

自己相関係数のロバスト推定

鹿児島大学教養部 近藤正男

大阪大学基礎工学部 稲垣宣生

§1 はじめに

定常過程 $\{X(t)\}_{t=0, \pm 1, \pm 2, \dots}$ の自己相関係数 $\{\rho(h)\}_{h=1, 2, \dots}$ の推定は時系列解析の中で基本的問題の一つである。 $\rho(h)$ の通常の推定量は

$$\hat{\rho}_n = \sum_{t=1}^n X(t)X(t+h) / \sum_{t=1}^n X(t)^2$$

であり、その性質はくわしく調べられている (Fuller[2]参照)。

Huqil [5], [6], [7] は定常過程が正規であるという仮定の下で簡便推定量

$$\hat{\rho}_{3n} = \sum_{t=1}^n \operatorname{sgn}(X(t)X(t+h)) / \sum_{t=1}^n |X(t)|$$

を提案し、通常の推定量との分散の比較を行っている。

さらに、Iwase [9] は偏りがるだけあるデータに対して、この簡便推定量に関し同様な比較を行なった。ここでは分散の計算法に改善がみられる。データの偏りに対するロバスト性への検討として興味深い。

Inagaki & Kondo [8] はこれらの推定量を推定方程式の解としてみることを主張した:

$$\xi_n(r) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n F(X(t)) G(X(t+h) - X(t))$$

$$\hat{p}_n : \xi_n(r) = 0 \text{ の解}$$

F, G として次のようなものを考えた。

Case 1 $F_1(x) = x, \quad G_1(y) = y$

$$\xi_{1n}(r) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X(t) (X(t+h) - rX(t))$$

$$\hat{p}_{1n} = \sum_{t=1}^n X(t) X(t+h) / \sum_{t=1}^n X(t)^2 \quad (\text{通常の推定量})$$

Case 2 $F_2(x) = \Delta_a(x), \quad G_2(y) = y, \quad \Delta_a(x) = \begin{cases} a & x > a \\ x & |x| \leq a \\ -a & x < -a \end{cases}$

$$\xi_{2n}(r) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \Delta_a(X(t)) (X(t+h) - rX(t))$$

$$\hat{p}_{2n} = \sum_{t=1}^n \Delta_a(X(t)) X(t+h) / \sum_{t=1}^n \Delta_a(X(t)) X(t)$$

Case 3 $F_3(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad G_3(y) = y, \quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

$$\xi_{3n}(r) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \operatorname{sgn}(X(t)) (X(t+h) - rX(t))$$

$$\hat{p}_{3n} = \sum_{t=1}^n \operatorname{sgn}(X(t)) X(t+h) / \sum_{t=1}^n |X(t)| \quad (\text{Huzil})$$

Case 4 $F_4(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad G_4(y) = \operatorname{sgn}(y)$

$$\xi_{4n}(r) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \operatorname{sgn}(X(t)) \operatorname{sgn}(X(t+h) - rX(t))$$

$$\hat{p}_{4n} = \operatorname{median} \{ X(t+h)/X(t) : t=1, \dots, n \}$$

(take no account of $X(t+h)/X(t)$ if $X(t)=0$)

Case 5 $F_5(x) = \Delta_a(x), \quad G_5(y) = \Delta_b(y).$

$$\xi_{5n}(r) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \Delta_a(X(t)) \Delta_b(X(t+h) - rX(t))$$

$\hat{p}_{5n}$ is obtained numerically

$\{X(t)\}$ が正規定常過程で無限次移動平均表現

$$X(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j \varepsilon(t-j)$$

をもち、 $\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{|j|>0} C_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$ という条件の下で、これら Case 1 ~ Case 5 の推定量が漸近的に不偏であり、漸近的に正規分布に従うことを示し、その漸近分散の Hermite 多項式表現を与えた。

