

9 段数 7 次陽的 Runge - Kutta 法について

山梨大学 工学部

田中 正次 (Masatsugu Tanaka)

山下 茂 (Shigeru Yamashita)

村松 茂 (Shigeru Muramatsu)

笠原 栄二 (Eiji Kasahara)

1. はじめに

Runge - Kutta 法の研究は、容易に取り扱える低次から次第に解決され、現在は高次埋め込み型公式の研究と相俟ってその銚先は高次に移ってきている。この研究において我々は 9 段数 7 次陽的 Runge - Kutta 法の解系を誘導し、既知公式よりも打ち切り精度と安定性の両面において性能の良い公式を導いた。また、得られた解系が Shanks の公式^[1]を含むものであることから、その周辺における改良の可能性を探ってみた。

2. 9 段数 7 次陽的 Runge - Kutta 法の一般形

常微分方程式の初期値問題

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.1)$$

において、 $x=x_n$ における y の数値解 y_n が得られているとき、 $x=x_{n+1}$ における y の数値解 y_{n+1} を

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^9 c_i k_i$$

$$k_i = h_n f(x_n + a_i h_n, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j) \quad (2.2)$$

$$a_1 = b_{i0} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 9), \quad h_n = x_{n+1} - x_n$$

によって求める方法を9段数陽的Runge-Kutta法という。

a_i, b_{ij}, c_i は公式を特徴づける係数であり、 a_i と b_{ij} の間には

$$a_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \quad (i=2, 3, \dots, 9)$$

が成り立つ。特に、 a_i, b_{ij}, c_i が7次の打ち切り精度を得るように選ばれるときこの方法を9段数7次陽的Runge-Kutta法（以下9段数7次法と略称する）と呼ぶ。

また次のような係数マトリックスによっても表現される。ここでは主にこの表記法を用いる。

0									
a_2	b_{21}								
a_3	b_{31}	b_{32}							
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$							
a_9	b_{91}	b_{92}	$\dots$	b_{98}					
	c_1	c_2	$\dots$	c_8	c_9				

(2.3)

3. Runge-Kutta法の評価の観点

9段数7次法の評価の観点と尺度として

(1) 打ち切り精度に関する性質

打ち切り精度判定基準 (A_{73} , A_{72})

(2) 安定性に関する性質

有効絶対安定領域 S_0 の面積 ($A(S_0)$)絶対安定区間 S_1 の長さ α

(3) 丸め誤差に関する性質

丸め誤差特性判定基準 (R)

を考える。

3.1 打ち切り精度に関する性質

9 段数 7 次法の第 $(n+1)$ のステップにおける局所打ち切り誤差は

$$T_{n+1} = h_n^8 g(x_n, y_n) + O(h_n^9) \quad (3.1.1)$$

と表すことができる。また $g(x_n, y_n)$ は

$$g(x_n, y_n) = \sum_{i=1}^{115} a_{7i} g_i(x_n, y_n) \quad (3.1.2)$$

と表される。 a_{7i} は公式の係数のみの関数、 $g_i(x, y)$ は与えられた微分方程式の右辺の関数系 $f(x, y)$ に依存して決まる関数ベクトルである。

9 段数 7 次法の打ち切り精度判定基準

9 段数 7 次法の打ち切り精度の優劣は、次の数量によって判断する。これを 9 段数 7 次法の打ち切り精度判定基準という。

$$A_{73} = \sum_{i=1}^{115} (a_{7i})^2 \quad (3.1.3)$$

3.2 安定性に関する性質

安定性について考察するとき、次のようなテスト方程式を考える。

$$y' = \lambda y \quad (\lambda \text{ は負の実部をもつ複素定数})$$

これに9段数7次法を適用し、次数条件式を用いて簡単にすると、漸化式

$$y_{n+1} = P_{97}(h_n \lambda, r_8, r_9) y_n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

が得られる。ここで $P_{97}(h_n \lambda, r_8, r_9)$ は次に示すような $h_n \lambda$ に関する9次の多項式である。

$$P_{97}(h_n \lambda, r_9, r_8) = \sum_{i=0}^7 \frac{(h_n \lambda)^i}{i!} + \sum_{i=8}^9 r_i \frac{(h_n \lambda)^i}{i!} \quad (3.2.1)$$

