

ある種の 4 階 Fuchs 型常微分方程式系の
monodromy 群と既約性条件について

佐々井 崇雄 (都立大・理)

次の 4 階 system を考える。

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[t I - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \\ & & & \lambda_4 \end{pmatrix} \right] \frac{dx}{dt} = A x \\ \\ I \text{ は 4 次の単位行列。 } \lambda_1 = \lambda_2, A = (a_{ij}) \text{ は } 4 \times 4 \\ \text{定数行列。 } x \text{ は 4 次のベクトル。更に以下の仮定を} \\ \text{設ける。} \\ \\ (A-1). |A - \rho I| = (\rho_1 - \rho)^2 (\rho_2 - \rho)^2 \text{ かつ } A \text{ は対角化可能。} \\ \\ (A-2). a_{ii}, a_{jj} - a_{kk} (j \neq k), \rho_1, \rho_1 - \rho_2 \\ \text{は整数でない。従って、解は } \log \text{ を含まない。} \end{array} \right.$$

この方程式は Riemann 球上、4 つの確定特異点 $t = \lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \infty$ をもつ Fuchs 型方程式で、各点での特性指数は

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \lambda_1 = \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \infty \\ a_{11} & 0 & 0 & \rho_1 \\ a_{22} & 0 & 0 & \rho_1 \\ 0 & a_{33} & 0 & \rho_2 \\ 0 & 0 & a_{44} & \rho_2 \end{array} \right\}$$

である。又、Fuchs の関係式は

Prop. 1. $\sum_{j=1}^4 a_{jj} = 2(\rho_1 + \rho_2), \quad e_j = \exp(2\pi i a_{jj}).$
 $f_j = \exp(2\pi i \rho_j)$ とかくと、この式は又、

$$\prod_{j=1}^4 e_j = (f_1 f_2)^2.$$

とも書ける。

Proof. 單なる、 A の trace の不変性、である。

Prop. 2. B を不変にする最も一般的な行列 T ($TBT^{-1} = B$) は、 $\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ (ここに、 T_1 は 2×2 non-singular constant matrix, T_2 は 2×2 non-singular constant diagonal matrix) で表わされる。

Prop. 3. この T を適当に選べば、 A の成分のうち $a_{12} = a_{21} = 0$, 残りのうち 0 でないもの 3 つは、任意の値を

とすることが出来る。

これによつて、(井)を考える時 $a_{12} = a_{21} = 0$ の場合を考えれば良いことがわかった。以下では系(井)が *accessary parameter* を持たない事を示す。

Prop. 4. 仮に a_{4j} ($j=1, 2, 3$) は non-zero とする。その時、 a_{kl} ($k \neq l$) は対角要素 a_{ii} , 固有値 ρ_m そして a_{4j} と用いて次のように表わされる。

$$(1) \quad a_{13} = \frac{(a_{11} - \rho_1)(a_{11} - \rho_2)}{a_{11} - a_{22}} \cdot \frac{a_{43}}{a_{41}}$$

$$(2) \quad a_{14} = \frac{(a_{11} - \rho_1)(a_{11} - \rho_2)}{a_{22} - a_{11}} \cdot (a_{11} + a_{33} - \rho_1 - \rho_2) \cdot \frac{1}{a_{41}}$$

$$(3) \quad a_{23} = \frac{(a_{22} - \rho_1)(a_{22} - \rho_2)}{a_{22} - a_{11}} \cdot \frac{a_{43}}{a_{42}}$$

$$(4) \quad a_{24} = \frac{(a_{22} - \rho_1)(a_{22} - \rho_2)}{a_{11} - a_{22}} \cdot (a_{22} + a_{33} - \rho_1 - \rho_2) \cdot \frac{1}{a_{42}}$$

$$(5) \quad a_{31} = (a_{22} + a_{33} - \rho_1 - \rho_2) \cdot \frac{a_{41}}{a_{43}}$$

$$(6) \quad a_{32} = (a_{11} + a_{33} - \rho_1 - \rho_2) \cdot \frac{a_{42}}{a_{43}}$$

$$(7) \quad a_{34} = (a_{11} + a_{33} - p_1 - p_2)(a_{22} + a_{33} - p_1 - p_2) \cdot \frac{1}{a_{43}}.$$

