

Hyperfiniteness II_1 factor 上の shift.

甲子園大 経営情報 榎本雅俊

§0. Introduction. V. Jones は, 彼の有名な指数理論を [8] で始めた. A. Ocneanu [9] は, Hyperfinite II_1 factor 中の subfactors の埋め込みの分類問題を, 相対可換子代数を用いることで, 展開してやる. 他方, R. T. Powers [10] は, σ の Jones index を使って, Hyperfinite II_1 factor 上のある $*$ -endomorphism を研究した. 彼は, Hyperfinite II_1 factor R の $*$ -endomorphism σ で, 単位元 I を保存し, $\bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma^k(R) = \mathbb{C}I$ となるものを, shift と呼んで, σ の index を, Jones index $[R:\sigma(R)]$ により定義した. 幾人かの人達 ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [10], [11], [12]) により, Hyperfinite II_1 factor 上の shift が研究されていく.

R の shift σ が, Powers binary shift であるというのは, $\exists$ self adjoint unitary $u_0 \in R$ で, $R = \{\sigma^n(u_0); n=0,1,2,\dots\}$ で, $\sigma^n(u_0)$ と $\sigma^m(u_0)$ が, pairwise に可換か反可換となるようなものが存在するともいう. その unitary u_0 を R の σ -generator ([10]) とする. 以下では, $u_n = \sigma^n(u_0)$ と置く. R 上の shift α, β が 共役 であるということも,

$\exists$ automorphism θ on R で, $\beta = \theta \alpha \theta^{-1}$ となる α とする.

R 上の shift α, β が, 外部共役 であるとは, $\exists$ unitary $u \in R$,

$\exists$ automorphism θ on R で, $\beta = \theta \alpha \theta^{-1} \cdot \text{Ad}_u$ となる α とする.

Powers [10] は, 共役なものを除いて, binary shift を完全に分類した. 彼は又, 次の外部共役不変量 $q(\sigma)$ を, shift σ に対して導入した.

$$q(\sigma) = \min \{ k \in \mathbb{N} ; \sigma^k(R)' \cap R \neq \mathbb{C}I \}.$$

このとき, Powers は, binary shift σ に対して, $q(\sigma)$ が, 完全な外部共役不変量か? という問題を提出した. これは,

[4] に於いて, 否定的に, 解決された. このとき, 行なう為に, 我々は, 相対可換子代数全体 $\{ \sigma^k(R)' \cap R ; k = 0, 1, 2, \dots \}$ を使った. この使用に際しては,

Ocneanu の idea に動機づけを与えられた点が大まい.

==2== は, binary shift に付随した相対可換子代数の構造を完全に決定する α とを目標とする. このとき, 次の興味ある事実が成立する α とがわかる.

(1) すべての AF 代数が, binary shift の相対可換子代数として実現される訳ではない.

(2) 相対可換子代数は, "finite depth" ([9]) をもつ.

(3) 相対可換子代数の Bratteli diagram の inclusion 行列は, 周期をもつ.

(4) 相対可換子代数は, $M_{2^p}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^{2^q} (\exists p, q \geq 0)$

の形をもつ.

他方, Bures and Yin [2] は, 独立に, 次の美しい結果を得ている. (=これは, Yin に知らせた我々のプレプリント [5] 中の予想に対する返事になっている.)

定理 ([2]). a, b を signature sequence とする.
(i.e. $a: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ で, $a(0) = 0$, $a(-n) = a(n)$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$ なるものとする.) 又, $\max\{n; a(n) \neq 0\} < +\infty$,
 $\max\{n; b(n) \neq 0\} < +\infty$ とする. σ_a, σ_b を, a, b に対応する binary shift (後の §1 参照) とする.
= a とし, σ_a, σ_b が共役である
 $\iff \sigma_a, \sigma_b$ が外部共役である.

= a Bures と Yin の結果と, 我々の得た結果を合わせると
により, 2つの binary shift で, 外部共役ではあるが,
その相対可換子代数がすべて同型であるものが存在
する.

§1. 相対可換子代数.