ただし r_8, r_9 は次のような Runge-Kutta 法の係数のみの関数である。

$$r_9 := B_{21} B_{32} B_{43} B_{54} B_{65} B_{76} B_{87} B_{98} C_9$$

$$\begin{aligned} r_8 := & B_{21} B_{32} B_{43} B_{54} B_{65} B_{76} B_{87} C_8 + B_{21} B_{32} B_{43} B_{54} B_{65} B_{76} B_{97} C_9 \\ & + B_{21} B_{32} B_{43} B_{54} B_{65} B_{86} B_{98} C_9 + B_{21} B_{32} B_{43} B_{54} B_{75} B_{87} B_{98} C_9 \\ & + B_{21} B_{32} B_{43} B_{64} B_{76} B_{87} B_{98} C_9 + B_{21} B_{32} B_{53} B_{65} B_{76} B_{87} B_{98} C_9 \\ & + B_{21} B_{42} B_{54} B_{65} B_{76} B_{87} B_{98} C_9 + B_{31} B_{43} B_{54} B_{65} B_{76} B_{87} B_{98} C_9 \\ & + B_{32} B_{43} B_{54} B_{65} B_{76} B_{87} B_{98} C_9 \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

多項式 (3.2.1) を 9 段数 7 次法の安定多項式という。

・絶対安定領域及び有効絶対安定領域

ここで、

$$S(r_8, r_9) = \{h_n \lambda \mid |P_{97}(h_n \lambda, r_8, r_9)| \leq 1,$$

$$h_n \lambda: \text{複素数} \} \quad (3.2.3)$$

によって定義される複素平面上の閉領域 $S(r_8, r_9)$ を 9 段数 7 次法の絶対安定領域という。特に原点を含む単連結な $S(r_8, r_9)$ の部分領域を有効絶対安定領域とよび S_e で表すことにしよう。

・絶対安定区間

有効絶対安定領域と実軸 R との交わり

$$S : (\gamma_8, \gamma_9) = S_e(\gamma_8, \gamma_9) \cap R = [-\alpha(\gamma_8, \gamma_9), 0, 0]$$

$\nwarrow (3.2.4)$

を絶対安定区間という。ここで $\alpha(r_8, r_9)$ は絶対安定区間の長さを表す。

3.3 丸め誤差に関する性質

一般に、Runge-Kutta法において公式を特徴づける係数の絶対値が大きい場合には、絶対値のほぼ等しい符号の異なる係数が存在するので容易に桁落ち現象を引き起こすことが推測される。そこで桁落ち等を含む丸め誤差特性の良否を判定するために、次に示す丸め誤差特性判定基準を使用する。

・ 丸め誤差特性判定基準

$$R = \sum_{i=1}^9 |c_i| + \sum_{i=2}^9 \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| \quad (3.3.1)$$

4. 既知公式

現在文献等で紹介されている 9 段数 7 次法の公式は多々ある（埋め込み型公式として用いられている）が、単独で紹介されている公式は著者の知る限りでは次の二つ〔1〕〔2〕である。

【Shanks】

$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$								
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$							
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$						
$\frac{1}{6}$	$\frac{23}{216}$	0	$\frac{7}{72}$	$\frac{-1}{27}$					
$\frac{8}{9}$	$\frac{-4136}{729}$	0	$\frac{-4528}{243}$	$\frac{5264}{729}$	$\frac{1456}{81}$				
$\frac{1}{9}$	$\frac{8087}{11664}$	0	$\frac{484}{243}$	$\frac{-518}{729}$	$\frac{-658}{351}$	$\frac{7}{624}$			
$\frac{5}{6}$	$\frac{-1217}{2160}$	0	$\frac{-145}{72}$	$\frac{8342}{6615}$	$\frac{361}{195}$	$\frac{3033}{50960}$	$\frac{117}{490}$		
1	$\frac{259}{2768}$	0	$\frac{-84}{173}$	$\frac{-14}{173}$	$\frac{6210}{2249}$	$\frac{-99873}{251888}$	$\frac{-29160}{15743}$	$\frac{2160}{2249}$	
	$\frac{173}{3360}$	0	0	$\frac{1846}{5145}$	$\frac{27}{91}$	$\frac{-19683}{713440}$	$\frac{-19683}{713440}$	$\frac{27}{91}$	$\frac{173}{3360}$

(4.1)