Proof. まず $(A-I)$ によって $\text{rank}(A - p_j I) = 2$ ($j=1, 2$) である。従って $A - p_j I$ の 16 個の 3 次小行列式は全て 0 である。これは λ は ρ ではない。この事から p_1, p_2 を共通根としてもつ。4 個の 2 次方程式 (ρ に関する) を得る。

$$(i) \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} - \rho & 0 & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = 0.$$

$$(ii) \quad \det \begin{bmatrix} 0 & a_{22} - \rho & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \rho \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = 0.$$

$$(iii) \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} - \rho & 0 & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} - \rho \end{bmatrix} = 0.$$

$$(iv) \quad \det \begin{bmatrix} 0 & a_{22} - \rho & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} - \rho \end{bmatrix} = 0.$$

これに根と係数の関係を適用し、Prop. 1 に注意しながら計算することで、所要の関係式 7 つを得る。

Theorem 5. (井) は accessory parameter を持たぬ。

Proof. 特性指数 a_{ii}, p_j を与えて、 A が定まるかという事だが、まず、 $a_{12}=a_{21}=0$. 対角要素は指数そのものであり、3 つは任意の値を指定できる。残り 7 つは Prop. 4 で定まる。これは勿論 $a_{4k} \neq 0$ ($k=1,2,3$) の場合だが、そのうち少なくとも一つが 0 の時も、定める方法は Prop. 4 と同じである。

ここで、接続問題に於ける大切な公式を述べておく。これは大久保氏 [1] によって、より一般的な case に於いて証明されたもので、古典的な超幾何方程式論で登場する Gauss の公式の一般化である。

Theorem 6. (Gauss-大久保の公式) 系 (井) は 4 つの有限な特異点 $\tau=\lambda_1 (= \lambda_2), \lambda_3, \lambda_4$ に於いて定義され、それぞれの特異指数 a_{jj} と、初めの係数に対する正規化条件 $g_j(0) = \varepsilon_j$ (ただし、 ε_j は 4-vector で、 j 番目の成分のみ 1、他は全て 0 のもの) に対応する、4 つの unique singular solution $X_j(t)$ ($j=1,2,3,4$) をもつ。

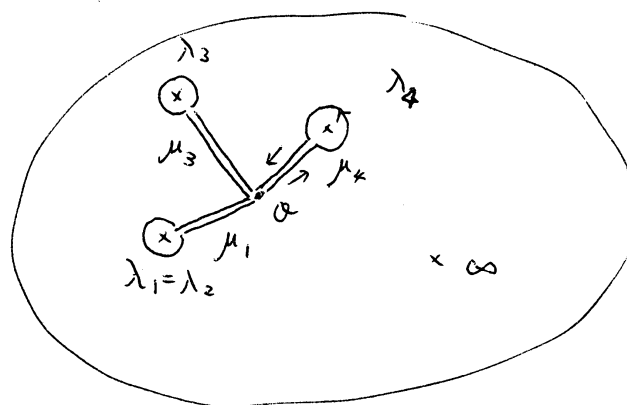
$$X_j(t) = (t - \lambda_j)^{a_{jj}} \sum_{m=0}^{\infty} g_j(m) (t - \lambda_j)^m.$$

更に $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4, \infty\}$ の任意の単連結領域に於いて、
それらの Wronskian は

$$\det X = \frac{\prod_{j=1}^4 [(t - \lambda_j)^{a_{jj}} \Gamma(a_{jj} + 1)]}{[\Gamma(\rho_1 + 1) \cdot \Gamma(\rho_2 + 1)]^2}$$

となり、これによって4つの解の独立性が解る。

次にこの basis $X = [X_1, X_2, X_3, X_4]$ に関するモノドロミー群について考えよう。まず基本群の base point Q を固定しておく。次に特異点の回りの simple loop を、 λ_j に対応して μ_j とし、更に下図の様になっているものとする。



即ち、 $\mu_j \cdot \mu_k$ を μ_k を先に回り次に μ_j を回るものとした時
上の取り方は $\mu_1 \cdot \mu_3 \cdot \mu_4$ は無限遠点 ∞ を負の向きに一周す

るもの、とする。又、 μ_j に対応する、basis X に関する行列を M_j と書くことにすると、Theorem 6 により

$$M_1 = I + \begin{bmatrix} e_1 - 1 & & 0 \\ & e_2 - 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ 0 & 1 & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \hline & & 0 & \end{bmatrix}.$$

$$M_3 = I + (e_3 - 1) \begin{bmatrix} \hline 0 \hline \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 & \gamma_{34} \\ \hline & 0 & \hline \end{bmatrix}.$$

$$M_4 = I + (e_4 - 1) \begin{bmatrix} \hline 0 \hline \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 \end{bmatrix}.$$