Powers の binary shift は, 次のように実現される [4]. G を,
 $G_i (\cong \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\})$ の制限直積 $G = \prod_{i=0}^{\infty} G_i$ とする. $a: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$
が, signature sequence とは, $a(0) = 0$, $a(n) = a(-n)$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$

$\neq \emptyset$ かつ $a \neq \emptyset$. G 上の canonical shift σ , $x = (x(i)) \in G$
 $i \neq \emptyset$ かつ $\sigma(x)(i) = x(i-1)$ for $i \geq 1$ and $(\sigma(x))(0) = 0$
 $\neq \emptyset$. G 上の multiplier m とは, $m: G \times G \rightarrow \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z|=1\}$ かつ, $m(x, 1) = m(1, x) = 1$, $m(x, y)m(xy, z) = m(x, yz)$
 $\cdot m(y, z)$ for $x, y, z \in G$ を満たすものをいう. signature
sequence a を用いて, G 上の multiplier m_a を次で定義す
る. $x = (x(i)), y = (y(i)) \in G$ に対して,

$$m_a(x, y) = (-1)^{\sum_{i > j} a(i-j)x(i)y(j)}$$

$\neq \emptyset$ multiplier m_a を用いて, $\ell^2(G)$ 上の unitary operator $\lambda_{m_a}(x)$
 $\neq \emptyset$, $x, y \in G$, $\xi \in \ell^2(G)$ に対して,

$$(\lambda_{m_a}(x)\xi)(y) = m_a(x, x^{-1}y)\xi(x^{-1}y) \quad \text{と定義する.}$$

$R_{m_a}(G)$ には $\{\lambda_{m_a}(x); x \in G\}$ により生成された von Neumann
代数 $\neq \emptyset$. signature sequence a が periodic であるとは,
 $\exists k \in \mathbb{Z}$ かつ $a(k+n) = a(n)$ for $n \in \mathbb{Z}$ なる k を用いて $\neq \emptyset$.

Price $([11], [12])$ は, a が, not periodic $\iff R_{m_a}(G)$
 $\neq \emptyset$ factor, $\neq \emptyset$ である. 以下, $e_i \in G$ に対して, $e_i(i) = 1$,
 $e_i(j) = 0$ ($i \neq j$) とする. $R_{m_a}(G)$ 上では, G 上の canonical
shift σ により, induce された shift σ_{m_a} が, 存在して,
 $\sigma_{m_a}(\lambda_{m_a}(x)) = \lambda_{m_a}(\sigma(x))$ ($x \in G$) である. σ_{m_a} を, σ_a と
書く. $u_0 = \lambda_{m_a}(e_0)$, $u_n = \sigma_a^n(u_0)$ と置く. $\neq \emptyset$ かつ,

σ より induce された $R_{m_a}(G) = \{u_n; n=0,1,\dots\}$ 上の shift σ_a は, Powers の binary shift である. [4] に於いて, 我々は, σ の相対可換子代数 $\sigma^k(R)' \cap R$ (=これを, $C_k(\sigma)$ と書く) を, 次のように, σ -generator の言葉で書いた.

定理 ([4]). a を non-periodic な signature sequence とする.

#, $\{i \in \mathbb{Z} \mid a(i) \neq 0\} < +\infty$ を仮定する. $d = \max \{i \in \mathbb{Z} \mid a(i) \neq 0\}$ と置く. a の signature sequence a をもつ binary shift を σ_a と書く. a のとき,

$$C_k(\sigma_a) = \mathbb{C}I \quad (0 \leq k \leq d), \quad C_k(\sigma_a) = \{u_i \mid 0 \leq i \leq k-d-1\}'' \quad (d+1 \leq k).$$

以下, unitaries $\{u_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ により生成される C^* 代数 P_n の構造を決定しよう. $a = a(n)$ は, 次の関係 $u_n^2 = 1$, $u_n u_m = (-1)^{a(n-m)} u_m u_n$ for $n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $d = \max \{i \mid a(i) \neq 0\} < +\infty$ を満足している と仮定する.

$$A(n) = \begin{pmatrix} a(0)a(1) & \dots & a(n) \\ a(1)a(0) & & \vdots \\ \vdots & & a(1) \\ a(n) & & a(1)a(0) \end{pmatrix}, \text{ i.e. } (A(n))_{i,j} = a(i-j)$$

と置く.

$$\left[\text{補題 1.1. } \dim(\text{Center } P_n) = 2^{\dim \text{Ker } A(n)} \right]$$

(証明)