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_i^3 = 1/140, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj} = 1/40, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj} a_i^2 = 1/56, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj}^2 a_i = 1/105$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj}^2 = 1/60, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj}^2 a_i^2 = 1/126, \Sigma c_i b_{ij} a_{aj} = 1/6, \Sigma c_i b_{ij} a_{aj} a_i = 1/8$$

$$\Sigma c_i b_{ij} a_{aj} a_i^2 = 1/10, \Sigma c_i b_{ij} a_{aj} a_i^3 = 1/12, \Sigma c_i b_{ij} a_{aj} a_i^4 = 1/14, \Sigma c_i b_{ij} a_{aj}^3 = 1/20$$

$$\Sigma c_i b_{ij} a_{aj}^3 a_i = 1/24, \Sigma c_i b_{ij} a_{aj}^3 a_i^2 = 1/28, \Sigma c_i b_{ij} a_{aj}^4 = 1/30, \Sigma c_i b_{ij} a_{aj}^4 a_i = 1/35$$

$$\Sigma c_i b_{ij} a_{aj}^5 = 1/42, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{ai} = 1/30, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{ai}^3 = 1/42, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{ai}^2 a_i = 1/72$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{ai}^3 = 1/120, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{ai}^4 = 1/210, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj} a_i = 1/48, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj}^2 a_i = 1/90$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj}^3 a_i = 1/168, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj}^2 a_i^2 = 1/70, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i = 1/120$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i a_i = 1/144, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i^2 = 1/360, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i a_k = 1/240$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_{aj} = 1/180, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i^3 = 1/840, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i a_k^2 = 1/420$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i^2 a_{aj} = 1/504, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj}^3 = 1/84, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} a_i = 1/840$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} a_i = 1/1680, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} a_{aj} = 1/1008, \Sigma c_i b_{ij} b_{ik} a_{aj} a_k = 1/20$$

$$\Sigma c_i b_{ij} a_{aj} b_{ik} a_{ai}^2 = 1/28, \Sigma c_i b_{ij} a_{aj}^2 b_{ik} a_{ai} = 1/42, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj} b_{li} a_i a_i = 1/140$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj} b_{li} a_i a_i = 1/84, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i b_{lm} a_i = 1/504, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj} b_{li} a_i a_{aj} = 1/168$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj}^2 b_{li} a_i = 1/168, \Sigma c_i b_{ij} a_{aj}^3 b_{ik} a_{ai} = 1/56, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj} b_{li} a_i^2 = 1/126$$

$$\Sigma c_i b_{ij} a_{aj} b_{ik} a_{aj} b_{li} a_i = 1/56, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i a_i^2 = 1/168, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i^2 a_i = 1/420$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i a_k a_i = 1/240, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i a_{aj} a_i = 1/210, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i^2 a_k = 1/630$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i a_k a_{aj} = 1/336, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i a_{aj}^2 = 1/252, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} a_i = 1/720$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} a_i^2 = 1/2520, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} a_{aj} a_k = 1/1260, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} b_{lm} b_{mn} a_i = 1/5040$$

$$\Sigma c_i b_{ij} a_{aj} b_{ik} a_{ai} = 1/24, \Sigma c_i b_{ij} a_{aj}^2 b_{ik} a_{ai} = 1/36, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj} b_{li} a_i = 1/120$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj} b_{li} a_i = 1/72, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i b_{lm} a_i = 1/840, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj}^2 b_{li} a_i = 1/252$$

$$\Sigma c_i b_{ij} b_{jk} b_{kl} a_i b_{lm} a_i = 1/84, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj} b_{li} a_i = 1/112, \Sigma c_i b_{ij} b_{jk} a_{aj} b_{li} b_{mn} a_i = 1/252$$

$$\sum c_i b_{ij} a_j^2 b_{ik} a_k^2 = 1/63$$

5.2 次数条件式の簡単化

まず、9段数7次法の85個の次数条件式に Kuttaの仮定^[3]を加えて一次従属な式を消して行く。

ここで、Kuttaの仮定とは

$$(1) \quad \sum_{c=1}^9 c_i b_{ij} = c_j (1 - a_j) \quad (j=1, 2, \dots, 9) \quad (5.2.1)$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^9 b_{ij} a_j = \frac{1}{2} a_i^2 \quad (i=3, 4, \dots, 9) \quad (5.2.2)$$

$$(3) \quad \sum_{j=1}^9 b_{ij} a_j^2 = \frac{1}{3} a_i^3 \quad (i=3, 4, \dots, 9) \quad (5.2.3)$$

$$(4) \quad c_2 = 0 \quad (5.2.4)$$

である。この仮定を加えることにより85個の次数条件式は28個になる。さらに次の仮定

$$\begin{aligned} c_3 &= 0 & b_{i2} &= 0 \quad (i=4, \dots, 9) \\ \sum_{i=1}^9 c_i a_i b_{i2} &= 0 & \sum_{i=1}^9 c_i a_i b_{i3} &= 0 & \sum_{i,j=1}^9 c_i a_i b_{ij} b_{i2} &= 0 \\ \sum_{i,j=1}^9 c_i a_i b_{i3} &= 0 & \sum_{i=1}^9 c_i a_i^2 b_{i2} &= 0 & \sum_{i=1}^9 c_i a_i^2 b_{i3} &= 0 \quad (5.2.5) \\ \sum_{i,j,k=1}^9 c_i b_{ij} b_{jk} a_k b_{i2} &= 0 & \sum_{i=1}^9 c_i a_i^3 b_{i2} &= 0 \end{aligned}$$