と表わされる事がわかる。従って、モノドロミー群を求めるには、上の γ_{ij} を求めればよい。今、

$$c_{jj} \equiv e_j - 1, \quad c_{jk} \equiv (e_j - 1) \gamma_{jk} \quad (j \neq k)$$

としよう。行列 L_1, L_2 を

$$L_1 = \begin{bmatrix} c_{11} & & & \\ 0 & c_{22} & & \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} & c_{14} \\ & 0 & c_{23} & c_{24} \\ & & 0 & c_{34} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

と定める。勿論、

$$L_1 + L_2 = (M_1 - I) + (M_3 - I) + (M_4 - I).$$

この L_j を使うと、簡単な計算で

Prop. 7. $M_\infty \equiv M_1 \cdot M_3 \cdot M_4 = (I - L_2)^{-1} (I + L_1).$

又、(A-1) より $\det(M_\infty - fI) = (f_1 - f)^2 (f_2 - f)^2$ かつ
 $\text{rank}(M_\infty - f_j I) = 2$ ($j=1, 2$) である。この事と、Prop. 7 より

Prop. 8. f_j は $\det[(L_1 + fL_2) - (f-1)I] = 0$ の重根であり、
 $\text{rank}[(L_1 + f_j L_2) - (f-1)I] = 2$.

この Prop. 8 を用い、Prop. 4 に於ける計算と全く同じ計算を
 することによって、

Theorem 9. 系 (井) のモノドロミー群は、次の 7 つの関係

式によって定まる。

$$\gamma_{13} = \frac{e_2(e_1 - f_1)(e_1 - f_2)}{(e_1 - 1)(e_1 - e_2)f_1 f_2} \cdot \frac{\gamma_{43}}{\gamma_{41}}.$$

$$\gamma_{14} = \frac{(e_1 - f_1)(e_1 - f_2)(e_1 e_3 - f_1 f_2)}{e_1 e_3 (e_1 - 1)(e_4 - 1)(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{\gamma_{41}}.$$

$$\gamma_{23} = \frac{e_1(e_2 - f_1)(e_2 - f_2)}{(e_2 - 1)(e_2 - e_1)f_1 f_2} \cdot \frac{\gamma_{43}}{\gamma_{42}}.$$

$$\gamma_{24} = \frac{(e_2 - f_1)(e_2 - f_2)(e_2 e_3 - f_1 f_2)}{e_2 e_3 (e_2 - 1)(e_4 - 1)(e_1 - e_2)} \cdot \frac{1}{\gamma_{42}}.$$

$$\gamma_{31} = \frac{e_2 e_3 - f_1 f_2}{e_2 (e_3 - 1)} \cdot \frac{\gamma_{41}}{\gamma_{43}}.$$

$$\gamma_{32} = \frac{e_1 e_3 - f_1 f_2}{e_1 (e_3 - 1)} \cdot \frac{\gamma_{42}}{\gamma_{43}}.$$

$$\gamma_{34} = \frac{(e_1 e_3 - f_1 f_2)(f_1 f_2 - e_2 e_3)}{e_1 e_2 e_3 (e_3 - 1)(e_4 - 1)} \cdot \frac{1}{\gamma_{43}}.$$

勿論、行列 A と同様、3つの non-zero constant は値を任意に指定できるので、それを、今の場合は γ_{41} 、 γ_{42} 、 γ_{43} に取っている。

この定理より、次の定理も容易に証明される。

Theorem 10. 次の4つは同値である。

- (a) 系 (H) は irreducible.
- (b) (H) のモノドロミ-群は irreducible.
- (c) M_j の non-trivial components $C_{jk} = (e_j - 1) \delta_{jk}$ は全て 0 でない。
- (d) $f_1 f_2 \neq e_1 e_3, e_2 e_3$, か $f_j \neq e_k$ ($j, k = 1, 2$) .

注意. 系 (H) は Appell の超幾何函数 $F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma; x, y)$ かみたる偏微分方程式系の、一次元の切り口に現われる。

Reference.

- [1] K. Okubo, Connection problems for systems of linear differential equations: Japan-U.S. Seminar on Ordinary and Functional Differential Equations, pp. 238-248. Springer.