Fourier 展開を考へる a と n により, $\text{Center } P_n$ は, $\text{Center } P_n$

に属する $u_0^{x(0)} u_1^{x(1)} \dots u_n^{x(n)}$ の形の元により, 生成されること

が出る. 一之, $u_0^{x(0)} u_1^{x(1)} \dots u_n^{x(n)} \in \text{center } P_n$

$$\iff \sum_{k=0}^n a(i-k)x(k) = 0 \text{ for } 0 \leq i \leq n.$$

$$\iff A(n)x = 0 \text{ over the finite field } F_2 = \{0, 1\}$$

$$= \text{即ち, } x = {}^t(x(0), \dots, x(n)), x(i) \in F_2, i=0, 1, 2, \dots.$$

よって, $\text{Center } P_n$ 中の要素 $u_0^{x(0)} u_1^{x(1)} \dots u_n^{x(n)}$ の数は,

方程式 $A(n)x = 0$ の解 x の数に等しい. よって,

$\dim(\text{Center } P_n)$ は, 方程式 $A(n)x = 0$ (F_2 上) の解の

個数である. 二のように, $\dim(\text{Center } P_n) = 2^{\dim \text{Ker } A(n)}$

Q.E.D.

命題 1.2. C^* 代数 P_n は, $M_{2^k}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^{2^l}$ (for $\exists k, l \geq 0$) と同型である.

証明. 二を, n に関する帰納法により証明する.

$P_n \cong M_{2^k}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^{2^l}$ ($\exists k, l \geq 0$) と仮定する. α_{n+1} を,

P_n の automorphism で, $\alpha_{n+1} = \text{Ad } u_{n+1}$ とする. 二のとき,

$$P_{n+1} \cong P_n \rtimes_{\alpha_{n+1}} \mathbb{Z}_2.$$

$$E = \left\{ \underset{\text{put}}{\text{central minimal projection}} e \in P_n \mid \alpha_{n+1}(e) = e \right\}.$$

$$e_0 = \sum_{e \in E} e \text{ と置き, } s = \#E \text{ とする. 二のとき, } 0 \leq s \leq 2^l.$$

= a projection $e_0 \notin \mathbb{A}$ 112, $P_n = P_n e_0 \oplus P_n e_0^\perp$.

$$P_n \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2 = (P_n e_0 \oplus P_n e_0^\perp) \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2 = (P_n e_0 \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2) \oplus (P_n e_0^\perp \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2).$$

= a 11, α_{n+1} is, $P_n e_0$ is inner 213 of 21,

$$P_n e_0 \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2 \cong P_n e_0 \otimes \mathbb{C}^2.$$

11 minimal central projection $f \notin E$ 113, = a 11, 11

minimal central projection $\alpha(f) \notin E$ 213, $f \neq \alpha(f)$.

112, $P_n e_0^\perp = \sum_i \oplus (P_n f_i \oplus P_n \alpha_{n+1}(f_i))$ 113 113.

113,

$$P_n e_0^\perp \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2 = \sum_i (P_n f_i \oplus P_n \alpha_{n+1}(f_i)) \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2. \text{ 113 113,}$$

$$P_n f_i \cong P_n \alpha_{n+1}(f_i) \cong M_{2^k}(\mathbb{C}) \text{ 113 of 21,}$$

$$(P_n f_i \oplus P_n \alpha_{n+1}(f_i)) \rtimes_{\alpha_{n+1}} Z_2 \cong M_{2^{k+1}}(\mathbb{C}).$$

$$\text{113 113, } \dim(\text{center } P_{n+1}) = 2s + \frac{(2^\ell - s)}{2}. \text{ 113 113,}$$

$$2^{\ell-1} \leq \dim(\text{center } P_{n+1}) \leq 2^{\ell+1}. \text{ 補題 1 113 113,}$$

$$\dim(\text{center } P_{n+1}) = 2^m \text{ for } \exists m \in \mathbb{N}.$$

$$\text{113 113, } \dim(\text{Center } P_{n+1}) = 2^{\ell-1}, 2^\ell, 2^{\ell+1}. \text{ 113 113,}$$

$$\dim(\text{center } P_{n+1}) = 2^\ell \text{ 113, 113 113. 113, 113 113 113}$$

$$\text{113 113, } 2^\ell = 2s + \frac{2^\ell - s}{2} \text{ 113 113. 113 113,}$$

