

(5) 臨界磁場 H_{c2} 近傍のゆらぎ効果

真木和美, 高山 一

i) $H \gtrsim H_{c2}$

臨界磁場 H_{c2} は、電子にとれば弱磁場 (ランダウ半径 $R \gg$ 平均自由行路) であるが、ゆらぎについてみると、強磁場になる。即ち、ゆらぎのエネルギーの目安は、転移点からの隔り (例えば $T - T_c, 2eD(H - H_{c2})$ 等) で与えられるが、ゆらぎをランダウ波動関数で記述した時のランダウ準位の間隔は $4eDH_{c2}$ で与えられる。 T_c ($H=0$ での転移温度) の極く近傍を除けば、後者は前者よりはるかに大きい。従って磁場中のゆらぎを議論する際には、ランダウ準位をきちんと取り入れた定式化が必要である¹⁾。しかも T_c 近傍を除く H_{c2} 近傍のゆらぎをみるときは、 $n=0$ 準位、及び着目する物理量の行列要素が $\eta=0$ と結合する準位を調べるだけで充分である。これは、 H_{c2} 以下の磁束の運動に伴う flow-抵抗が、 $n=0, 1$ の Abrikosov 状態から求まる事に対応している。文献1) では電気伝導度を求める際、AL項 (1)節参) だけしか考えていないが、Maki 項まで含めて計算すると

$H - H_{c2} \ll H_{c2}$ の条件で

$$\sigma_{\perp}' = \frac{e^2}{2\pi} \cdot \frac{L_D(T)}{\rho} \sum_{q_{\parallel}} \frac{1}{\eta_H + q_{\parallel}^2 / 2eH} \quad (1)$$

となる ($\rho = eDH / 2\pi T$, $\eta_H = (H - H_{c2}) / H$, $\parallel, \perp$ は磁場に対する方向) ことで $L_D(T)$ は

$$L_D(T) = 2 + \frac{\rho \psi^{(2)}(\frac{1}{2} + \rho)}{\psi^{(1)}(\frac{1}{2} + \rho)} \quad (2)$$

で ($\psi^{(1)}(z), \psi^{(2)}(z)$ はトリ-、テトラ-ガンマ関数)、これは flow 抵抗の表式に現われたものに他ならない。²⁾ 実際(1)式は flow 状態での伝導度の表式中のオーダーパラメタの空間平均 $\langle |\Delta_0^+(\mathbf{r})| \rangle$ をゆらぎの期待値 $\sum_{q_{\parallel}} (\eta_H + q_{\parallel}^2 / 2eH)^{-1}$ で置換したのになっている (この事は既に Thompson³⁾

により指摘されている)。 (1)式をフィルムについて常伝導度 σ_n との比をとると,

$$\frac{\sigma'}{\sigma_n} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(p_0 \ell) (p_0 d)} \frac{L_D(T)}{\eta_H} \quad (3)$$

を得る。尚、 T_c 近傍では H_{c2} が小さく ($T - T_c \gg 2DeH$)、すべてのランダウ準位からの寄与を集めれば σ' として (1) 節 (1) 式を得る。この場合磁場の影響は対破壊効果 $\delta = 2DeH$ にくりこまれる。

ii) $H < H_{c2}$

H_{c2} 以下の平衡状態では、磁束が三角格子状に並んだ Abrikosov 状態が実現されているが、この時の熱的ゆらぎ効果はどうなるだろうか。まず、ゆらぎのモードを求めるためオーダーパラメタ $\Delta(\mathbf{r}, t)$ に対する Time Dependent Ginzburg Landau 方程式

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = D(\nabla + 2ie\mathbf{A})^2 \Delta + \epsilon_0 \Delta - R|\Delta|^2 \Delta \quad (4)$$

を調べる ($\epsilon_0 = 2DeH_{c2}$, $R = 7\zeta(3)/2\pi^3 T$, $\zeta(x)$ はリーマン・ゼータ関数^{4,5)})。平衡 Abrikosov 状態は,

$$\Delta_0(\mathbf{r}) = C_0 e^{-eBx^2} \theta_3\left(\frac{k\zeta}{2\pi} \middle| \frac{i}{2} + \frac{3}{2}\right) \equiv C_0 \varphi(r|0) \quad (5)$$