有効性

正規性の仮定の下で、これら Case 1 ~ Case 5 の推定量は漸近的には不偏な推定量であるのでその漸近分散、また有限の標本に対しては偏りを持つので数値実験によりその分散、MSE によりそれらの効率を調べてみる(表1, 表2)。打ち切りなしの通常の推定量と比較して、 σ 打ちに対して 10~15%, 2 σ 打ちに対して 1~2%, 3 σ 打ちに対して 0.1~0.2% の分散の増加がみられる。すなわち、1.5 σ ~ 2 σ 打ちで相当の効率が得られている。

また、Denby & Martin [1] は 1 次の AR モデルの係数 ($= \rho(1) = 0.9$) の推定に対するモンテカルロ実験によって、 $n=100$, $F(x)=x$, $G(y)=1.15 s_n(y)$ のときの推定量が通常の推定量よりも MSE の意味で効率がよいことを示した。そこでは $\rho(1)=0.9$ と相関が高く通常の推定量 $\hat{\rho}_1$ はもともと偏りがあるために正規性の仮定の下でも MSE の意味で効率が悪いと考えられる。

表 1 漸近分散の比較

モデル 正規 ARMA(1,1) : $X(t) = 0.7X(t-1) + E(t) - 0.4E(t-1)$..

$\sigma^2 = X(t)$ の分散.

$r = \{p(t)$ の推定量の漸近分散 $\} / \{p(t)$ の通常の推定量 $\hat{p}$ の漸近分散 $\}$

推定法	r	推定法	r
$\hat{p}_3$	1.50	$\hat{p}_2 \quad a=1.5\sigma_0$	1.03
$\hat{p}_2 \quad a=0.2\sigma_0$	1.31	$\hat{p}_2 \quad a=2\sigma_0$	1.008
$\hat{p}_2 \quad a=0.6\sigma_0$	1.17	$\hat{p}_2 \quad a=2.5\sigma_0$	1.002
$\hat{p}_2 \quad a=\sigma_0$	1.08	$\hat{p}_2 \quad a=3\sigma_0$	1.0003

表 2 数値実験による分散, MSE の比較

$p(t)$ の推定値 ($n=100$) を 1000 回 モデル 正規 AR(1) $X(t) = 0.9X(t-1) + E(t)$

$r_1 = \{ \text{推定値の分散} \} / \{ \text{通常の推定値の分散} \} \quad : \text{分散の比}$

$r_2 = \{ \text{推定値の MSE} \} / \{ \text{通常の推定値の MSE} \} \quad : \text{MSE の比}$

推定法	平均	r_1	r_2
$\hat{p}_1$	0.884	1.	1
$\hat{p}_2 \quad a=\sigma_0$	0.890	1.14	1.07
$\hat{p}_2 \quad a=1.5\sigma_0$	0.886	1.07	1.02
$\hat{p}_2 \quad a=2\sigma_0$	0.886	1.02	1.01
$\hat{p}_5 \quad a=\infty \quad b=1.5\sigma_0\sqrt{1-\hat{p}_1^2}$	0.886	1.05	1.03
$\hat{p}_5 \quad a=1.5\hat{\sigma}_0 \quad b=1.5\hat{\sigma}_0\sqrt{1-\hat{p}_1^2}$	0.886	1.14	1.09

ここで, σ_0^2 は $X(t)$ の分散, $\hat{\sigma}_0^2, \hat{p}_1$ はそれぞれ通常の $\sigma^2, p(t)$ の推定値。

§2 ロバスト性

ロバスト性の3つの概念

(i) 効率ロバスト性 : 分布族 $\{F\} \cup \{G\}$ に対して効率が低い推定である。効率の基準としては Cramér-Rao 下限 は漸近有効性の比較に適當であるが、有限標本に対しては与えられた分布族の中で最も良い推定と比較して 90-95% の高い効率をもつ推定がロバスト推定の対象と考えられる。Tukey [12] は正規分布、混合正規分布 コーシー分布を $\{G_1, G_2, G_3\}$ として選んで、3分布族有効性を強調している。

(ii) MinMax ロバスト性 : Huber [4] は対称分布に対して最大の漸近分散を最小にする MinMax ロバスト位置推定を論じているが、これは最良ではないけれども良い効率ロバスト性を持つ。