$3s = 2^l$. これは、矛盾である。このように、

$\dim(\text{center } P_{n+1}) = 2^{l \pm 1}$. だから、もし $\dim(\text{center } P_{n+1}) = 2^{l-1}$ とすると、上の議論により、

$$P_{n+1} \cong M_{2^{k+1}}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^{2^{l-1}} \quad (\text{これは、} s=0 \text{ の時}).$$

一方、 $\dim(\text{center } P_{n+1}) = 2^{l+1}$ のとき、

$$P_{n+1} \cong M_{2^k}(\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^{2^{l+1}} \quad (\text{これは、} s=2^l \text{ の時}).$$

よって、 n に関する帰納法によって、命題の主張を得る。

Q.E.D.

[定理 1.3.
 $\{\dim(\text{center } P_n)\}_{n \geq 0}$ は、周期列である。

この定理 1.3 を示すのに、いくつかの結果を準備しよう。

$d = \max\{i \mid a(i) \neq 0\}$ とおく。無限次元行列 $X_d, I_{k,l}(c)$ と、 $d \times 2d$ 行列 Y_d を次で定義しよう。

$$(X_d)_{i,j} = \begin{cases} a(i-j) & (|i-j| \leq d \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{他の } (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$(I_{k,l}(c))_{i,j} = \begin{cases} c & ((i,j) = (k,l) \text{ のとき}) \\ 1 & (i=j \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{他の } (i,j) \in \mathbb{N}^2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$(Y_d)_{i,j} = (X_d)_{i,j} \text{ for } 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq 2d.$$

(ただし, $(\cdot)_{i,j}$ は, 与えられた行列の (i,j) 成分を表わす.)
 帰納的に, 無限次元行列 $\{X_m\}_{m \geq d}$ と $d \times 2d$ -行列 $\{Y_m\}_{m \geq d}$ で, 次の関係をもつものを構成しよう.

$$X_{m+1} = I_{1,m+1}((X_m)_{1,m+1-d}) \times I_{2,m+1}((X_m)_{2,m+1-d}) \\ \times \cdots \times I_{d,m+1}((X_m)_{d,m+1-d}) \cdot X_m,$$

$$(Y_{m+1})_{i,j} = (X_{m+1})_{i,j+m-d} \text{ for all } m > d.$$

補題 1.4. 上の列 $\{Y_m\}_{m > d}$ は, 周期をもつ.

証明.

最初に, その行列 X_m は次の形であることを注意する.

$$d \left\{ \begin{array}{cc|c} \overbrace{\hspace{2cm}}^{m-d} & \overbrace{\hspace{2cm}}^{2d} & \\ \hline 0 & Y_m & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \end{matrix} & \\ \hline & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 1 \end{array} \right\} \begin{matrix} \\ \\ \\ 0 \end{matrix}$$

故に、行列の成分について次の関係を得る。

$$\begin{cases} (Y_{m+1})_{i,j} = (Y_m)_{i,j+1} + (Y_m)_{i,1} a(d-j) \\ (1 \leq j < 2n, 1 \leq i \leq d \text{ のとき}) \\ (Y_{m+1})_{i,2d} = (Y_m)_{i,1} \quad (1 \leq i \leq d \text{ のとき}) \end{cases}$$

これらの関係により、 $Y_{m+1} = Y_m T$ for $m > d$,

すなわち、 T は、次の形の $2d \times 2d$ 行列である。

$$\begin{pmatrix} a(d-1) & \cdots & a(0) & \cdots & a(d-1) & 1 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \bigcirc & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

T は、有限群 $GL(2d, \mathbb{Z}_2)$ に属しているのて、 T は
周期をもつ。このように、その列 $\{Y_m\}$ は、周期をもつ。

Q.E.D.

〔注意〕 T は可逆なので、 $1 \leq m \leq d$ に対して、行列 Y_m
を、 $Y_m = Y_d T^{-d+m}$ で、定義出来る。このとき、その列
 $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ は周期をもつ。

この注意により、定理3を、以下示そう。

よって, $\dim \text{Ker}(A_m) = \dim \text{Ker}(B_m)$. だから, 証明が終わる.

Q.E.D.

注意.

