

重力場での拡散方程式の解とその特性

Ⅱ. 周期密度源による分布*

宮崎大・工・応物 餌 取 寛 次

(1981年8月10日受理)

摘 要

重力場の影響を含む粒子数密度の拡散方程式について、その周期密度源に対する解が Laplace 変換を用いて求められる。この場合に、有限距離における吸収及び反射条件下での解が従来の重力場を考慮しない解と比較され、重力場の影響が密度拡散波の位相と振幅及び位相速度に関係した“ずれ”として示される。

§ 1 序

拡散現象での周期的入力に関する問題は、中性子の輸送などに関して検討されたりしているが、重力場の影響については明確にされていない^{1), 2)}

今回の報告は、前回に報告された重力場の拡散方程式³⁾を用いて、粒子数密度の周期入力源に対する応答分布としての解が Laplace 変換の方法⁴⁾を適用して見出される。この解と従来の重力場を考慮しない解との比較が、拡散波の位相と拡散係数、まさつ係数及び重力加速度との関係で議論される。特に、重力場の影響による位相及び位相速度の“ずれ”が明確に示される。

§ 2 拡散方程式と境界条件

重力方向を z とし任意時刻 t における粒子速度 $v(t)$ 及び拡散係数 D とすると、粒子数密度 $\rho(z, t)$ に対する拡散方程式は次のように与えられる³⁾。

$$\frac{\partial \rho(z, t)}{\partial t} = -\langle v(t) \rangle \frac{\partial \rho(z, t)}{\partial z} + D \frac{\partial^2 \rho(z, t)}{\partial z^2}, \quad z > 0, \quad t > 0, \quad D: \text{一定} \quad (2.1)$$

ETORI, Kanji

*) 本稿は、「宇宙航行の力学とシンポジウム」(1980年11月, 東大宇宙研)において発表された内容に基づくものである。

餌取寛次

ただし $\langle v(t) \rangle$ は $v(t)$ についての集団平均を示し

$$\langle v(t) \rangle = v_0 \cdot \cos \theta \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{m} t\right) - \frac{mg}{\gamma} [1 - \exp\left(-\frac{\gamma}{m} t\right)]$$

であり、式中の各定数は v_0 : 初速度, θ_0 : v_0 の z 軸となす角, γ : まさつ係数, m : 粒子質量及び g : 重力加速度を示す。この (2.1) 式の形は、固体結晶場での原子空孔形成における拡散のドリフト項に関係した式⁵⁾と一致している。この (2.1) 式に与えられる初期及び境界条件は、一定粒子数密度 ρ_0 によって

$$\left. \begin{aligned} \rho(z, 0) &= 0, \quad z > 0 \\ \rho(0, t) &= \frac{\rho_0}{2} [1 + \sin(\omega_0 t)]; \text{ 周期密度源} \\ &\quad (\omega_0 = \text{一定角周波数}) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\rho(L, t) = 0 : \text{吸収条件} (L : \text{有限一定距離}) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \rho(L, t)}{\partial z} = 0 : \text{反射条件} \quad (2.4)$$

§ 3 解

3.1) 重力場が考慮されない場合

(2.2) ~ (2.4) 式で与えられる境界条件から、 $\langle v(t) \rangle = 0$ とした (2.1) 式の解は Laplace 変換を用いて容易に解かれ、次のように示される。

$$\begin{aligned} \frac{\rho(z, t)}{\rho_0} &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega_0}{2D}} \cdot z\right) \cdot \sin\left(\omega_0 t - \sqrt{\frac{\omega_0}{2D}} \cdot z\right) \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n \left[\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega_0}{2D}} (2nL + z)\right) \cdot \sin\left(\omega_0 t - \sqrt{\frac{\omega_0}{2D}} (2nL + z)\right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega_0}{2D}} (2nL - z)\right) \cdot \sin\left(\omega_0 t - \sqrt{\frac{\omega_0}{2D}} (2nL - z)\right) \right] \right\} \\ &\quad \left. \begin{aligned} (+1)^n &: \text{吸収条件} \\ (-1)^n &: \text{反射条件} \end{aligned} \right\} \quad (3.1) \end{aligned}$$

この (3.1) 式では、入力周期性が保存されるが、 $\{ \}$ 内の定常波を示す項に対し、 $\Sigma []$ 内の項は境界条件による減衰またはエコーの影響を示している。