(iii) 定性ロバスト性 : Hampel [3] が提案した定性ロバスト性は同程度連続性である。観測値の分布 F に対する推定量 $\{T_n\}$ の分布を $\{\mathcal{L}(T_n|F)\}$ とするとき、 $\{\mathcal{L}(T_n|F)\}$ が分布の距離 d に関して同程度連続である：

$$d(F_0, F) < \delta \Rightarrow d(\mathcal{L}(T_n|F_0), \mathcal{L}(T_n|F)) < \varepsilon \quad \text{for } n.$$

Hampel の導入した概念である破壊点 (Break down point) はロバスト性の全域的指標であり、感応曲線 (Influence curve) はロバスト性の局所的指標として重要である。

時系列におけるロバスト性 ; IOモデルとAOモデル

ロバスト推定を取扱った統計文献の大部分は独立同一分布の誤差をもつ位置や線形回帰モデルに関してであり、共分散行列のロバスト推定を取扱った論文は少ない。時系列関係におけるロバスト推定の研究はデータの従属性からくる困難さのために非常に遅れている。Martin [1], Denby & Martin [2], Kleiner, Martin & Thomson [10] はこの点を強調し、時系列におけるロバスト推定の研究に着手している。時系列におけるアウトライヤーの現実的モデルであって取扱いやすくしかも良いロバスト推定を作るようなモデルが問題になる。自己回帰時系列に対して2つの異なるアウトライヤーの導入が考えられている : すなわち Innovation Outliers (IO) と Additive Outliers (AO) である。IOモデルは

$$x(t) = \phi_1 x(t-1) + \dots + \phi_p x(t-p) + \varepsilon(t)$$

におけるイノベーション $\varepsilon(t)$ が $F_\varepsilon = (1-\delta)F_0 + \delta H$ なる分布に従い重い裾をしている。AOモデルは $\{x(t)\}$ は正規自己回帰であるが観測系列 $\{y(t)\}$ が

$$y(t) = x(t) + v(t)$$

であり、 $v(t)$ は独立同一分布 $F_v = (1-\delta)\delta_0 + \delta H$ に従う。ここで δ_0 は原点に全質量をもつ退化分布である。

IOモデルは構造内異常値モデルであるが、AOモデルは

構造外の観測時における異常値モデルである。したがって、IOモデルでは異常値によって推定したい母数自身も変化するが、AOモデルでは母数の変化はなく母数と観測の離反が問題となる。時系列の従属性とそれにともなう異常値モデルの下では、ロバスト性の概念は初期の統計的香りの高い効率ロバスト性が結局のところ有効であって、定性ロバスト性は時系列に適応されるような変形を行なう必要がある。

§3 AOモデルの下での推定関数と推定量の漸近正規性

我々が先に挙げたCase1~5における推定量がAOモデルの下でどのような行動をするのか、ロバスト性を持っているのかについて論じよう。

• Original Time Series $\{X(t)\}$

$$X(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j \varepsilon(t-j), \quad \{\varepsilon(t)\} \text{ i.i.d. } N(0,1)$$

$$X(t) \sim N(0, \sigma_0^2), \quad \sigma_0^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j^2 < \infty$$

• Observation Time Series $\{Y(t)\}$

$$Y(t) = X(t) + \delta(t) Z(t) \quad \text{AOモデル}$$

$\{X(t)\}, \{\delta(t)\}, \{Z(t)\}$ は互いに独立

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{with prob } \delta \\ 0 & \text{with prob } 1-\delta \end{cases}, \quad \{\delta(t)\} \text{ i.i.d.}$$

$$Z(t) : \text{i.i.d. } N(0, \sigma^2), \quad \sigma^2 = k \sigma_0^2$$

Case 1~5 における推定関数の一般形として、

$$\xi_n(r) = \xi_n(a, b; r) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \Lambda_a(Y(t)) \Lambda_b(Y(t+h) - rY(t))$$

$$M(r) = M(a, b; r) = E \{ \Lambda_a(Y(t)) \Lambda_b(Y(t+h) - rY(t)) \}$$

$$p = p(a, b) : M(a, b; r) = 0 \text{ の解}$$

を考える。

推定関数 $\xi_n(r)$ は $\sum_{t=0}^{\infty} (\sum_{j=1}^{\infty} c_j^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$ の下で、次の (i) (ii) (iii) の性質をみたす。