で記述される。ここで $\theta_3(z|\tau)$ は

$$\theta_3(z|\tau) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau n^2} e^{2\pi n z} \quad (6)$$

で定義されるゼータ関数で、規格化定数 C_0 は GL パラメタ κ を用いて ($\beta_A = 1.16$)

$$C_0^2 = 2 \frac{\sqrt[4]{3} De (H_{c2} - B)}{2k^2 - 1} \frac{f(\kappa)}{R} \quad (7)$$

$$f(k) = \frac{1}{(2k^2 - 1)\beta_A + 1}$$

また、定数 k は

$$k^2 = 2\sqrt{3} \quad eB\pi \quad (8)$$

$\zeta = x + iy$ である。熱的ゆらぎを含めた時のオーダーパラメタを

$$\Delta(\mathbf{r}, t) = \Delta_0(\mathbf{r}) + \delta\Delta(\mathbf{r}, t) \quad (9)$$

$$\zeta\Delta(\mathbf{r}, t) = e^{-\varepsilon t} \{ a_1 e^{iqz} \varphi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) + a_2 e^{-iqz} \varphi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \} \quad (10)$$

但し、

$$\varphi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = e^{2ieBx_0 y} \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0|0) \quad (11)$$

で表わし、これを(4)式に代入して、ゆらぎの固有モード ε (TDGL 方程式の固有モードは純虚数) を求める事ができる。実際、関数系 $\{\varphi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)\}$ の満す規格直交条件

$$\langle \varphi^*(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2) \rangle \equiv A^{-1} \int_A d^2\mathbf{r} \varphi^*(\mathbf{r}|\mathbf{r}_1) \varphi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_2) = \delta_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \quad (12)$$

(A は物質の磁場に垂直方向の断面積) を用いると(4)式から、

$$\begin{aligned} [\varepsilon - E_0(B, q) + \varepsilon_0 - 2RJ_1(\mathbf{r}_0)] a_1 - RJ_2(\mathbf{r}_0) a_2^* &= 0 \\ [\varepsilon - E_0(B, q) + \varepsilon_0 - 2RJ_1(-\mathbf{r}_0)] a_2^* - RJ_2^*(\mathbf{r}_0) a_1 &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

但し、

$$J_1(\mathbf{r}_0) = \langle |\Delta_0|^2 |\varphi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)|^2 \rangle \equiv C_0^2 I_1(\mathbf{r}_0) = C_0^2 I_1(-\mathbf{r}_0) \quad (14)$$

$$J_2(\mathbf{r}_0) = \langle \Delta_0^2 \varphi^*(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \varphi^*(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \rangle \equiv C_0^2 I_2(\mathbf{r}_0)$$

$$E_0(B, q) - \varepsilon_0 = Dq^2 - RC_0^2 I_1(0) / \sqrt{3} \quad (15)$$

が導かれ、(13)式から直ちに、固有モード

$$\varepsilon_q^\pm(\mathbf{r}_0) = C(B) [2I_1(\mathbf{r}_0) - I_1(0) \pm |I_2(\mathbf{r}_0)|] \quad (16)$$

$$C(B) = 2 \cdot \sqrt[4]{3} \text{De}(H_{c2} - B) \cdot f(\kappa) \quad (17)$$

を得る。この時の固有関数は二重に縮退している。

$$u_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ e^{iqz} \varphi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \pm \alpha e^{-iqz} \varphi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \} \quad (18)$$

$$v_\pm = \frac{i}{\sqrt{2}} \{ e^{iqz} \varphi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \mp \alpha e^{-iqz} \varphi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \} \quad (19)$$