行列 T の minimal polynomial は, 次のとおり.

$$f_T(x) = a(d)x^{2d} + a(d-1)x^{2d-1} + \dots + a(0)x^d + a(1)x^{d-1} + \dots + a(d).$$

この多項式を用いて, $q = \min\{m \geq 0; T^m = I\}$ を計算出来る. もし p を, 列 $\{\dim(\text{center } P_n)\}_{n \geq 0}$ の周期とすると, このとき, p は q の約数である.

以下に, signature sequence は違いますが, 各レベルの相対可換子代数が同型となる例を与えよう.

例 1.

$$n=4. \quad a(0)=0, a(1)=0, a(2)=1, a(3)=0, a(4)=1.$$

$$a(0)=0, a(1)=0, a(2)=1, a(3)=1, a(4)=1.$$

$$p=q=12.$$

周期列 $1, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0$

例 2.

$$n=5. \quad a(0)=0, a(1)=1, a(2)=0, a(3)=1, a(4)=0, a(5)=1.$$

$$a(0)=0, a(1)=1, a(2)=1, a(3)=0, a(4)=1, a(5)=1.$$

$$p=q=12.$$

周期列 $1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0.$

例 3.

$n=6.$

$a(0)=0, a(1)=1, a(2)=0, a(3)=1, a(4)=0, a(5)=1, a(6)=1.$

$a(0)=0, a(1)=1, a(2)=1, a(3)=0, a(4)=1, a(5)=1, a(6)=1$

$p=q=24$

周期列 $1, 0, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 0,$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0.$

§2. 本質的に周期的な signature sequence

以下では, R 上の binary shifts σ で, $C_k(\sigma)$ がすべて
の k について, scalars になる場合を考えよう.

定義 2.1. $a \in$ non-periodic signature sequence on $\mathbb{Z}$ と
する. その列 a が, essentially periodic (本質的に周期的)
というのは, $\exists$ positive integers k, p で, $\forall n \geq k$ について,
 $a(n+p)=a(n)$ となるものが存在するといふ.

定理 2.2.

$a \in$ non-periodic signature sequence とし, $\sigma_a \in$,
Hyperfinite II_1 -factor R 上の, α に associated な binary shift
とする. すると, a が essentially periodic $\iff$

$\exists$ positive integer r で, $\sigma_a^r(R)' \cap R \neq \mathbb{C}I$ となるものが

存在する。

証明. 最初に, $C_r(\sigma_a) \neq \mathbb{C}I$ となる positive integer r が存在すると仮定する. $\Rightarrow$ a と $\neq$, $\exists x(\neq 1) \in G = \prod_{i=0}^{\infty} G_i$, $G_i \cong \mathbb{Z}_2$ で, $m_a(x, e_n) = m_a(e_n, x)$ for $n \geq r$, となる x も a が存在する. $\Rightarrow$ x は, $x = \sum_{i=0}^d x(i)e_i$ と書ける. $\Rightarrow$ d , $d = \max \{i; x(i) \neq 0\}$, $x(i) \in \{0, 1\}$. $\Rightarrow$ a と $\neq$,

$$\sum_{i=0}^d a(n-i)x(i) = 0 \text{ for } n \geq r, \text{ が成立する.}$$

更に, $n \geq r$ に対し,

$$a_0(n) = a(n-d), a_1(n) = a(n-d+1), \dots, a_{d-l-1}(n) = a(n-l-1)$$

とおく. $\Rightarrow$ これらの $a_i(n)$ ($0 \leq i \leq d-l-1$) を使って,

$\vec{a}_n = (a_0(n), \dots, a_{d-l-1}(n))^t$ とおく. $\times$, $(d-l) \times (d-l)$ 行列 $A \in$, 次で定義する.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & & & & 0 & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & 0 & & & \\ x(d) & \dots & x(l+2) & x(l+1) & 1 & \end{pmatrix}.$$

$\{0, 1\}^{d-l}$ は, 有限集合なので, positive integer p と non negative integer k が存在して,

$$A^p(A^k \vec{a}_r) = A^k \vec{a}_r \text{ が成り立つ.}$$

A の中を $\Rightarrow$ の等式の両辺に作用させる $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ により, 次を得る.

$$A^p(\vec{a}_m) = \vec{a}_m \text{ for } m \geq r+k.$$

よって, $\vec{a}_m$ の定義により,

$$a(m+p) = a(m) \text{ for } m \geq r+k-d.$$

このように, a は, essentially periodic である.