(i) $\xi_n(r)$ は r の非増加関数である。

(ii) $\sqrt{n} \xi_n(p) \rightarrow N(0, v^2)$ in law as $n \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \text{ここで } v^2 = & E \{ \Lambda_a(Y(0))^2 \Lambda_b(Y(h) - pY(0))^2 \} \\ & + 2 \sum_{t=1}^{\infty} E \{ \Lambda_a(Y(0)) \Lambda_b(Y(h) - pY(0)) \Lambda_a(Y(t)) \Lambda_b(Y(t+h) - pY(t)) \} \end{aligned}$$

(iii) 任意の実数 u に対して

$$\xi_n(p + u/\sqrt{n}) - \xi_n(p) \rightarrow -C \cdot u \text{ in Prob. as } n \rightarrow \infty.$$

$$\text{ここで } C = E \{ \Lambda_a(Y(0)) Y(0) \lambda_b(Y(h) - pY(0)) \}, \quad \lambda_b(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < b \\ \frac{1}{2} & \text{if } |x| = b \\ 0 & \text{if } |x| > b \end{cases}$$

(i) は明らかであるが、(ii) (iii) を示すためには Billingsley による中心極限定理を用いる。AO モデルに対しても Inagaki & Kondo [8] と同様にできる。

推定関数 $\xi_n(r)$ がこれらの性質を満たすとき、それに基づく推定量 $\hat{p}_n = \hat{p}_n(a, b) : \xi_n(r) = 0$ の解は次のような漸近分布を持つ。

定理 (Hodges & Lehmann)

$$\sqrt{n} (\hat{p}_n - p) \rightarrow N(0, v^2/C^2) \text{ in law as } n \rightarrow \infty.$$

§4 推定量の偏り

AO モデルの下では、Case 1~5 の推定量は $\frac{1}{n}$ のオーダーの分散に対して定数の偏りをもつので、その偏りの大きさ、大小関係について調べよう。

$$\xi_n(a, b; r) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \Delta_a(Y(t)) \Delta_b(Y(t+h) - rY(t)) \quad \text{推定関数}$$

$$\begin{aligned} M(a, b; r) &= E\{\Delta_a(Y(t)) \Delta_b(Y(t+h) - rY(t))\} \quad \text{推定関数の} \\ &\quad \text{平均値} \\ &= (1-\delta)^2 E\{\Delta_a(X(t)) \Delta_b(X(t+h) - rX(t))\} \\ &\quad + (1-\delta)\delta E\{\Delta_a(X(t)) \Delta_b(X(t+h) + Z(t+h) - rX(t))\} \\ &\quad + \delta(1-\delta) E\{\Delta_a(X(t) + Z(t)) \Delta_b(X(t+h) - r(X(t) + Z(t)))\} \\ &\quad + \delta E\{\Delta_a(X(t) + Z(t)) \Delta_b(X(t+h) + Z(t+h) - r(X(t) + Z(t)))\} \\ &\equiv (1-\delta)^2 M_1(a, b; r) \\ &\quad + (1-\delta)\delta M_2(a, b; r) \\ &\quad + \delta(1-\delta) M_3(a, b; r) \\ &\quad + \delta M_4(a, b; r) \quad \text{と表す。} \end{aligned}$$

$$\hat{p}(a, b) : \text{解} \quad \xi_n(a, b; \hat{p}(a, b)) = 0$$

$$\rho(a, b) : \text{解} \quad M(a, b; \rho(a, b)) = 0$$

$$\rho_x = \rho_x(h) = \text{Cor}(X(t), X(t+h)), \quad \rho_Y = \rho_Y(h) = \text{Cor}(Y(t), Y(t+h))$$

$$\tilde{M}(\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{r}) = M(\tilde{a}\sigma_0, \tilde{b}\sigma_0; \rho_x \tilde{r}) / (\rho_x \sigma_0^2)$$

$$\tilde{M}_i(\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{r}) = M_i(\tilde{a}\sigma_0, \tilde{b}\sigma_0; \rho_x \tilde{r}) / (\rho_x \sigma_0^2)$$

$$\tilde{p}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \rho(\tilde{a}\sigma_0, \tilde{b}\sigma_0) / \rho_x, \quad \tilde{\rho}_x = 1, \quad \tilde{\rho}_Y = \rho_Y / \rho_x \quad \text{と表すとき}$$