但し, $\alpha = I_2(\mathbf{r}_0) / |I_2(\mathbf{r}_0)|$ 。

ところで, (11)式の関数 $\varphi(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ は, 平衡三角格子(5式)の原点を $\mathbf{r}_0$ だけずらしたものである。即ち我々は, 熱的ゆらぎとして, 原点のずれた Abrikosov モードの重ね合せを考えただけで, これは, 磁場中の結晶における Harper broadening の考え方と類似している。⁶⁾ 今の場合, 結晶場に対応する周期場自体も, 磁場による Abrikosov モードによっているので(4式右辺第3項), ゆらぎの固有モードは, 原点を $\mathbf{r}_0$ と $-\mathbf{r}_0$ ずらしたモードの結合だけで記述できている(18, 19式)。

一方, 平衡 $\Delta_0(\mathbf{r})$ の原点を決めるのは, 超伝導体の境界, あるいは磁束をピン止めする何らかの結晶欠陥などによるわけだが, (4)式にはその効果は含まれていない。我々は先ず $\Delta_0(\mathbf{r})$ を仮定し, それからのズレとしてゆらぎモードを導入したが, これは結晶においてフォノンモードを導入する考え方と同様である。ゆらぎの寄与が, $\Delta_0(\mathbf{r})$ の寄与と同程度になる所で $\Delta_0(\mathbf{r})$ によって記述される格子は溶解する。

さて, (10)式を具体的に計算すると(6)式の $|\eta| \geq 3$ からの寄与はほとんど無視できる事がわかり,

$$\epsilon_{\mathbf{q}}^+(\mathbf{r}_0) = Dq^2 + 2\beta_A C(B) + O(r_0^2) \quad (20)$$

$$\epsilon_{\mathbf{q}}^-(\mathbf{r}_0) = Dq^2 + \lambda \cdot \beta_A C(B) (kr_0)^4 \quad (21)$$

を得る ($\lambda = .00347$)。ここで共役運動量として,

$$q_x = \frac{4\pi}{3} \frac{y_0}{a^2}, \quad q_y = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{x_0}{a^2} \quad (22)$$

を導入すると(21)式は

$$\epsilon^-(q) = Dq_{\perp}^2 + \lambda' \cdot \beta_A C(B) \xi^2(T) q_{\parallel}^4 \quad (23)$$

となる。($\lambda' = 26.3$)ここで

$$\frac{\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{4\pi}{eB} \quad (24)$$

は, 三角格子の単位格子の面積, $\xi(T) = (2eB)^{-\frac{1}{2}}$ 。(23)式の $q_{\parallel}^4$ の分散関係は三角格子構造に特徴的なもので, これの物理量への反映を以下でみていく。尚, 四角格子の磁束構造におけるゆらぎのモードは $-Cq_{\parallel}^2$ ($C > 0$)となり,

これら四角格子の不安定性が結論された⁷⁾。

前節と同様に、ゆらぎに伴う磁化は自由エネルギー

$$\mathcal{F}' = - \frac{eBT}{2\pi} \int \frac{dq_{\parallel}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d^2 t}{2\pi} \sum_{\pm} \ell n \frac{\pi T}{\epsilon_0^{\pm}(q_{\parallel}, t)} \quad (25)$$

を B で微分して得られる。ここでは H_{c2} の極く近傍に限っているので動的効果は無視する。また、 $k \mathbf{r}_0 = \mathbf{t}$ と置き、 $\epsilon_0^{\pm}(q_{\parallel})$ のモードに対応する位相空間の体積要素が $eB/4\pi$ になるように既に規格化してある ($\mathbf{r}_0$ の取り得る値は単位格子の半分に限られ、従って $q_{\perp}$ は対応する第1 Brillouin 域に限られる)。 $\eta_H = (H_{c2} - B)/H_{c2}$ に関して発散を示さない項を除けば、磁化は

$$\begin{aligned} M' &= - \frac{\partial \mathcal{F}'}{\partial B} \simeq - \frac{eBT}{2\pi} \int \frac{dq_{\parallel}}{2\pi} \int \frac{d^2 t}{2\pi} \sum_{\pm} \frac{1}{\epsilon_0^{\pm}} \cdot \frac{\partial \epsilon_0^{\pm}}{\partial B} \\ &= \frac{eT\sqrt{eB}}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\kappa^2 - 1}{(2\kappa^2 - 1)\beta_A + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\eta_H}} \left\{ \sqrt{2\beta_A} + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda} \right\} \quad (26) \end{aligned}$$

