

Discretization of soliton equations

京大 数理研 三輪 哲二
Miwa Tetsuji
神保 道夫
Jimbo Michio
教養 伊達 悦朗
Date Etsuro

ソリトン方程式を、 N -ソリトン解を持つという性質を保持して、discrete化するという問題は、種々の立場から扱われている。このノートでは、そのうちの一つである広田氏の結果¹⁾、及びそれに基づく、三輪の結果²⁾を一般化した、一つの方法について述べる。詳細については、我々のプレプリント (RIMS. 401, 403, 4, 4, 4) にゆずることにして、以下では、その概略について述べる。

我々は、以前の論文³⁾ において、free fermion の基盤を用いて、(continuous な) ソリトン方程式の解の変換群を考察した。ソリトン方程式を扱う方法として、二つの主要な方法が知られている。一つは、線型化 (ソリトン方程式を、線型方程式系の可積分条件に表わすこと) であり、もう一つは、双線型化 (従属変数の変換により、方程式を双線型な形に表わすこと) である。我々の (continuous な場合の)

考察の基礎となつた a は、線型方程式系 a の解 (wave function) 及び、双線型方程式 a の解 (τ -函数, 広田 a 変数) だ。クリフォード群の元を時間発展させた a の、真空期待値の形に表わされるということであった。この事實は又、 τ -函数同志、ある u は τ -函数と wave function が一致す、bilinear identity と呼ぶ、関係式 a 帰結であった。我々の discretization は、この bilinear identity を出発点として行われる。free fermion a 言葉で言えば、時間発展をとりかえりことにあたる (continuous な場合 a exponential function $\exp(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e^j)$ と rational function $(1-ae)^{-l}(1-be)^{-m}\dots$, $a, b: 1 \times 1$ matrix, $l, m, \dots \in \mathbb{Z}$ にとる)。従つて、解 a 変換群は不変である。

nonlinear Schrödinger 方程式

$$\begin{aligned} i q_t + \delta x x - 2 \delta^* \bar{q}^2 &= 0 \\ -i \bar{q}_t + \delta^* x x - 2 \delta^{*2} q &= 0 \end{aligned}$$

と例に 1×1 の δ をとり 1×1 とする。

この方程式は、2 或る KP hierarchy a reduction a - τ である。2 或る KP hierarchy a reduction に許す bilinear identity は次の a がある。

$$\begin{aligned}
0 &= \oint \frac{dk}{2\pi i k} \left[(-)^{l_2+l_2'+1} k^{s+l_1-l_1'} e^{\zeta(x-x',k)} \tau_{l_1, l_2'+1}(x-y-(k^{-1}))x \right. \\
&\quad \times \tau_{l_1'+1, l_2'}(x'-y'+\epsilon(k^{-1})) + k^{s+l_2-l_2'} e^{\zeta(y-y',k)} \tau_{l_1+1, l_2}(x-y+\epsilon(k^{-1}))x \\
&\quad \times \tau_{l_1', l_2'+1}(x'-y'-\epsilon(k^{-1})) \left. \right], \quad s \geq 0, \quad s+l_1+l_2 \geq l_1'+l_2', \\
&\quad p^s w_{l_1+1, l_2+1}^{(\alpha)}(x-y; p) \tau_{l_1', l_2'}(x'-y') e^{\zeta(y-y', p)} \\
&= \oint \frac{dk}{2\pi i k} \left[(-)^{l_2+l_2'+1} k^{s+l_1-l_1'} e^{\zeta(x-x',k)} \tau_{l_1, l_2'+1}(x-y-(k^{-1}))x \right. \\
&\quad \times w_{l_1'+1, l_2'}^{(\alpha)}(x'-y'+\epsilon(k^{-1}); p) + \frac{k}{k-p} k^{s+l_2-l_2'} e^{\zeta(y-y',k)} \tau_{l_1+1, l_2}(x-y+\epsilon(k^{-1}))x \\
&\quad \times w_{l_1', l_2'+1}^{(\alpha)}(x'-y'-\epsilon(k^{-1}); p) \left. \right], \quad s \geq 0, \quad s+l_1+l_2 \geq -1+l_1'+l_2'.
\end{aligned}$$