次に, 上の定理の必要性を示そう.

a が essentially periodic と仮定しよう. よって, $\exists$ positive integers k, p で, $\forall n \geq k$ として, $a(n+p) = a(n)$ が成り立つ.

次の2つの場合が起る.

(場合1). $a(k) + a(k+1) + \dots + a(k+p-1) = 0$. $\forall \varepsilon$ 次で置く.

$$V = U_0 U_1 \dots U_{p-1} (\notin \mathbb{I}). \text{ このとき, } V \in \sigma_a^{k+p-1}(R)' \cap R.$$

(場合2) $a(k) + a(k+1) + \dots + a(k+p-1) = 1$.

$$V = U_0 U_1 \dots U_{p-1} U_p U_{p+1} \dots U_{2p-1} (\notin \mathbb{I}) \text{ とおく.}$$

$$\text{このとき, } V \in \sigma_a^{k+2p-1}(R)' \cap R. \text{ これは, 次より出る.}$$

$$a(k+i) = a(k+i+p) \text{ for } 0 \leq i \leq p-1. \text{ より,}$$

$$\sum_{i=0}^{2p-1} a(k+i) = 0. \text{ よって, 定理が示せたことになる.}$$

Q.E.D.

§3. 整数 index をもつ Price 型 shift.

ここでは, [7] で示した結果を index n の場合について行なう. $n \geq 2$ なる整数, $G = \prod_{i=0}^{\infty} G_i$, $G_i \cong \mathbb{Z}_n$ とする.

σ を G 上の canonical shift とする. $a = (a(i))_{i \in \mathbb{Z}}$ を, $a(i) \in \mathbb{Z}_n$
 $= \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $a(0) = 0$ で, $a(-i) = -a(i)$, $\forall i \in \mathbb{Z}$ なるものを a とする.
 a の列 a に対し, 次の仮定する ([1], [12]).

(*) n を割るすべての素数 p に対し, 上の列 $a = (a(i))$ は,
 $\text{mod } p$ で, 周期的でない.

$\gamma = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ とおく. 上の列 $a = (a(i))$ を使って, multiplier m_a を,
 次の定義する.

$$m_a(x, y) = \gamma^{\sum_{i,j} a(i-j) x(i) y(j)} \text{ for } x = (x(i)), y = (y(j)) \in G.$$

このとき, $m = m_a$ は, σ を保存するもので, σ は, $R_m(G)$ 上の
 shift σ_m を induce する. 他方, Bures と Ylin [1] は, 次の事実.

定理 ([1]). 次の (1), (2), (3) は同値である.

(1) その列 $a = (a(i))$ は, (*) を満たす.

(2) $R_m(G)$ は, factor である.

(3) $\sigma_m(R_m(G))' \cap R_m(G) = \mathbb{C}I$.

定義 3.1.

hyperfinite II_1 factor R の shift α が, Powers type shifts with index n というのは, $G = \prod_{i=0}^{\infty} G_i$, $G_i \cong \mathbb{Z}_n$ とし, その上の
 canonical shift σ を使って, (*) を満たす $a = (a(i))$ より
 作る $R_{m_a}(G)$ 上の shift σ_{m_a} のことである.

定義 3.2. $X_\ell = \prod_{i=0}^{\infty} G_i^{(\ell)}$, $G_i^{(\ell)} \cong \mathbb{Z}_n$ と, (*) を満たす a を取る.

多項式 $p = (p_1, p_2, \dots) z$, $p_\ell(t) = C_{\ell,0} + C_{\ell,1}t + \dots + C_{\ell,k(\ell)}t^{k(\ell)} z$, $C_{\ell,0} = C_{\ell,k(\ell)} = 1$ for $\ell = 1, 2, \dots$ を取る.