を加えることにより、解系は4つの自由パラメータ (a_4, a_5, a_7, a_8) について解くことができる。解系の詳しい誘導は紙面の都合で省略

する。なお、この解系はShanksの公式を含むものであることを指摘しておこう。

6. 9 段数 7 次法の解系の特性と公式の提案

今回得られた解系はShanksの公式を含むものであるから、4つの自由パラメータのうち、Shanksの公式の自由パラメータの値を2つ用い、他の2つの自由パラメータをShanksの公式を含む有意義な範囲で変動させることによって打ち切り精度判定基準 A_{73} と有効絶対安定領域の面積 $A(S_0)$ との相互関係を示す特性図を得た。尚、この特性図は定義できない（分母が0になる）点を含んでいることを付け加えておく。また安定性の性質についてそれぞれ下に示すような特徴を持っている。

安定性に関する性質

図 6.1 : a_4, a_7 を固定した場合	→	a_5 の値に支配される
図 6.2 : a_4, a_8 を固定した場合	→	a_5 の値に支配される
図 6.3 : a_5, a_7 を固定した場合	→	a_4 の値に支配される
図 6.4 : a_5, a_8 を固定した場合	→	a_4 の値に支配される
図 6.5 : a_7, a_8 を固定した場合	→	a の値には支配されない
図 6.6 : a_4, a_5 を固定した場合	→	一意的に定まる

また、打ち切り精度に関する等高線図では、判定基準の逆数の常用

対数をとって高さを示した。

$$\text{高さ} = -\text{LOG}_{10}(A_{73})$$

図 6.1～6.6 より、Shanks の公式より性能のよいものがあることが観察される。また、図 6.7 は r_8 を横軸に r_9 を縦軸に取って変動させたときの、9 段数 7 次法の有効絶対安定領域の面積を示したものである。

以上の特性図から、好ましいと思われる 4 つの公式を導いた（図中にプロットした点がそれである）。またこれらの特性図とは別に、打ち切り精度判定基準 A_{73} について最適化した公式をあげる。既知公式と以上の公式の特性値を表 6-8 にしめす。

表 6-8 公式の特性値

	A_{72}	A_{73}	$A(S_0)$	α	R
Shanks	0.1493454e-2	0.1678949e-6	25.60985	4.4731	0.6976e+2
Butcher	0.4664776e-2	0.7481319e-6	10.91974	2.6662	0.2183e+2
公式 1	0.1199154e-3	0.3516996e-9	32.91478	4.6143	0.1836e+3
公式 2	0.1228094e-2	0.4907179e-7	25.60984	4.4731	0.6209e+3
公式 3	0.8879972e-3	0.1815084e-7	39.57171	6.2739	0.1462e+4
公式 4	0.6521972e-3	0.1433240e-7	27.64396	4.2166	0.4844e+3
公式 5	0.2489427e-2	0.1549519e-6	51.52572	7.1767	0.1208e+4

新しく得られた公式の中で、打ち切り精度が最良な「公式 1」と絶対安定領域の面積が最大な「公式 5」を次に示す。

【公式1】

<u>1607</u>	<u>1607</u>								
<u>22500</u>	<u>22500</u>								
<u>1607</u>	<u>1607</u>	<u>1607</u>							
<u>15000</u>	<u>60000</u>	<u>20000</u>							
<u>1607</u>	<u>1607</u>		<u>482</u>						
<u>10000</u>	<u>40000</u>	0	<u>40000</u>						
<u>891</u>	<u>105347</u>	0	<u>-62227</u>	<u>103151</u>					
<u>2000</u>	<u>171682</u>		<u>26402</u>	<u>47127</u>					
<u>232685</u>	<u>-100684</u>	0	<u>402355</u>	<u>-98251</u>	<u>83108</u>				
<u>405743</u>	<u>63133</u>		<u>61586</u>	<u>19858</u>	<u>142619</u>				
<u>1729</u>	<u>242909</u>	0	<u>-636563</u>	<u>178797</u>	<u>-214892</u>	<u>117431</u>			
<u>2000</u>	<u>76322</u>		<u>47803</u>	<u>15644</u>	<u>130481</u>	<u>96571</u>			
<u>9117</u>	<u>171085</u>	0	<u>-337950</u>	<u>4670683</u>	<u>-252985</u>	<u>132063</u>	<u>-28236</u>		
<u>10000</u>	<u>21468</u>		<u>9827</u>	<u>158093</u>	<u>48354</u>	<u>41411</u>	<u>167377</u>		
<u>1</u>	<u>298330</u>	0	<u>-323280</u>	<u>205549</u>	<u>-134624</u>	<u>166030</u>	<u>57731</u>	<u>-48405</u>	
	<u>63001</u>		<u>15151</u>	<u>10839</u>	<u>34933</u>	<u>70309</u>	<u>152946</u>	<u>195919</u>	
	<u>22269</u>	0	0	<u>31273</u>	<u>37352</u>	<u>60107</u>	<u>52930</u>	<u>-28693</u>	<u>17788</u>
	<u>482359</u>			<u>122895</u>	<u>161277</u>	<u>359313</u>	<u>125631</u>	<u>152592</u>	<u>264689</u>