で与えられる (試料が3次元的な場合)。平衡状態での磁化 $M_{eq} \propto -(H_{c2} - B)$ と比べて、

$$-\frac{M'}{M_{eq}} \simeq 10^{-7} \kappa \eta_H^{-\frac{3}{2}} \quad (27)$$

となる ($\kappa \gg 1$ とした)。両式から、熱的ゆらぎ $u_{\pm}, v_{\pm}$ は常磁性であり、Abrikosov 状態を壊す方向に働き、それは η_H が $10^{-4} \sim 10^{-5}$ 程度になると消えてしまう。更に H_{c2} に近づくと、構造を持たないオーダーパラメタが生じ易くなり、再び反磁性的振舞いが見られるだろう。従って H_{c2} 近傍では、図1のような磁化曲線が得られる。特に H_{c2} の上下でゆらぎ効果が見え出すのは数係数を除いて $|\eta_H|$ が同程度の時であることを指摘しておく。

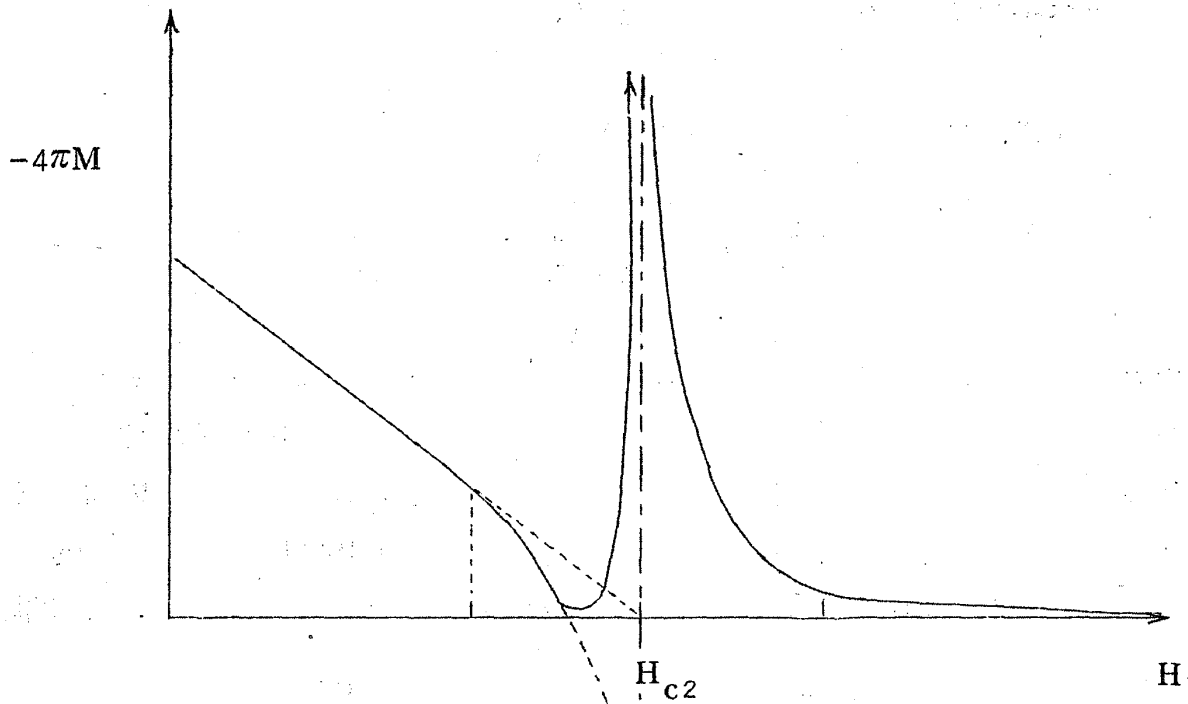


図 1

既に述べた様に, H_{c2} 以下では磁束の運動に伴う flow 抵抗が存在し, 超伝導体中にも電場が存在し得るが, この時の伝導度は,

$$\sigma_{f1} = \sigma_n + |4eM_{eq}| \frac{L_D(T)}{8\pi T \rho} \quad (28)$$

で与えられる (σ_n は常伝導度, $L_D(T)$ は(2)式)。ゆらぎモードの伝導度への効果を調べるために先ず, ゆらぎの伝播子 $\mathcal{K}$ を導入する。

