

離散ウェーブレット変換に伴う射影作用素の平均の 平行移動不変性

Translation invariance of averages of the projection operators
associated with discrete wavelet transform

大阪電気通信大学・工学部・基礎理工学科 萬代 武史 (Takeshi MANDAI)
Department of Engineering Science, Faculty of Engineering,
Osaka Electro-Communication University
E-mail: mandai@isc.osakac.ac.jp

本講演は、大阪教育大学の芦野 隆一氏、守本 晃氏との共同研究に基づくものです。

1 序

離散ウェーブレット変換（今回は直交ウェーブレットのみ考える）のコアの考えは、関数（信号）をスケールレベルに応じた近似と詳細に順次分解していくことであるが、冗長性がない反面、元の関数（データ）がずれたとき近似と詳細への分解のされ方が大きく変化する。特に応用分野では、この欠点を克服するさまざまな試みがなされてきた。章忠氏および戸田浩氏（[1, 3, 4, 2] など）は Ivan W. Selesnick の結果 ([8]) を基に、複素数値離散ウェーブレット変換の枠組みで、Meyer のウェーブレットを利用し、完全に平行移動不変性¹を実現した。

彼らの結果の核の部分は、数学的には、射影作用素の平均を用いて表現することができる。この結果を数学的に拡張することで、彼らの結果の背後にある数学的な「からくり」をより明らかにしたい。結果を数学的に拡張し、大きな枠組みの中で位置づけることで、本質に迫れるはずである。

1つのキーは、ヒルベルト変換を「拡張」したユニタリ作用素 $\mathcal{H}_c$ と平行移動作用素を少し「変形」したユニタリ作用素 $T_c^\dagger$ である。

¹彼らは完全シフト不変性と呼んでいる。本稿では、シフトは、整数の平行移動の意味で使うことにする。

2 準備

まず, 基本的な記号や用語などを導入しておこう.

実数全体の集合を $\mathbb{R}$, 整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ とし, $\mathbb{R}_{\pm} := \{s \in \mathbb{R} \mid \pm s > 0\}$ (複号同順) とする. 2乗可積分, すなわち $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の可測関数の空間 $L^2(\mathbb{R})$ には,

$$\text{内積 } \langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{g(t)} dt \text{ や ノルム } \|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$$

が考えられる. $L^2(\mathbb{R})$ などの関数空間を考える時は, ほとんどいたるところ等しい関数²は同一視している. 今後, 本当は「ほとんどいたるところ」とつけるべきところも省略する.

関数系 $\{f_l\}_{l \in L} \subset L^2(\mathbb{R})$ に対して, これらで生成される部分空間

$$\left\{ \sum_{l \in L} c_l f_l \mid c_l (l \in L) \text{ は有限個を除いて } 0 \right\}$$

の閉包を $\overline{\text{Span}}\{f_l\}_{l \in L}$ と書き, $\{f_l\}_{l \in L}$ で生成される閉部分空間と呼ぶ.

$\langle f, g \rangle = 0$ のとき, f と g とは**直交する**と言う. $\langle f_l, f_{l'} \rangle = \delta_{l, l'}$ ($l, l' \in L$) を満たす³とき, $\{f_l\}_{l \in L}$ は**正規直交系**であると言い, さらに, $\overline{\text{Span}}\{f_l\}_{l \in L} = V (\subset L^2(\mathbb{R}))$ のとき, $\{f_l\}_{l \in L}$ は V の**正規直交基底**であると言う.

関数 f の平行移動を $(T_b f)(t) = f(t - b)$ ($b \in \mathbb{R}$) と定める. 平行移動作用素 T_b は**ユニタリ作用素**である. すなわち, 逆作用素 $T_b^{-1} = T_{-b}$ があり, 任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して $\langle T_b f, T_b g \rangle = \langle f, g \rangle$, $\|T_b f\| = \|f\|$ となる. また, 関数 f の伸張を $(D_a f)(t) = a^{-1/2} f(t/a)$ ($a \in \mathbb{R}_+$) と定める. 伸張作用素 D_a もユニタリ作用素である. 関数 $g \in L^2(\mathbb{R})$ に対して,

$$g_{j,k}(t) := (D_{2^{-j}} T_k g)(t) = (T_{2^{-j}k} D_{2^{-j}} g)(t) = 2^{j/2} g(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

と書く.

関数 $g \in L^2(\mathbb{R})$ と $j \in \mathbb{Z}$ に対して, 作用素 $P_j^{(g)}$ を

$$P_j^{(g)} f := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{j,k} \rangle g_{j,k}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2.2)$$

と定める. $\{g_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が正規直交系をなすとき, $P_j^{(g)}$ は $\{g_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ で生成される閉部分空間 $V := \overline{\text{Span}}\{g_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ への**直交射影作用素**である. すなわち, 任意の $f \in L^2(\mathbb{R})$

² 2つの関数 $f_1(t), f_2(t)$ において $\mu\{t \in \mathbb{R} \mid f_1(t) \neq f_2(t)\} = 0$ となるとき, $f_1(t)$ と $f_2(t)$ とは, ほとんどいたるところ (almost everywhere) 等しいと言う. ただし, μ はルベーグ測度である.

