] の手法により、自然な morphism

$$C^*(\Delta, V) \rightarrow C^*(\Delta, V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \bigwedge^{\mathbb{N}} \mathbb{R}[1/p])$$

の両辺の Global cohomology をとって、

$$H^m(\bar{X}, V) \rightarrow \bigoplus_{\mathbb{N}} H^m(X, DR^i(D(V))) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{C}_p(-i)$$

が得られる。あとは Poincare duality の議論を用いて、

$$H^m(\bar{X}, V) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p \subset \bigoplus_{\mathbb{N}} H^m(X, DR^i(D(V))) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{C}_p(-i)$$

が得られるのである。

(3.6) 以上で、概略の説明を終わります。詳しくは [9] を見て下さい。

本稿では、Hodge-Tate 表現の "variation" の理論についてのべました。この理論でも、予想は残っているし、non-proper case もできていないし、まだまだ問題は残されています。一方、Fontaine [5] には、Hodge-Tate 表現以外の "良い表現" の class が定義されています。これらの variation の理論をつくることは大切なことと思います。特に crystalline 表現の理論は、"filtered F-crystal (である種の条件を満たすもの)" と、"良い p-進表現" の間の圏同値を与えるものであり、従って、crystalline 表現の variation 理論は、local system と、regular holonomic $\mathcal{D}_X$ -module の間の

Riemann-Hilbert 対応の p -進版にあたるものになっていると期待でき、大いに興味深いところです。最近 Faltings はこの方面で結果を得ているとのことでした。

- [1] S. Bloch and K. Kato, p -adic étale cohomology. Publ. Math. I.H.E.S. 63, 107-152 (1986)
- [2] G. Faltings, Hodge-Tate structures and modular forms. Math. Ann. 278, 133-149 (1987)
- [3] G. Faltings, p -adic Hodge theory. to appear in Journal of AMS.
- [4] J.-M. Fontaine, Modules Galoisien, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. Astérisque 65, 3-80 (1979)
- [5] J.-M. Fontaine, Sur certains types de représentations p -adiques du groupe de Galois d'un corps locaux. Ann. of Math. 115, 529-577 (1982)
- [6] J.-M. Fontaine, Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux. Invent. Math. 65, 379-409 (1982)
- [7] J.-M. Fontaine and W. Messing, p -adic periods and p -adic étale cohomology. Contemporary Math. 67, 179-209 (1987)

- [8] O. Hyodo, A note on p -adic étale cohomology in the semi-stable reduction case, to appear in Invent. Math.
- [9] O. Hyodo, On variation of Hodge-Tate structures, preprint
- [10] K. Kato, On p -adic vanishing cycles (applications of ideas of Fontaine-Messing). Advanced Studies in Pure Math. 10, 207-251 (1987)
- [11] M. Kurihara, A note on p -adic étale cohomology, Proc. Japan Academy Ser. A 63, 275-278 (1987)
- [12] J.-P. Serre, Sur les groupes de Galois attachés aux groupes p -divisible. Proc. Conf. on local fields, 118-131, Springer (1967)
- [13] J. Tate, p -divisible groups, Proc. Conf. on local fields, 158-183, Springer (1967)