3.2) 重力場での解

重力による自由落下 ($v_0 = 0$) においては (2.1) 式を Laplace 変換すると

$$\frac{d^2 R(z, s)}{dz^2} + \frac{mg}{rD} \left[\frac{dR(z, s)}{dz} - \frac{dR(z, s+\alpha)}{dz} \right] - \frac{s}{D} R(z, s) = 0, \quad \alpha = \frac{r}{m}, \quad s: \text{複素変数} \quad (3.2)$$

ただし $f(t)$ を任意関数として

$$R(z, s) = \mathcal{L} \cdot \left[2 \cdot \frac{\rho(z, t)}{\rho_0} - 1 \right], \quad \mathcal{L}: \text{Laplace 変換の記号}$$

$$F(s) = \mathcal{L} \cdot f(t)$$

$$= \int_0^\infty f(t) \cdot \exp(-st) dt$$

$$F(s+\alpha) = \mathcal{L} \cdot [f(t) \cdot \exp(-\alpha t)]$$

(3.2) 式を解くために s の任意関数 $\chi(s)$, $\lambda(s)$ を導入してみる

$$R(z, s) = \lambda(s) \cdot \exp[-\chi(s) \cdot z] \quad (3.3)$$

(3.3) 式を (3.2) 式に代入すると

$$\chi^2(s) + \frac{mg}{rD} \left[1 - \frac{\lambda(s+\alpha)}{\lambda(s)} \right] \chi(s) - \frac{s}{D} = 0 \quad (3.4)$$

したがって $\chi(s)$ は

$$\chi(s) = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{mg}{rD} \left[1 - \frac{\lambda(s+\alpha)}{\lambda(s)} \right] \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{rD} \right)^2 \left[1 - \frac{\lambda(s+\alpha)}{\lambda(s)} \right]^2 + \frac{4s}{D}} \right\}. \quad (3.5)$$

(2.2) 式の Laplace 変換を考慮して $\lambda(s)$ を次のように仮定してみる

$$\lambda(s) = c_1 \left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right), \quad c_1: \text{任意定数}. \quad (3.6)$$

境界条件 (2.3) 及び (2.4) 式と (3.5) 及び (3.6) とから未定係数を決め、逆変換理論⁴⁾の適用によって粒子の自由落下に対する (2.1) 式の解が次のように得られる (付録参照)

$$\frac{\rho(z, t)}{\rho_0} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + f_g(z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n [f_g(2nL+z, t) - f_g(2nL-z, t)] \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} (+1)^n : \text{吸収条件} \\ (-1)^n : \text{反射条件} \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

ただし

$$f_g(z, t) = \exp \left\{ -\frac{mgz}{2rD} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\sqrt{\left(\frac{mg}{rD}\right)^4 + 4\left(\frac{2\omega_0}{D}\right)^2} + \left(\frac{mg}{rD}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot z \right\} \\ \times \sin \left\{ \omega_0 t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\sqrt{\left(\frac{mg}{rD}\right)^4 + 4\left(\frac{2\omega_0}{D}\right)^2} - \left(\frac{mg}{rD}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot z \right\}.$$

§ 4 解の考察と位相のずれ

$g=0$ とすると (3.7) 式の $f_g(z, t)$ は

$$f_0(z, t) = \exp \left(-\sqrt{\frac{\omega_0}{2D}} z \right) \cdot \sin \left(\omega_0 t - \sqrt{\frac{\omega_0}{2D}} z \right) \quad (4.1)$$

となり, (3.7) 式は (3.1) 式に等しくなる。

この (3.7) 式から, 重力場の影響を示す因子は (mg/rD) によって示される。また $z=L$ での境界条件の影響, すなわち吸収条件による密度拡散波の強制的減衰または反射条件による波の重なりの影響は, Σ 項によって示されている。重力場の影響としては, 重力ポテンシャルの制約によって, $mgL/(2rD) > 1$ では吸収または反射の各条件に対する密度拡散波の振幅の減衰度は, 重力場のない場合と比較して数十%にも達するが, $mgL/(2rD) < 0.1$ では数%以内となることが数値計算の結果から確かめられる。時刻, 位置, 入力周波数及び重力の影響に関する無次元化表示を考慮すると, (3.7) 式の計算結果が図 1 の a) 及び b) に示される。

ただし, $X = z/L$, $W = \sqrt{\omega_0/(2D)} \cdot L$ 及び $G = mgL/(2rD)$ を示す。

これらの図では, 無印の振幅 1 を示す曲線は両図共に $z=0$ での入力正弦波 $\rho(0, t)/\rho_0$ (2・2 式) を示す。 $W=0.5$ 及び $X=0.75$ についての吸収条件 (図 1.a) と反射条件 (図 1.b) による差異が, 重力場の影響を示す G の値と相まって示される。