$$\mathcal{K}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \omega_\lambda) \equiv \langle [\delta\Delta(\mathbf{x}_1), \delta\Delta^+(\mathbf{x}_2)] \rangle \omega_\lambda$$

$$= \sum_{\beta} u_{\beta}(\mathbf{r}_1) \tilde{\mathcal{K}}_{\beta}(\omega_\lambda) u_{\beta}^*(\mathbf{r}_2) \quad (29)$$

のように $\mathcal{K}$ を $u_{\beta}(\mathbf{r})$ ($u_1=u_+$, $u_2=u_-$, $u_3=v_+$, $u_4=v_-$) で展開し $\tilde{\mathcal{K}}_{\beta}(\omega_\lambda)$ を

求める。平均 $\langle \dots \rangle$ は $\Delta_0(\mathbf{r})$ のある系で行うことに注意すれば*)

$$\tilde{\chi}_\beta(w_\lambda) = -\frac{1}{N(0)} \cdot \frac{1}{E_\beta(w_\lambda)} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} E_\beta(w_\lambda) &= \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{|\omega_\lambda| + \epsilon_0 + \epsilon_\beta}{4\pi T}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \ell n \frac{T}{T_c} \\ &\cong \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2} + 0\right) \cdot \frac{1}{4\pi T} (|\omega_\lambda| + \epsilon_\beta) \end{aligned} \quad (31)$$

を得る (ϵ_β は (20), (21) 式)。

これまでは $n=0$ の Abrikosov モードを調べたが、電流の計算では $n \geq 1$ に対するゆらぎのモードが必要になる。これらのモードは $u_\beta^{(0)}$ に

$(\partial/i\partial x + \partial/\partial y - 2ieBx)^n$ を演算して求める事ができ、その固有振動数は

$$\epsilon^{(n)} = 2n\epsilon_0 + O(e(H_{c2} - B)D) \quad (32)$$

となる。更に電流の行列要素として、

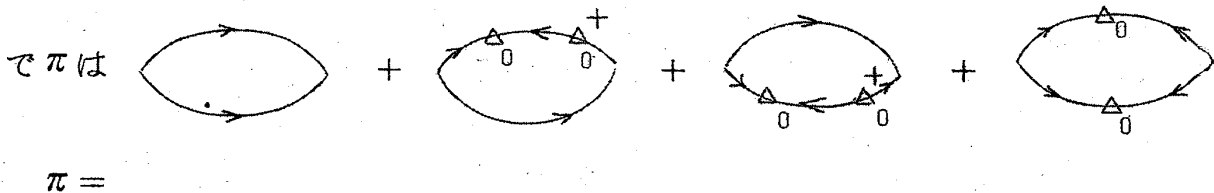
$$\langle u_1^{(1)*}(q, r_0) \frac{\partial}{\partial x} u_1^{(0)}(q, r_0) \rangle = i \sqrt{4\rho H} / 2 \quad (33)$$

$$\langle u_1^{(1)*}(q, r_0) \frac{\partial}{\partial x} u_4^{(0)}(q, r_0) \rangle = -\sqrt{4\rho H} / 2$$

らを得る。

*) 即ち、 $H \gtrsim H_{c2}$ の場合と同様にして

$$\mathcal{K} = -\frac{\pi}{|\varphi| - \pi}$$



を計算する ($\longrightarrow$ は常電子の伝播子)。

これらを用いて電気伝導度を求めるのは、 $H \gtrsim H_{c2}$ の場合と同様である（今の場合、電流の行列要素は β について非対角成分も残る（33式）が、この分の増加と位相空間の体積要素の減少が相殺する）。AL 項、Maki 項の全ての寄与を集めて、

$$\sigma_{\perp}^{ex} = \frac{e^2 \text{DeB}}{2\pi^2 \rho} L_D(T) \sum_{\mathbf{q}} \int_{-1}^1 d^2 t \sum_{\pm} \frac{1}{\epsilon_{\pm}(\mathbf{q}_{11} t)} \quad (34)$$