$\tilde{M}(\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{r}), \tilde{M}_i(\tilde{a}, \tilde{b}; \tilde{r})$ は $\tilde{r}$ の単調減少関数であり、

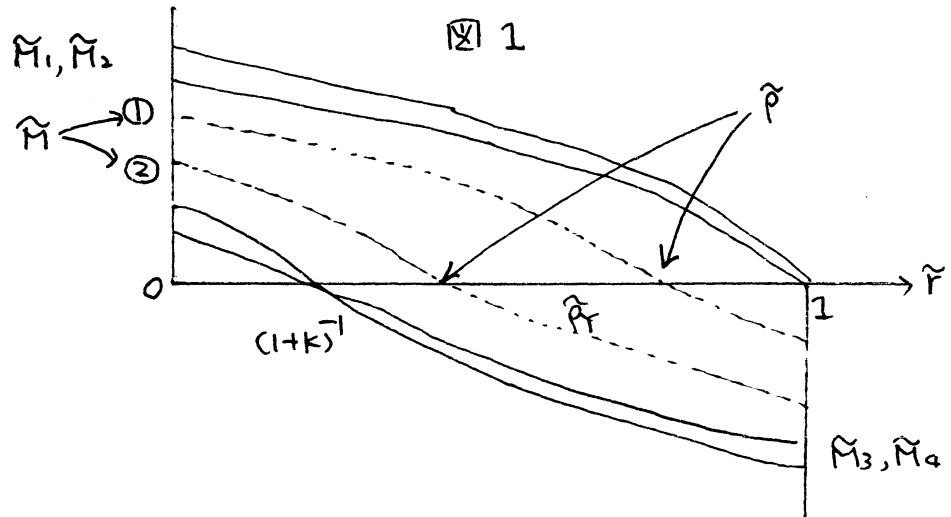
$$\tilde{M}_1(\tilde{\alpha}, \tilde{b}; 1) = \tilde{M}_2(\tilde{\alpha}, \tilde{b}; 1) = 0$$

$$\tilde{M}_1(\tilde{\alpha}, \tilde{b}; \tilde{r}), \tilde{M}_2(\tilde{\alpha}, \tilde{b}; \tilde{r}) > 0 \quad \forall 0 \leq \tilde{r} < 1$$

$$\tilde{M}_3(\tilde{\alpha}, \tilde{b}; (1+k)^{-1}) = \tilde{M}_4(\tilde{\alpha}, \tilde{b}; (1+k)^{-1}) = 0$$

$$\tilde{M}_3(\tilde{\alpha}, \tilde{b}; \tilde{r}), \tilde{M}_4(\tilde{\alpha}, \tilde{b}; \tilde{r}) < 0 \quad \forall \tilde{r} > (1+k)^{-1}$$

が $\tilde{\alpha}, \tilde{b}$ に無関係に成立する。 $\tilde{M}$ は $\tilde{M}_i$ の convex combination であり, $\hat{p}(\tilde{\alpha}, \tilde{b})$ は $\tilde{M}(\tilde{\alpha}, \tilde{b}; \tilde{r}) = 0$ の解で $\hat{p}_T = \hat{p}(\infty, \infty)$ は $\tilde{M}(\infty, \infty; \tilde{r}) = 0$ の解であるから図1を得る。したがって、



$\tilde{M}(\tilde{\alpha}, \tilde{b}; \hat{p}_T) > 0$ (①の場合) のとき、 $\hat{p}(\tilde{\alpha}, \tilde{b})$ は通常の推定量の $\hat{p}_T$ より偏りが少ない。