³ $\delta_{l, l'}$ はクロネッカーのデルタ, すなわち, $\delta_{l, l'} = 0$ ($l \neq l'$), $\delta_{l, l'} = 1$ ($l = l'$) である.

に対して, $P_j^{(g)} f \in V$ であり, $f - P_j^{(g)} f$ は V と直交する: $\langle f - P_j^{(g)} f, h \rangle = 0$ ($h \in V$).

関数 f のフーリエ変換を

$$\hat{f}(\xi) = f^\wedge(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-it\xi} dt$$

とする. ξ の符号を $\operatorname{sgn} \xi$ とし,

$$(\mathcal{H}f)^\wedge(\xi) := -i(\operatorname{sgn} \xi) \hat{f}(\xi), \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2.3)$$

でヒルベルト変換 $\mathcal{H}$ を定める. f が実数値関数なら, $\mathcal{H}f$ も実数値関数で f と $\mathcal{H}f$ とは直交する. ヒルベルト変換は平行移動作用素および伸張作用素と可換である⁴. すなわち, $T_b \mathcal{H} = \mathcal{H} T_b$ ($b \in \mathbb{R}$), $D_a \mathcal{H} = \mathcal{H} D_a$ ($a \in \mathbb{R}_+$) となる. ヒルベルト変換は, 実解析において重要な Calderón-Zygmund 作用素の最も簡単で重要な例であるが, 応用においても, 実数値関数 f に対して複素数値関数 $\mathcal{A}f := f + i\mathcal{H}f$ を考えることは, よく行なわれている (たとえば瞬間周波数や包絡線の話など).

$$(\mathcal{A}f)^\wedge(\xi) = 2Y(\xi) \hat{f}(\xi) \quad (2.4)$$

(ただし, Y はヘビサイド関数) であり, $\mathcal{A}f$ は f に対する解析信号と呼ばれる.

3 直交ウェーブレット

この節では, 確認のため, 直交ウェーブレットについて基本的なことをまとめておく.

$\psi \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底をなすとき, ψ や $\psi_{j,k}$ を直交ウェーブレットと呼び, ψ を直交ウェーブレット関数と呼ぶ. $W_j := \overline{\operatorname{Span}\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}}$, $V_j := \bigoplus_{l < j} W_l$ とする⁵と, W_j は「レベル j のスケールの変動を表す関数の空間」, V_j は「レベル j より粗いスケールの変動を表す関数の空間」と考えることができる. このとき, $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ は

- (i) $V_j \subset V_{j+1}$
- (ii) $f \in V_j \iff f(2\cdot) \in V_{j+1}$
- (iii) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- (iv) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R})$

⁴ D_a を $a < 0$ に対しても考えることができるが, D_a ($a < 0$) とは可換ではない.

⁵ $\bigoplus$ は直交直和を表す.

を満たす. また, V_0 はシフト不変 ($f \in V_0 \implies f(\cdot - k) \in V_0$ ($k \in \mathbb{Z}$)) である.

逆に, $L^2(\mathbb{R})$ の閉部分空間の族 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ が (i)~(iv) を満たし, さらに,

(v) ある $\phi \in V_0$ があって, $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ は V_0 の正規直交基底となる
を満たすとき, $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ は MRA (multiresolution analysis) をなすといい, この ϕ をスケーリング関数と呼ぶ. このとき,

$$\widehat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\widehat{\phi}(\xi) \quad (3.1)$$

となる 2π 周期関数 m_0 が一意的に決まる. これをローパスフィルタと呼ぶ.

スケーリング関数に関する重要事項は以下のようにまとめられる.

定理 1. $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ とする.

(1) $\{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交系となるための必要十分条件は

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1, \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

である. このとき, 任意の $j \in \mathbb{Z}$ について, $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ も正規直交系となる.

(2) ϕ がスケーリング関数になる, すなわち, $V_j := \overline{\text{Span}}\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ($j \in \mathbb{Z}$) が MRA をなすための必要十分条件は, 以下の 3 条件を満たすことである (Cf. [9] Chapt.7, Theorem 5.2).

(A1) 等式 (3.2) が成立する.

(A2) ある 2π 周期関数 $m_0(\xi)$ があって,

$$\widehat{\phi}(2\xi) = m_0(\xi)\widehat{\phi}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

(A3) $\lim_{j \rightarrow \infty} |\widehat{\phi}(2^{-j}\xi)| = 1$.

等式 (3.3) はツースケール等式と呼ばれ, m_0 はローパスフィルタと呼ばれる.

(3) ϕ がスケーリング関数で, ν が $|\nu(\xi)| \equiv 1$ であるような 2π 周期関数とすると, $\widehat{\phi}(\xi) = \nu(\xi)\widehat{\phi}(\xi)$ で定まる関数 $\widetilde{\phi}$ は同じ MRA に対するスケーリング関数である.