解に示される位相 φ について, 解 (3.1) に対する解 (3.7) での位相差 $\Delta\varphi$ は

$$\Delta\varphi = \sqrt{\frac{\omega_0}{2D}} L \left\{ 1 - \left[\sqrt{1 + \left(\frac{mg}{2\sqrt{\omega_0 D} r}\right)^4} - \left(\frac{mg}{2\sqrt{\omega_0 D} r}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \left(\frac{z}{L}\right) \quad (4.2)$$

で [] 内に重力場の影響による“ずれ”を示す項が含まれている。(4.2) 式の $\pi/8$ 単位で任意の z/L の値に対する計算結果を図 2 に示す。

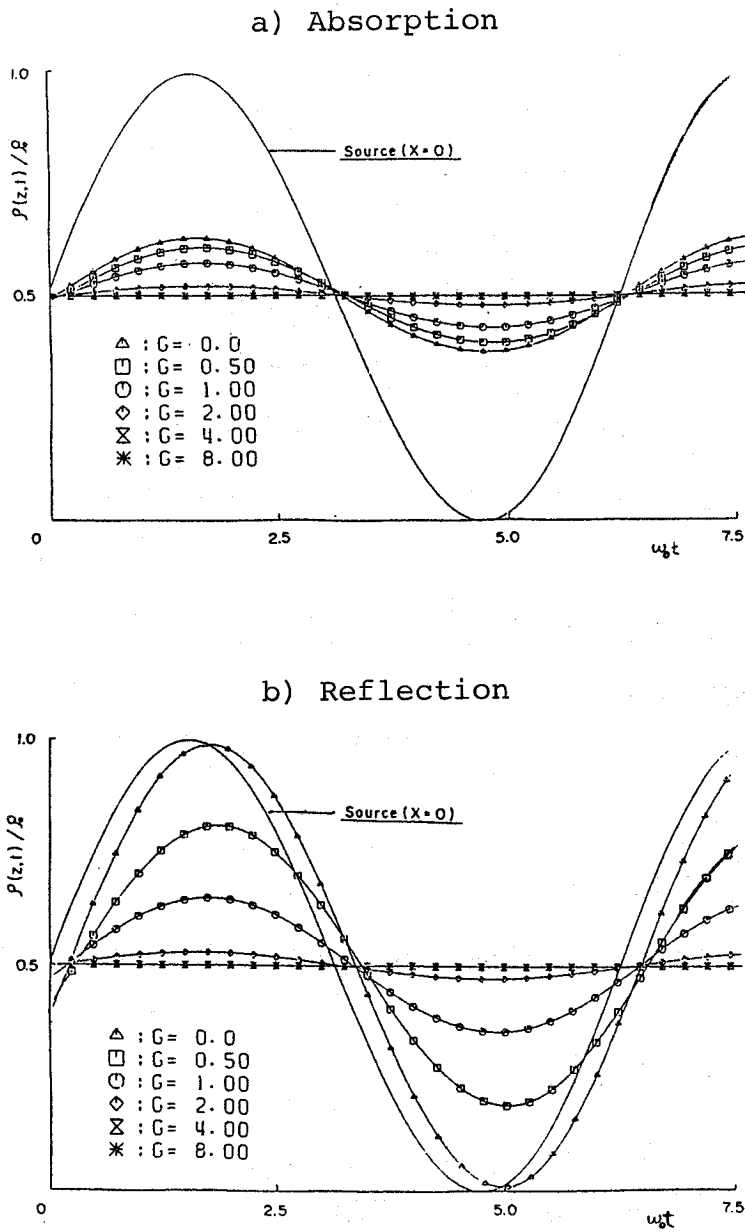


図1 重力に関連した無次元化表示 $G = mgL/(2\tau D)$ の各値に対する規格化密度 $\rho(z, t)/\rho_0$ の無次元化時刻 $\omega_0 t$ への依存性。 $W = 0.5$, $X = 0.75$ の場合における $z = L$ での a) 吸収条件 及び b) 反射条件を示す。