$\tilde{M}(\tilde{\alpha}, \tilde{b}; \hat{p}_T) < 0$ (②の場合) のとき $\hat{p}(\tilde{\alpha}, \tilde{b})$ は通常の推定量の $\hat{p}_T$ より偏りが大きい。

$$\text{I } \tilde{M}(\tilde{\alpha}, \infty; \hat{p}_T) > 0 \quad \text{for } \forall \tilde{\alpha}, \forall \tilde{b}$$

$$\text{II } \tilde{M}(\infty, \tilde{b}; \hat{p}_T) > 0 \quad \text{for } \forall \tilde{\alpha}, (\text{大半の } \tilde{b})$$

が成立し、打ち切りにより偏りは小さくなる。

表 3 漸近的偏りの比較

モデル $Y(t) = X(t) + \delta(t)Z(t)$, $\rho = \text{Cor}(X(t+h), X(t)) = 0.8$, $\delta = P(\delta(t)=1) = 0.01$, $\sigma_0 = 2$

$\hat{a} = a/\sqrt{\text{VAR}(t+h)}$, $\hat{b} = b/\sqrt{\text{VAR}(t+h)}$, $\sigma^2 = X(t)$ の分散, $\sigma_0^2 = Z(t)$ の分散

推定法	$P(a,b)/p$	推定法	$P(a,b)/p$	推定法	$P(a,b)/p$
$\hat{a}=0$ $\hat{b}=0$	0.991	$\hat{a}=3$ $\hat{b}=3$	0.968	$\hat{a}=2$ $\hat{b}=\infty$	0.974
$\hat{a}=1$ $\hat{b}=1$	0.987	$\hat{a}=0$ $\hat{b}=\infty$	0.982	$\hat{a}=3$ $\hat{b}=\infty$	0.968
$\hat{a}=2$ $\hat{b}=2$	0.977	$\hat{a}=1$ $\hat{b}=\infty$	0.980	$\hat{a}=\infty$ $\hat{b}=\infty$	0.961

表 4 数値実験による平均分散 MSE の比較

モデル $Y(t) = X(t) + \delta(t)Z(t)$, $X(t) \sim$ 正規 ARMA(1,1): $X(t) = 0.9X(t-1) + \epsilon(t) - 0.3\epsilon(t-1)$

$\rho(1) = 0.796$ の推定 ($n=100$) を 1000 回, $\delta = P(\delta(t)=1)$, $\sigma^2 = X(t)$ の分散 $\sigma_0^2 = Z(t)$ の分散

$r_1 = \{ \text{推定値の分散} \} / \{ \text{通常の推定値の分散} \}$: 分散の比

$r_2 = \{ \text{推定値の MSE} \} / \{ \text{通常の推定値の MSE} \}$: MSE の比

推定法	平均	r_1	r_2
$\delta=0$ $a=1.5\sigma_0$ $b=\infty$	(通常の推定値 0.76) 0.77	1.08	1.05
$a=1.5\sigma_0$ $b=1.5\sigma_0\sqrt{1-\rho^2}$	0.78	1.13	1.11
$\delta=0.01$ $\sigma/\sigma_0=1$ $a=1.5\sigma_0$ $b=\infty$	(通常の推定値 0.76) 0.77	1.05	0.99
$a=1.5\sigma_0$ $b=1.5\sigma_0\sqrt{1-\rho^2}$	0.77	1.06	1.00
$a=0$ $b=0$	0.77	1.99	1.81
$\delta=0.01$ $\sigma/\sigma_0=2$ $a=1.5\sigma_0$ $b=\infty$	(通常の推定値 0.74) 0.75	0.88	0.79
$a=1.5\sigma_0$ $b=1.5\sigma_0\sqrt{1-\rho^2}$	0.76	0.77	0.67
$a=0$ $b=0$	0.77	1.46	1.18