直交ウェーブレットの基礎理論の中心は, スケーリング関数 ϕ があると直交ウェーブレット関数 ψ が作れる, ということである.

定理 2. ϕ をスケーリング関数, ν を $|\nu(\xi)| \equiv 1$ なる 2π 周期関数とすると, $\widehat{\psi}(\xi) = m_1(\xi/2)\widehat{\phi}(\xi/2)$, $m_1(\xi) = e^{i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)} \nu(2\xi)$ はウェーブレット関数 ψ を定める. こうして作られる ψ を, スケーリング関数 ϕ に (または MRA $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ に) 付随したウェーブレット関数と呼び, $m_1(\xi)$ をハイパスフィルタと呼ぶ.

$\nu(\xi) \equiv 1$ と取って作った ψ を ϕ に「自然に」付随するウェーブレット関数と呼ぶ⁶ことにする.

4 Meyer 型ウェーブレット

我々があとで提示する条件を満たすスケーリング関数, ウェーブレット関数の族として, Meyer ウェーブレットを拡張した Meyer 型のウェーブレットを導入しておこう.

$h \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, h の台 (support)⁷を $\text{supp } h$ と書く.

スケーリング関数 ϕ が $\text{supp } \hat{\phi} \subset \left[-\frac{4}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right]$ を満たすとき, ϕ やそれに付随するウェーブレット関数 ψ を Meyer 型と呼ぶ.

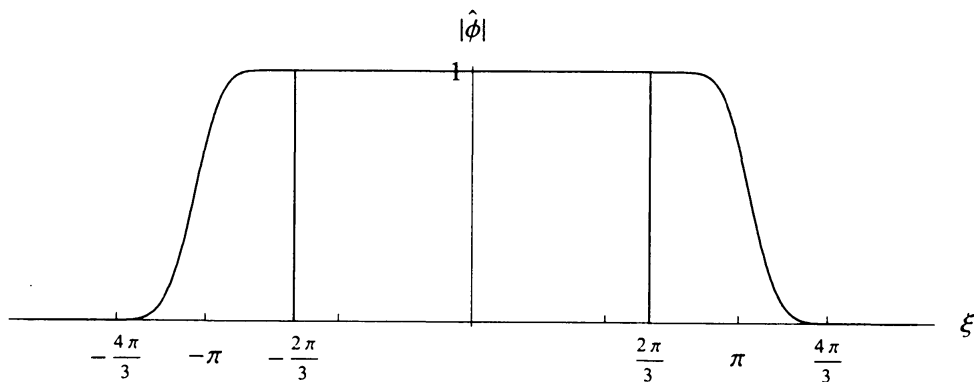


図 1: Meyer 型スケーリング関数のフーリエ変換

補題 3. $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ が Meyer 型スケーリング関数であるための必要十分条件は以下の 3 条件を満たすことである. (図 1 参照)

$$(M1) \quad \text{supp } \hat{\phi} \subset \left[-\frac{4}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right],$$

$$(M2) \quad \left[-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right] \text{ 上 } |\hat{\phi}(\xi)| = 1,$$

$$(M3) \quad \left[\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right] \text{ 上 } |\hat{\phi}(\xi)|^2 + |\hat{\phi}(\xi - 2\pi)|^2 = 1.$$

⁶本によっては $\nu(\xi) \equiv -1$ を標準的なとり方とするものもあるが, 符号が違うだけなので, どちらに決めても以下の議論にはほとんど影響しない.

⁷一般の $h \in L^2(\mathbb{R})$ に対しては, 厳密には, $\{t_0 \in \mathbb{R} \mid h(t) \text{ は } t_0 \text{ の近くではほとんどいたるところ } 0 \text{ となる}\}$ の補集合が $\text{supp } h$ であるが, 性質のよい関数 (たとえば区分的に連続な関数) の場合は $\{t \in \mathbb{R} \mid h(t) \neq 0\}$ の閉包と思ってよい.

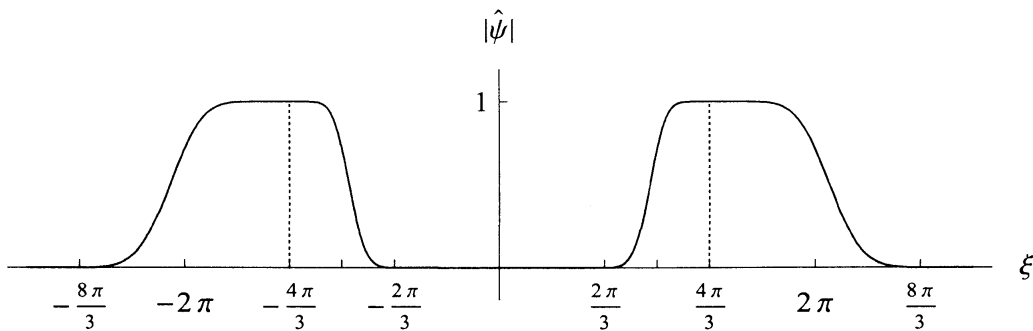


図 2:

Meyer 型ウェーブレットのフーリエ変換は

$$\text{supp } \hat{\psi} \subset \left[-\frac{8}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi\right] \cup \left[\frac{2}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi\right]$$

を満たし、図 2 のような形をしている。また、

$$\text{diam}(\text{supp } \hat{\phi} \cap \mathbb{R}_\pm) \leq 2\pi, \quad \text{diam}(\text{supp } \hat{\psi} \cap \mathbb{R}_\pm) \leq 2\pi \quad (4.1)$$

となっている。ここで、 $\text{diam } A$ は集合 A の幅⁸を表す。

本来の Meyer ウェーブレットは、さらに $\hat{\phi}(\xi) \geq 0$, $\hat{\phi}(-\xi) = \hat{\phi}(\xi)$, $\hat{\phi} \in C^\infty(\mathbb{R})$ を満たす⁹ものを言う。このとき、 ϕ や ψ に自然に付随する ψ は実数値関数であり、 $\phi, \psi \in \mathcal{S}$ となる。ここで、 $\mathcal{S}$ はシュワルツクラスと呼ばれる関数空間で、 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ であって、任意の自然数 k, l に対して、 $(1 + |t|)^l |f^{(k)}(t)|$ が $\mathbb{R}$ 上有界となる関数（急減少 C^∞ 級関数という） f のなす空間である。

Daubechies の本 [5], [7] では、Meyer ウェーブレットはより具体的に

$$\hat{\psi}(\xi) = \begin{cases} e^{i\xi/2} \sin[(\pi/2)\nu(3|\xi|/(2\pi) - 1)], & \frac{2}{3}\pi \leq |\xi| \leq \frac{4}{3}\pi, \\ e^{i\xi/2} \cos[(\pi/2)\nu(3|\xi|/(4\pi) - 1)], & \frac{4}{3}\pi \leq |\xi| \leq \frac{8}{3}\pi, \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\nu \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \nu(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x \geq 1, \end{cases} \quad \nu(x) + \nu(1-x) = 1 \quad (4.3)$$

として与えられている。（ただし、フーリエ変換の定義が少し違うので、その分は変えてある。） 実際の計算では、 ν は C^∞ 級ではなく、区分的に多項式ととることも多い。

⁸ A を含む区間の長さの最小を A の幅という。

⁹ すべての階数の導関数が存在する関数を C^∞ 級関数と呼び、それら全体が作る関数空間を $C^\infty(\mathbb{R})$ と書く。

5 平行移動不変性の欠如

ϕ をスケーリング関数, ψ を付随する直交ウェーブレット関数とすると, f の V_j への直交射影 $P_j^{(\phi)} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}$ は「 f のレベル j の近似」であり, $P_j^{(\phi)} f \rightarrow f$ ($j \rightarrow \infty$) in $L^2(\mathbb{R})$ となる. また, $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ であることから, $P_j^{(\phi)} = P_{j-1}^{(\phi)} + P_{j-1}^{(\psi)}$ となっている.

$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して, $f_j := P_j^{(\phi)} f$ (レベル j の近似), $g_j := P_j^{(\psi)} f$ (レベル j の詳細) と書くことにすると. 直交ウェーブレットの標準的な使われ方は, 与えられた f を十分大きな $j = j_0$ において f_{j_0} で近似し, これを $f_{j_0} = f_{j_0-1} + g_{j_0-1} = f_{j_0-2} + g_{j_0-2} + g_{j_0-1} = \cdots = f_{j_0-l} + g_{j_0-l} + \cdots + g_{j_0-2} + g_{j_0-1}$ というように, 近似と詳細に順次直交分解していくことである. このとき, f の代わりに f の平行移動 $T_b f := f(\cdot - b)$ で始めた場合, $P_j^{(\psi)} T_b f$ と $T_b P_j^{(\psi)} f$ とが大きく食い違う (ノルムすら違う) ことが起き, 応用において無視できない障害になることがある.

6 何が知りたいか

Selesnick[8] の結果を元に, 章氏および戸田氏は [1, 3, 4, 2] などにおいて, 複素数値離散ウェーブレット変換の平行移動不変性について精力的に調べている. 彼らの結果の核の部分は, 数学的には, 射影作用素の平均を用いて次のように表現することができる. (彼ら以前にわかっていたこと, 彼らの結果の若干の精密化も少し含む.)

定理 4. ϕ を Meyer のスケーリング関数とするとき, 次が成り立つ.

(1) 任意の $\tau \in \mathbb{R}$ に対して, ϕ の平行移動 $T_\tau \phi = \phi(\cdot - \tau)$ もスケーリング関数である.