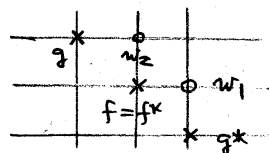
$\tau = \tau''$. $\tau_{l_1, l_2}(x)$, $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ は τ -函数, $w_{l_1, l_2}^{(\alpha)}(x; k)$
 $\alpha=1, 2$, $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ は wave function τ である. τ は a
 bilinear identity は任意の x, x', y, y' , $x=(x_1, x_2, \dots)$
 について成り立つ. 更に. 上の積分路は. $\oint \frac{dk}{2\pi i k} = 1$ と仮
 定するに $k=\infty$ のまわりを contour である.

$$\zeta(x, k) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j, \quad \epsilon(a) = (a, \frac{1}{2}a^2, \frac{1}{3}a^3, \dots) \text{ である.}$$

と $1 \leq n \leq N$ にあたる. $(r, r', t, t', a_i, a'_i, b_i, b'_i)$ は任意に
 選ぶことができる. 得る n 個の方程式全体は, 元 a bilinear
 identity と同値である.

$$f^* = f = \tau_{l_1, l_2}, \quad g^* = \tau_{l_1+1, l_2+1}, \quad g = \tau_{l_1-1, l_2+1}$$

$$w_1 = w_{l_1+1, l_2}^{(x)}, \quad w_2 = w_{l_1, l_2+1}^{(x)}$$



なる. 組み合わせで, $1 \leq x - y - z \leq 2$ 個 (4) の
 場合の方程式は, $z \neq 0$ 出せば, 例え $z = 1$ なる式を得る.

$$f(1,0)f(0,1) - f(1,1)f(0,0) - a b g^*(1,1)g(0,0) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} v_1(-1) \\ v_2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \delta^*(0) \delta(-1) - a k+1 & a \delta^*(0) \\ a \delta(-1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix},$$

$$f(n,m) = f(x-y+n \in (a)+m \in (b)), \text{ etc.}$$

$$v_i = \frac{w_i}{f}, \quad \delta = \frac{g}{f}, \quad \delta^* = \frac{g^*}{f}.$$

前者 a 式は, nonlinear Schrödinger 方程式 a, 双非線型
 a 形 a discretization である. 後者は, 線型方程式 a
 discretization である. 従って変数 z a nonlinear
 Schrödinger 方程式 a discretization である. 後者は可積分
 条件 $z \neq 0$ である.

$$(1 + ab \delta^*(1,1) \delta(0,0)) (a \delta(0,1) - b \delta(1,0)) = (a-b) \delta(0,0)$$

$$(1 + ab \delta^*(1,1) \delta(0,0)) (a \delta^*(1,0) - b \delta^*(0,1)) = (a-b) \delta^*(1,1)$$

と存る。

$a, b \rightarrow 0$ とすると $\delta = \delta^*$ となり, continuous な双線型方程式, 線型方程式, 非線型方程式が回復される。

$$D_1^2 f \cdot f + 2g^* \cdot g = 0,$$

$$\partial_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta - \delta^* & \\ -\delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\partial_2 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^2 - \delta^* \delta & -\delta \delta^* - \partial_1 \delta^* \\ -\delta \delta + 2\delta & \delta^* \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\partial_2 \delta + \partial_1^2 \delta - 2\delta^* \delta^2 = 0$$

$$-\partial_2 \delta^* + \partial_1^2 \delta^* - 2\delta^{*2} \delta = 0 \quad \chi_2 = -i\delta.$$

discrete 化した, nonlinear Schrödinger 方程式の γ リット上解は, 上に述べた, 時間発展を取り除くを考慮すれば,

continuous な場合の式が容易に得られる。

ここであげた以外 a で $q_{1,2}$ の ~~組み合わせ~~ 組み合わせ が得られる。 γ

リット方程式, KP 以外 a hierarchy の γ リット方程式については, プレブリーとを参照して下エ。

References

1. R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan 50 (1981), 3785
2. T. Miwa, Proc. Japan Acad. 58A (1982), 9.
3. E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa,
J. Phys. Soc. Japan 50 (1981) 3806, 3813
Physica ±D (1982) 343
RIMS preprint 394.