AOモデルの下での Case 1~5 の推定量の漸近的偏りに関する数値例を表3で示し、有限標本での偏り、分散、MSEに関する数値例を表4で示す。

また、AOモデルの下での漸近的偏りに関し

$$\rho(\infty, \infty) = \rho_x / (1+k\delta)$$

$$\rho(a, \infty) = \rho_x \cdot \left\{ (1-\delta) \left(\Phi(q/\sigma_0) - \frac{1}{2} \right) + \delta \left(\Phi(q/\sqrt{1+k}\sigma_0) - \frac{1}{2} \right) \right\} /$$

$$\left\{ (1-\delta) \left(\Phi(q/\sigma_0) - \frac{1}{2} \right) + \delta(1+k) \left(\Phi(q/\sqrt{1+k}\sigma_0) - \frac{1}{2} \right) \right\}$$

$$\rho(0, \infty) = \rho_x \left\{ (1-\delta)\sqrt{1+k} + \delta \right\} / \left\{ (1-\delta)\sqrt{1+k} + \delta(1+k) \right\}$$

が成立する。

§5 破壊点 (Breakdown point)

AOモデルにおける自己相関係数の推定量 $\hat{\rho}$ の破壊点を

$k(\delta)$ を $\pm 1, 0$ を含まない compact set とするとき

$$\delta^* = \sup \{ \delta_0 \leq 1 ; \delta \leq \delta_0 \Rightarrow P \{ \hat{\rho} \in k(\delta) \} \rightarrow 1 \text{ as } n \rightarrow \infty \}$$

で定義する。すなわち、汚染度 δ が δ^* 内であれば推定値は境界点にいかる。すなわち、破壊されない。

$\hat{\rho}(\infty, \infty)$, $\hat{\rho}(a, \infty)$, $\hat{\rho}(\infty, b)$ の破壊点は 0

$\hat{\rho}(0, 0)$ の破壊点は

$$\delta^* = |E\{\text{sgn}(X(0))\text{sgn}(X(h))\}| / \{1 + |E\{\text{sgn}(X(0))\text{sgn}(X(h))\}|\}$$

$\hat{\rho}(a, b)$ の破壊点は

$$\delta^* = |E\{A_a(X(0))A_b(X(h))\}| / \{ab + |E\{A_a(X(0))A_b(X(h))\}|\}.$$

参考文献

- [1] Denby, L. and Martin, R. D. (1979). Robust estimation of the first-order autoregressive parameter. *J. Amer. Statist. Ass.*, 74, 140-146.
- [2] Fuller, W. A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [3] Hampel, F. R. (1971). A general qualitative definition of robustness. *Ann. Math. Statist.*, 42, 1887-1896.
- [4] Huber, P. J. (1964). Robust estimation of a location parameter. *Ann. Math. Statist.*, 35, 73-101.
- [5] Huzii, M. (1962). On a simplified method of the estimation of the correlogram for a stationary Gaussian process. *Ann. Inst. Stat. Math.*, 14, 259-268.
- [6] Huzii, M. (1966). On a simplified method of the estimation of the correlogram for a stationary Gaussian process, III. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 18, 195-211.
- [7] Huzii, M. (1970). On the variance of a simplified estimate of correlogram. *Ann. Inst. Stat. Math.*, 22, 527-534.
- [8] Inagaki, N. and Kondo, M. (1980). Several estimators of the autocorrelation based on limiter estimating functions for a stationary Gaussian process. *Journ. Japan Statist. Soc.*, 10, 1-15.
- [9] Iwase, K. (1976). On a property of a simplified estimator of correlogram. *Rep. Stat. Appl. Res.*, JUSE, 23, 117-125.
- [10] Kleiner, B., Martin, R. D. and Thomson, D. J. (1979). Robust estimation of power spectra. *J. R. Statist. Soc. B*, 41, 313-351.
- [11] Martin, R. D. (1979). Robust estimation for time series. In *Robustness in Statistics* (R. L. Launer and G. N. Wilkinson, eds). New York: Academic Press.
- [12] Tukey, J. W. (1960). A survey of sampling from contaminated distributions. In: *Contributions to Probability and Statistics* (I. Olkin, ed). Stanford, Ca: Stanford University Press.