$\tau \in \mathbb{R}$ を固定し, $\phi_\tau := T_\tau \phi$ とおく.

(2) $P_j^{\text{apr}} := \frac{1}{2} (P_j^{(\phi_\tau)} + P_j^{(T_{1/2}\phi_\tau)})$ とおくと, P_j^{apr} は平行移動不変, すなわち, すべての $b \in \mathbb{R}$ に対して $T_b P_j^{\text{apr}} = P_j^{\text{apr}} T_b$ であり, $(P_j^{\text{apr}} f)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi) |\hat{\phi}(2^{-j}\xi)|^2$ となる.

(3) ψ_τ を ϕ_τ に自然に付随するウェーブレット関数とすると, ψ_τ のヒルベルト変換 $\mathcal{H}\psi_\tau$ は $T_{1/2}\phi_\tau$ に自然に付随するウェーブレット関数である. さらに, $P_j^{\text{dtl}} := \frac{1}{2} (P_j^{(\psi_\tau)} + P_j^{(\mathcal{H}\psi_\tau)})$ は平行移動不変であり, $(P_j^{\text{dtl}} f)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi) |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2$ となる.

この結果に対して, なぜ, $T_{1/2}\phi$ と $\mathcal{H}\psi$ が対応するかや, Meyer 以外のウェーブレットではどうなるのかなど, いくつかの数学的な疑問が生じる. ここでは, ヒル

ベルト変換を少し一般化した作用素や平行移動を少し「変形」した作用素を考え、射影の平均の平行移動不変性がいつ成り立つかなどを考察して、上の定理を拡張する。これにより、上の疑問にある程度答えることもできる。

7 $\mathcal{H}_c$ と $T_c^\dagger$

この節では、キーとなる2つのユニタリ作用素 $\mathcal{H}_c, T_c^\dagger$ を導入する。

7.1 $\mathcal{H}_c$

$c \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(\mathcal{H}_c f)^\wedge(\xi) := e^{-ic\pi \operatorname{sgn} \xi} \widehat{f}(\xi), \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (7.1)$$

でユニタリ作用素 $\mathcal{H}_c$ を定義する。

$$\mathcal{H}_c = (\cos c\pi)I + (\sin c\pi)\mathcal{H} \quad (7.2)$$

である。作用素の族 $\{\mathcal{H}_c\}_{c \in \mathbb{R}}$ は、ユニタリ作用素の1パラメータ群をなす。すなわち、 $\mathcal{H}_c \mathcal{H}_d = \mathcal{H}_{c+d}$ ($c, d \in \mathbb{R}$)、 $\mathcal{H}_0 = I$ (恒等作用素) となっている。また、 $\mathcal{H}_{c+1} = -\mathcal{H}_c$ であり、 $\mathcal{H}_{1/2} = \mathcal{H}$ はヒルベルト変換である。さらに $\mathcal{H}_c$ は、実数値関数を実数値関数に写し、平行移動作用素とも伸張作用素とも可換である。すなわち、 $\mathcal{H}_c T_b = T_b \mathcal{H}_c$ ($b, c \in \mathbb{R}$)、 $\mathcal{H}_c D_a = D_a \mathcal{H}_c$ ($c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+$) となる。特に、 $(\mathcal{H}_c f)_{j,k} = \mathcal{H}_c(f_{j,k})$ であり、 $\mathcal{H}_c$ は MRA 構造や直交ウェーブレットの構造を保つ。

実は、次の補題で分かるように、このようなユニタリ作用素は $\mathcal{H}_c$ だけである。

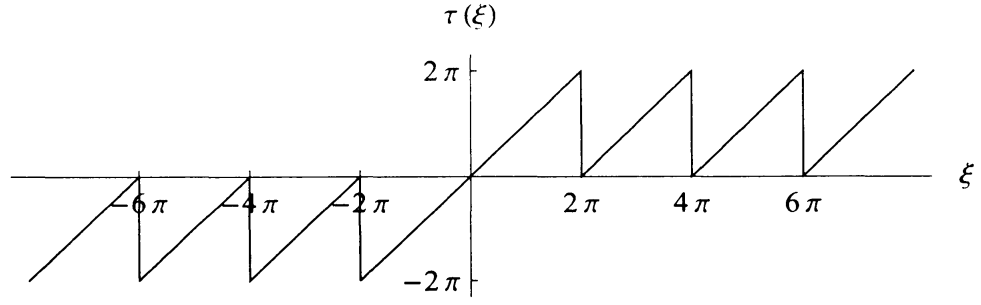
補題 5. $L^2(\mathbb{R})$ 上のユニタリ作用素 U が T_b ($b \in \mathbb{R}$)、 D_a ($a \in \mathbb{R}_+$) と可換とすると、ある $\theta, c \in \mathbb{R}$ があって、 $U = e^{i\theta} \mathcal{H}_c$ となる。

さらに U は実数値関数を実数値関数に写すとする、ある $c \in \mathbb{R}$ があって $U = \mathcal{H}_c$ となる。

7.2 $T_c^\dagger$

$c \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(T_c^\dagger f)^\wedge(\xi) := e^{-ic\tau(\xi)} \widehat{f}(\xi), \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (7.3)$$

図 3: $\tau(\xi)$ のグラフ

でユニタリ作用素 $T_c^\dagger$ を定義する. ただし, $\tau(\xi)$ は図 3 の関数である.