$\Phi_{p_\ell}: X_\ell \rightarrow X_{\ell+1}$ は多項式 p_ℓ による group injection とする.

$$\left[\begin{array}{ll} \text{i.e.)} & \\ X_\ell \xrightarrow{\theta} \mathbb{Z}_2[t] & \theta((x(i))) = \sum_i x(i)t^i \\ \downarrow \Phi_{p_\ell} & \downarrow \gamma \\ X_{\ell+1} \xrightarrow{\gamma} \frac{\mathbb{Z}_2[t]}{p_\ell(t)} & \gamma((y(i))) = \frac{\sum y(i)t^i}{p_\ell(t)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \gamma(f(t)) = \frac{f(t)p_\ell(t)}{p_\ell(t)} \\ \gamma((y(i))) = \frac{\sum y(i)t^i}{p_\ell(t)} \end{array}$$

$= a$ とし, $(*)$ は $\mathcal{H}$ 上の列 a_ℓ で, それにより induce される multipliers m_{a_ℓ} ($\ell = 1, 2, \dots$) が, $m_{a_{\ell+1}}(\Phi_{p_\ell}(x), \Phi_{p_\ell}(y)) = m_{a_\ell}(x, y)$ ($x, y \in X_\ell$), $a_1 = a$ を満足する a が存在する.

$X_{[p]} = \varinjlim (X_\ell, \Phi_{p_\ell})$ とおき, $X_{[p]}$ 上の multiplier $m_{[a,p]}$ を $m_{[a,p]}(x, y) = m_{a_\ell}(x, y)$ ($x, y \in X_\ell$ and ℓ) とおく. $= a$ とし,

$R_{m_{[a,p]}}(X_{[p]})$ は, hyperfinite Π_1 -factor であり, $X_{[p]}$ 上の canonical group endomorphism $\sigma_{[p]}$ を考え, $R_{m_{[a,p]}}(X_{[p]})$ 上の shift $\sigma_{[a,p]}$ を induce せよ. ($= z$, canonical group endomorphism は, $\sigma_t\left(\frac{f(t)}{p(t)}\right) = \frac{tf(t)}{p(t)}$ の作用により induce される.) 我々には, $= a$ とし, $= a$ の shift を Price 型の shift とする.

以上, $\sigma_{[a,p]} = \sigma$, $X_{[p]} = X$ とおく.

[命題 3.3. Price 型の shift σ に対して, $\sigma(R)' \cap R = \mathbb{C}I$.

証明. $x (\neq \lambda I) \in \sigma(R)' \cap R$ が存在したと仮定する.

$\{\delta_g; g \in X\}$ は, canonical orthonormal basis of $\ell^2(X)$ とする.

$\Rightarrow$ とし, $x\delta_e = \sum_{g \in G} C_g \delta_g$, $\sum_{g \in G} |C_g|^2 < +\infty$. $\forall h \in \sigma(X)$ に対して, $(\lambda_m(h)x)\delta_e = \sum_{g \in G} C_g m(h, g) \delta_{gh}$ であり, $(x\lambda_m(h))\delta_e = x(\rho_m(h^{-1})\delta_e) = \sum_{g \in G} C_g m(g, h) \delta_{gh}$. ($= z$), $\rho_m(g)(\delta_h) = m(h, g^{-1})\delta_{hg}$ for $g, h \in X$). $\lambda_m(h)x = x\lambda_m(h)$ なる z , $C_g m(h, g) = C_g m(g, h)$ が出る. $\Rightarrow$ のように, もし $C_g \neq 0$ ならば, $m(h, g) = m(g, h)$ for $\forall h \in \sigma(X)$. x は, スカラーでないの z , $\exists g (\neq 1) \in X$ であり, $\lambda_m(g) \in \sigma(R)' \cap R$ となるものが存在する. 他方, $X = X_{[p]} = \varinjlim X_p$ なる z , $\exists \ell$ であり, $g \in X_\ell$ なるものが存在する. 他方, $\lambda_m(g)|_{\ell^2(X_\ell)} = \lambda_{m_\ell}(g)$. 明らかに, $\lambda_{m_\ell}(g)$ は, スカラーでない z , $\lambda_{m_\ell}(g) \in \sigma(R_{m_\ell}(X_\ell))' \cap R_{m_\ell}(X_\ell)$ である. $\Rightarrow$ 3 が, 上の Bures と Yin の定理により, $\sigma(R_{m_\ell}(X_\ell))' \cap R_{m_\ell}(X_\ell) = \mathbb{C}I$. $\Rightarrow$ これは, 矛盾. $\Rightarrow z$, $\sigma(R)' \cap R = \mathbb{C}I$.