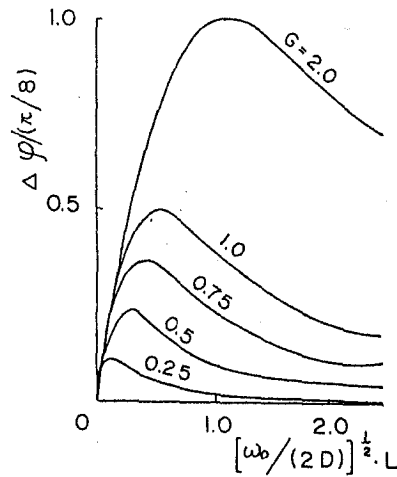


図2 G の各値に対する位相差 $\Delta\varphi$ ($\pi/8$ 単位) の無次元化周波数 $[\omega_0/(2D)]^{\frac{1}{2}}L$ への依存性。

この図においては、 $G < \sqrt{2}$ では $W < 1$ 、 $G > \sqrt{2}$ では $W > 1$ によって G と W の関係による $\Delta\varphi$ のピークが明らかに示されている。

最後に位相速度 v_P について、(3.1)式によるものを $(v_P)_0$ 及び (3.7)式によるものを $(v_P)_g$ とすると

$$(v_P)_0 = \sqrt{2\omega_0 D} \quad (4.3)$$

となるから、両者の比によって位相速度についての重力場の影響を示す“ずれ”の項が見出される。即ち

$$\begin{aligned} & (v_P)_g / (v_P)_0 \\ &= \left[\sqrt{1 + \left(\frac{mg}{2\sqrt{\omega_0 D} r} \right)^4} + \left(\frac{mg}{2\sqrt{\omega_0 D} r} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\approx 1 \quad , \quad \frac{mg}{r} \ll 2\sqrt{\omega_0 D} \quad . \quad (4.5)$$

したがって上記の評価から、常に $(v_P)_g > (v_P)_0$ が示される。

付 録

(3・5) 及び (3・6) 式を考慮すると, (3・3) 式は

$$R(z, s) = \left(\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \right) \cdot \exp \left[- \frac{g}{2D} \left(\frac{2s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \right) \cdot z \right] \\ \times \{ A \cdot \exp [\chi_0(s) \cdot z] + B \cdot \exp [-\chi_0(s) \cdot z] \} \quad (\text{A} \cdot 1)$$

\$A, B\$ 任意定数

ただし

$$\chi_0(s) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{g}{D} \right)^2 \left(\frac{2s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2} \right)^2 + \frac{4s}{D} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot z.$$

この \$A, B\$ は境界条件によって決まる。逆変換の定義⁴⁾から

$$\mathcal{L}^{-1} \cdot R(z, s) \quad , \quad \mathcal{L}^{-1} : \text{逆変換の記号} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{r_0 - i\infty}^{r_0 + i\infty} R(z, s) \cdot \exp(st) dt \quad , \quad r_0 : \text{実定数} \\ = \sum_{n=1}^2 \text{Res} [R(z, s) \cdot \exp(st)]_{s=s_n} \quad , \quad \text{Res} [\quad]_{s=s_n} : \text{極 } s_n \text{ の留数} \\ = \lim_{(s \rightarrow \pm i\omega_0)} [R(z, s) \cdot \exp(st)] \quad (\text{A} \cdot 2)$$

したがって (A・1) と (A・2) 式とから

$$R(z, t) = \mathcal{L}^{-1} R(z, s) \\ = f(p, q, z) + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n [f(p, q, 2nL + z) - f(p, q, 2nL - z)] \quad (\text{A} \cdot 3)$$

ただし

$$f(p, q, z) = \exp \left[- \frac{1}{2} \left(\frac{mg}{rD} + p \right) \cdot z \right] \cdot \sin(\omega_0 t - \frac{1}{2} q \cdot z) \\ \left(\begin{array}{c} p \\ q \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left[\left(\frac{mg}{rD} \right)^4 + 4 \left(\frac{2\omega_0}{D} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{mg}{rD} \right)^2 \left(\begin{array}{c} +1 \\ -1 \end{array} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

この (A・3) 式の \$p, q\$ の値を考慮することによって解 (3・7) 式が得られる。

References

- 1) R. B. Perez and R. E. Uhrig : Nucl. Sci. Eng. **17** (1963)90.
- 2) K. L. S. Kothari : American J. Phys. **40** (1972)1264.
- 3) 餌取 : 物性研究 Vol. 36, No 4, No 5.
- 4) C. T. Tranter : *Integral Transforms in Mathematical Physics*
(Chapman and Hall, London, 1971) p. 18-31.
- 5) J. R. Manning : Phys. Rev. **139** (1965) A126.