$\{T_c^\dagger\}_{c \in \mathbb{R}}$ もユニタリ作用素の 1 パラメータ群をなす. さらに, 実数値関数を実数値関数に写し, $c = k$ が整数のときは平行移動と同じである: $T_k^\dagger = T_k$ ($k \in \mathbb{Z}$). また, $\text{supp } \hat{f} \subset [-2\pi, 2\pi]$ なら $T_c^\dagger f = T_c f$ である.

7.3 $\mathcal{H}_c$ と $T_c^\dagger$ との関係

$\theta(\xi) := \tau(\xi) - \pi \operatorname{sgn} \xi$ とおくと,

$$(T_c^\dagger f)^\wedge(\xi) = e^{-ic\theta(\xi)} (\mathcal{H}_c f)^\wedge(\xi) \quad (7.4)$$

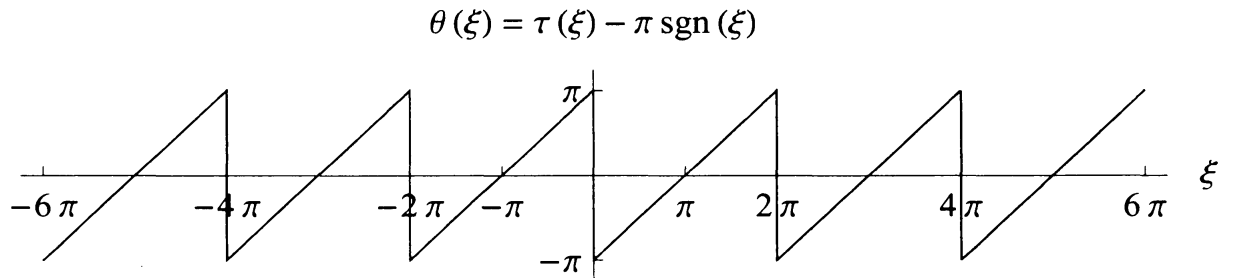
となるが, 図 4 で分かるように, $\theta(\xi)$ は 2π 周期関数になる. これにより, g が (A1) を満たすなら,

$$\overline{\text{Span}\{(\mathcal{H}_c g)(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}} = \overline{\text{Span}\{(T_c^\dagger g)(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}} \quad (c \in \mathbb{R}) \quad (7.5)$$

となり,

$$P_j^{(\mathcal{H}_c g)} = P_j^{(T_c^\dagger g)}, \quad j \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R} \quad (7.6)$$

である.

図 4: $\theta(\xi) = \tau(\xi) - \pi \operatorname{sgn} \xi$ のグラフ

8 主結果

以下では、 ϕ を任意のスケーリング関数、 ψ を ϕ に自然に付随するウェーブレット関数と仮定する。

まず始めの結果は、 $T_c^\dagger \phi$ は常にスケーリング関数になり、 $T_c^\dagger \phi$ に自然に付随するウェーブレット関数が $\mathcal{H}_c \psi$ であるということである。より詳しく言うと、

定理 6. 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して $\mathcal{H}_c \phi$, $T_c^\dagger \phi$ は同じ MRA を定めるスケーリング関数であり、 $\mathcal{H}_c \psi$ はこれら両方に自然に付随したウェーブレット関数である。 $T_c^\dagger \psi$ もまた $\mathcal{H}_c \phi$, $T_c^\dagger \phi$ の両方に（自然にではないが）付随するウェーブレット関数になる。（図 5 参照）