Q.E.D.

命題 3.4. ([1]).

G は可算離散可換群とする. m は nondegenerate な G の multiplier とし, σ は m を保存する G の shift とする.

(i.e. $\sigma: G \rightarrow G$ (injective homomorphism) であり, $\bigcap_{k=1}^{\infty} \sigma^k(G) = \{1\}$ であり, σ は shift である). $m(\sigma(x), \sigma(y)) = m(x, y)$ for $\forall x, y \in G$

のとき, σ は m を保存するといふ.) σ_m を σ により induce された hyperfinite II₁-factor $R_m(G)$ の shift とする.

$$N(\sigma_m) = \{ u \in R^{\text{unitary}}; u \sigma_m^k(R) u^* = \sigma_m^k(R), k=1, 2, \dots \} \text{ とする.}$$

$$= a \text{ のとき, } N(\sigma_m) \vee \Pi \cong G \iff \sigma_m(R) \wedge R = \mathbb{C}.$$

命題 3.5. ゼロでない定数項をもつ多項式の列, $p = (p_i)$, $g = (g_i)$ と, 2つの (*) 条件を満たす列 a, b を取る. もし 2つの Price 型の shifts $\sigma_{[a, p]}, \sigma_{[b, g]}$ が共役ならば, $(\sigma_{[p]}, X_{[p]}), (\sigma_{[g]}, X_{[g]})$ は, 共役である. (ただし, $\sigma_{[p]}$ は, $\sigma_{[a, p]}$ により induce された $X_{[p]}$ 上の shift である.)

次に, 可算な既約多項式の列 (p_k) ($p_k(t) \neq t$) を取る. ($p_k \neq p_{k'}$)

$a \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ とする. 次の集合 X^a を取る.

$$X^a = \left\{ \frac{g(t)}{f(t)}; g(t) \in \mathbb{Z}_n[t], f(t) \text{ は, もし } f(t) = p_1(t)^{k_1} \cdots p_n(t)^{k_n} \right. \\ \left. \quad k_i \neq 0 \text{ ならば, } a(i) \neq 0 \text{ となるもの.} \right\}$$

σ_t を X^a 上で考えて, これを σ^a と書く.

補題 3.6. $a, b \in \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_2$ とする. このとき, $a = b \iff (\sigma^a, X^a) \text{ と } (\sigma^b, X^b) \text{ は共役である.}$

命題 3.3, 命題 3.4, 命題 3.5, 補題 3.6 を使う事により, 次の定理を得る.

定理 3.7. index n をもつ Price 型 shift が非可算個, 共役性を除いて存在し, 二からは, Powers 型 shift と共役でない.

57

文 献

- [1] D. Bures and H.S. Yin, Shifts on the hyperfinite II_1 -factor. preprint, 1987.
- [2] ———, Outer conjugacy of shifts on the hyperfinite II_1 factor. preprint, 1988.
- [3] M. Choda, Shifts on the hyperfinite II_1 -factor, J. Operator Theory, 17(1987), 223-235.
- [4] M. Enomoto and Y. Watatani, Powers' binary shifts on the hyperfinite factor of type II_1 , Proc. Amer. Math. Soc., to appear.
- [5] ———, A solution of Powers' problem on outer conjugacy of binary shifts, preprint 1987.
- [6] M. Enomoto, M. Choda and Y. Watatani, Generalized Powers' binary shifts on the hyperfinite II_1 factor, Math. Japon., to appear.
- [7] ———, Uncountably many non-binary shifts on the hyperfinite II_1 -factor, preprint 1987.
- [8] V. F. R. Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72(1983), 1-25.
- [9] A. Ocneanu, Quantized groups, string algebras and Galois theory for algebras, preprint 1988.

[10] R.T. Powers, An index theory for semigroups of $*$ -endomorphisms of $B(H)$ and type II_1 factors, Can. J. Math., 40 (1988) 86-114.

[11] G. Price, Shifts on type II_1 factors, Can. J. Math., 39 (1987), 492-511.

[12] ———, Shifts of integer index on the hyperfinite II_1 factor, Pac. J. Math., 132 (1988), 379-390.

(注) §1と§2の結果は, 阪大基礎理工の渚, 吉田両氏, 大阪教育大の韓谷氏との共同研究であることを, 断わっておきます.