を得る。 $H \gtrsim H_{c2}$ での結果(1)式と比べて、(34)式の違いは、ゆらぎモードの分散関係の違いだけである。(34)式を具体的に表わすと

$$\left. \frac{\sigma_{\perp}^{ex}}{\sigma_n} \right|_{3\text{次元}} = \frac{C_3}{\sqrt{f(\kappa)}} \cdot \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ln \left(\frac{L}{\xi_H} \right) \right\} \frac{L_D(T)}{\rho} \cdot \frac{1}{(p_0 \ell) (p_0 \xi_H)} \frac{1}{\sqrt{\eta_H}} \quad (35)$$

$$\left. \frac{\sigma_{\perp}^{ex}}{\sigma_n} \right|_{2\text{次元}} = \frac{C_2}{f(\kappa)} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\frac{L}{\xi_H} \right)^2 \right\} \frac{L_D(T)}{\rho} \cdot \frac{1}{(p_0 \ell) (p_0 d)} \frac{1}{\eta_H} \quad (36)$$

となる。 p_0 はフェルミ運動量、 $\xi_H = 1/\sqrt{2eH}$, d はフィルムの厚さである。 $q_{\perp}^4$ の分散式に対応して、 $|q_{\perp}|$ の最小値 ($\propto L^{-1}$) が効いてきたが、ここで L は三角格子の完全な周期性の拡がりの程度で、結晶欠陥が皆無の時は、試料の大きさ程度になり、ゆらぎはかなり大きくなる（特に2次元の場合）。これら数係数を除いて、 $\sigma_{\perp}^{ex}$ は H_{c2} の上下で全く同様な振舞いをする。従って σ の H_{c2} 近傍での様子は2図のようになる。

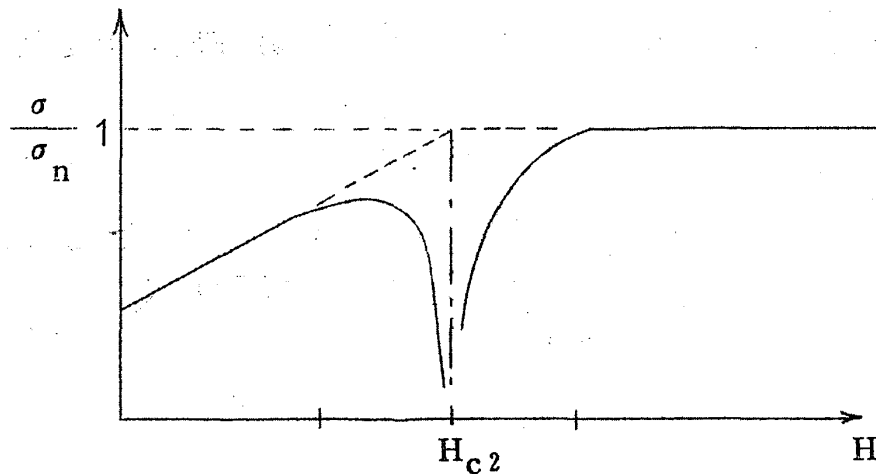


図 2

文 献

- 1) K.D.Vsadel, Z.Physik 227 (1969), 260.
- 2) H.Takayama & H.Ebisawa, Prog.Theor. Phys. 44 (1970), 1450.
- 3) R.S.Thompson, preprint.
- 4) G.Eilenberger Phys.Rev. 164 (1967), 628.
- 5) K.Maki ; Phys. Letters 27A (1968), 481.
- 6) P.G.Harper, Proc,Phys, Soc. A68 (1955), 879.
- 7) A.L.Fetter , P.C.Hohenberg & P.Pincus, Phys.Rev. 147
(1966), 140.