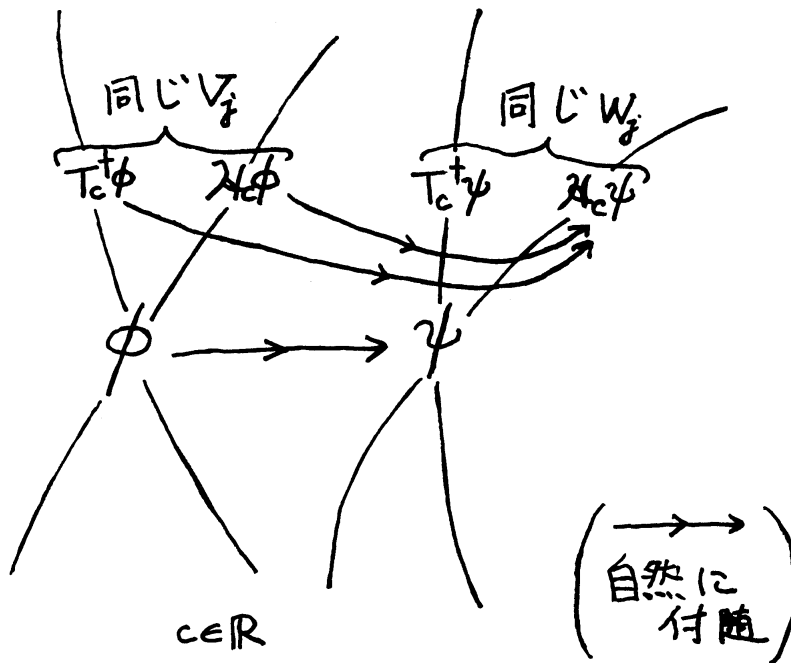


図 5: $\mathcal{H}_c \phi$, $T_c^\dagger \phi$, $\mathcal{H}_c \psi$, $T_c^\dagger \psi$ の関係

Meyer 型の場合は、 $T_c^\dagger \phi = T_c \phi$ である。さらに、本来の Meyer の場合は、 $T_c^\dagger \phi$, $\mathcal{H}_c \psi \in \mathcal{S}$ であるが、 $\mathcal{H}_c \phi$, $T_c^\dagger \psi$ はあまりよい関数ではなく、 $(\mathcal{H}_c \phi)^\wedge$, $(T_c^\dagger \psi)^\wedge$ は連続関数ですらない。したがって、 $\int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{H}_c \phi)(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} |(T_c^\dagger \psi)(t)| dt = \infty$ となり、 $t \rightarrow \pm\infty$ での減衰がよくない関数である。

補題 5 により $\mathcal{H}_c$ は MRA 構造などを保つので、 $\mathcal{H}_c \phi$ と $\mathcal{H}_c \psi$ とが対応するのは当然だが、 $T_c^\dagger \phi$ も常にスケーリング関数になり、 $\mathcal{H}_c \psi$ が $T_c^\dagger \phi$ にも自然に付随するのは、不思議といえば不思議である。 $\mathcal{H}_c \phi$ はあまりよい関数ではなく、よい関

数 $T_c^\dagger \phi$ がその代わりをしてくれているのである。またこの結果により、定理 4 において、実は

$$\psi_\tau = \mathcal{H}_\tau \psi, \quad \mathcal{H} \psi_\tau = \mathcal{H}_{\tau+1/2} \psi \quad (8.1)$$

であることが分かる。

次に、射影作用素の平均を定義しておこう。

定義 7. $g \in L^2(\mathbb{R})$ は (A1) を満たすとする。

(1) 自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$(P_j^{(g;n)} f)(t) := \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (P_j^{(\mathcal{H}_{m/n} g)} f)(t), \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad (8.2)$$

とおく。 $P_j^{(g;1)} = P_j^{(g)}$ であり、定理 4 の $P_j^{\text{apr}}, P_j^{\text{dnl}}$ はそれぞれ $P_j^{(\phi_\tau;2)}, P_j^{(\psi_\tau;2)}$ である。

(2)

$$(P_j^{(g;\infty)} f)(t) := \int_0^1 (P_j^{(\mathcal{H}_c g)} f)(t) dc, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (8.3)$$

これらの定義においては $\mathcal{H}_c$ を使っているが、§7.3 により、 $P_j^{(\mathcal{H}_c g)} = P_j^{(T_c^\dagger g)}$ であり、 $\text{supp } \hat{g} \subset [-2\pi, 2\pi]$ なら $P_j^{(\mathcal{H}_c g)} = P_j^{(T_c g)}$ である。

2 つ目の主結果は、射影作用素の平均の平行移動不変性についてである。

定理 8. g は (A1) を満たすとし、 $2 \leq n \leq \infty$ とする。

(1) $P_j^{(g;n)}$ の平行移動不変性とのずれは以下のように評価できる。

$$\left\| T_b P_j^{(g;n)} - P_j^{(g;n)} T_b \right\|_{\text{op}} \leq 2 \sum_{l \neq 0} |\sin 2^j b \pi l| \max_{\epsilon = +, -} \left\| \widehat{g}_\epsilon(\cdot) \overline{\widehat{g}_\epsilon(\cdot + 2\pi l)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \quad (8.4)$$

ただし、 $\| \cdot \|_{\text{op}}$ は $L^2(\mathbb{R})$ における作用素ノルム¹⁰であり、 $\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \text{esssup}_{\xi \in \mathbb{R}} |h(\xi)|$ である¹¹。また、 $F_\pm(\xi) := F(\xi)Y(\pm\xi)$ (複号同順) である。

(2) $(\text{supp } \hat{g}) \cap \mathbb{R}_\pm$ の幅が $\pm$ どちらも 2π 以下とすると、すべての $j \in \mathbb{Z}$ に対して、 $P_j^{(g;n)}$ は平行移動不変である。すなわち、

$$T_b P_j^{(g;n)} = P_j^{(g;n)} T_b, \quad b \in \mathbb{R}.$$

¹⁰ $\|T\|_{\text{op}} := \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|}{\|f\|}$ 。言い換えると $\|Tf\| \leq C \|f\|$, $f \in L^2(\mathbb{R})$ が成立する最良の C が $\|T\|_{\text{op}}$ である。

¹¹ esssup は本質的上限と呼ばれるもので、厳密には、 $\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})} := \min\{a \geq 0 \mid \mu\{\xi \in \mathbb{R} \mid |h(\xi)| > a\} = 0\}$ であるが、連続関数なら普通の $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |h(\xi)|$ である。

9 可能な拡張

上の結果は、たとえば、次のような拡張を考えることができる。

(I) 2 以外の dilation factor の場合 (たとえば Auscher wavelet など). 上の結果は, j ごとの結果であり, 本質的に dilation factor には依存しない.

(II) 双直交ウェーブレットの場合. $g, g^* \in L^2(\mathbb{R})$ に対して,

$$(P_j^{(g, g^*)} f)(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, g_{j,k}^* \rangle g_{j,k}(t), \quad f \in L^2(\mathbb{R}) \quad (9.1)$$

と定める. $P_j^{(g)} = P_j^{(g, g)}$ である.

$$\text{ある定数 } M \text{ があって, } \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(\xi + 2\pi l)|^2 \leq M, \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{g^*}(\xi + 2\pi l)|^2 \leq M \quad (9.2)$$

なら, $P_j^{(g, g^*)}$ は $L^2(\mathbb{R})$ の有界作用素になる.

注意 9. g, g^* が (9.2) を満たすとする.

- (1) $P_j^{(\mathcal{H}_c g, \mathcal{H}_c g^*)} = P_j^{(T_c^\dagger g, T_c^\dagger g^*)}$ ($c \in \mathbb{R}$) となる.
- (2) $\widehat{g}(\xi) \overline{\widehat{g^*}(\xi + 2\pi l)} = 0$ ($|l| \geq 2$) かつ $\widehat{g}_\pm(\xi) \overline{\widehat{g^*}_\pm(\xi + 2\pi l)} = 0$ (複号同順) ($l = \pm 1$) ならば, $P_j^{(\mathcal{H}_c g, \mathcal{H}_c g^*)} = P_j^{(T_c g, T_c g^*)}$ となる.

定義 10. g, g^* が (9.2) を満たすとき,

$$(P_j^{(g, g^*; n)} f)(t) := \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} (P_j^{(\mathcal{H}_{m/n} g, \mathcal{H}_{m/n} g^*)} f)(t) \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (9.3)$$

$$(P_j^{(g, g^*; \infty)} f)(t) := \int_0^1 (P_j^{(\mathcal{H}_c g, \mathcal{H}_c g^*)} f)(t) dc. \quad (9.4)$$

と定める.

定理 8 は以下のように拡張できる.

定理 11. $2 \leq n \leq \infty$ とすると,

$$\begin{aligned} & \left\| T_b P_j^{(g, g^*; n)} - P_j^{(g, g^*; n)} T_b \right\|_{\text{op}} \\ & \leq 2 \sum_{l \neq 0} |\sin 2^j b \pi l| \max_{\epsilon = +, -} \left\| \widehat{g}_\epsilon(\cdot) \overline{\widehat{g^*}_\epsilon(\cdot + 2\pi l)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

参考文献

- [1] 章忠 - 戸田浩, シフト不変な複素数離散ウェーブレット変換, 第1報: 複素数離散ウェーブレット変換の理論と原理, 信号処理, **11**:5(2007), 387-399.
- [2] 章忠 - 戸田浩, シフト不変複素数離散ウェーブレット変換, システム/制御/情報「ウェーブレット変換の展開特集号」, **53**:1(2009), 21-27.
- [3] 戸田浩 - 章忠, シフト不変な複素数離散ウェーブレット変換, 第2報: 直交ウェーブレットをもとにした複素数ウェーブレット設計法, 第3報: 新たな複素数離散ウェーブレット変換の計算法, 信号処理, **11**:5(2007), 401-412, 413-424.
- [4] 戸田浩 - 章忠, 完全シフト不変性を実現する複素数離散ウェーブレット変換, 信号処理, **12**:2(2008), 155-166.
- [5] ドブシィ, I., 山田・佐々木訳, ウェーブレット10講, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2003. ([7] の翻訳)
- [6] ヘルナンデス, E. - ワイス, G., 芦野・萬代・浅川訳, ウェーブレットの基礎, 科学技術出版, 1999. ([9] の翻訳)
- [7] Daubechies, I., Ten Lectures on Wavelets, CBMS-NSFR, Regional Conference Series in Applied Math., SIAM, 1992.
- [8] Selesnick, Ivan W., Hilbert transform pairs of wavelet bases, IEEE Signal Processing Letters, **8**:6(2001), 170-173.
- [9] Hernandez, E. - Weiss, G., *A First Course on Wavelets*, CRC Press, 1996.