7. 数値実験

次の4つの初期値問題について数値実験を行い、その結果を第一ステップの誤差、最終ステップの誤差、最大誤差で評価する。

数値実験に使用した単一系初期値問題（下段は理論解）

単一系微分方程式の初期値問題とその理論解		
NO. 1	$y' = -y$ $y = e^{-x}$	$y(0) = 1$
NO. 2	$y' = (x+1)^{(5/2)} + 2y/(x+1)$ $y = 2(x+1)^{(7/2)}/3$	$y(0) = 2/3$
NO. 3	$y' = 2\sqrt{y-1}/x$ $y = (\log_e(x) + 2)^2 + 1$	$y(1) = 5$
NO. 4	$y' = -x^2 * y^2/3$ $y = 9/(x^3 + 1)$	$y(2) = 1$

刻み幅 0.1 ステップ数 50

	問題1			問題2		
	first-step	last-step	maximum	first-step	last-step	maximum
Shanks	0.225084d-12	0.838088d-13	0.915108d-12	0.555104d-09	0.416987d-07	0.416987d-07
Butcher	0.308147d-11	0.114733d-11	0.125283d-10	0.218343d-08	0.164516d-06	0.164516d-06
公式1	0.310862d-14	0.115359d-14	0.126427d-13	0.104641d-10	0.795978d-09	0.795978d-09
公式5	0.472677d-13	0.176026d-13	0.192159d-12	0.350753d-10	0.260133d-08	0.260133d-08

	問題3			問題4		
	first-step	last-step	maximum	first-step	last-step	maximum
Shanks	0.840328d-12	0.311928d-11	0.311928d-11	0.264968d-09	0.184801d-11	0.431276d-09
Butcher	0.298672d-11	0.121274d-10	0.121274d-10	0.174554d-08	0.111113d-10	0.275916d-08
公式1	0.205058d-12	0.567102d-12	0.567102d-12	0.617377d-11	0.254128d-13	0.886430d-11
公式5	0.928591d-11	0.238904d-10	0.238904d-10	0.252594d-10	0.272200d-13	0.325968d-10

刻み幅 0.05 ステップ数 50

	問題 1			問題 2		
	first-step	last-step	maximum	first-step	last-step	maximum
Shanks	0.902056d-15	0.385456d-14	0.686950d-14	0.257319d-11	0.123360d-09	0.123360d-09
Butcher	0.119627d-13	0.515993d-13	0.924538d-13	0.102461d-10	0.492060d-09	0.492060d-09
公式 1	0.138778d-16	0.589806d-16	0.166533d-15	0.510286d-13	0.243006d-11	0.243006d-11
公式 5	0.194289d-15	0.843076d-15	0.146411d-14	0.154321d-12	0.732125d-11	0.732125d-11

	問題 3			問題 4		
	first-step	last-step	maximum	first-step	last-step	maximum
Shanks	0.421885d-14	0.246470d-13	0.246470d-13	0.723227d-12	0.127471d-12	0.208927d-11
Butcher	0.139888d-13	0.881517d-13	0.881517d-13	0.595184d-11	0.900453d-12	0.161129d-10
公式 1	0.111022d-14	0.599520d-14	0.599520d-14	0.244110d-13	0.221351d-14	0.572459d-13
公式 5	0.438538d-13	0.150546d-12	0.150546d-12	0.104597d-12	0.245810d-14	0.215203d-12

以上の数値例は、表 6-8 の特性値の値をよく反映している。

8. まとめ

今回の研究で 9 段数 7 次法の特性の一端を見ることができ、既知公式よりも性能のよいものが存在する可能性を示すことができたと思う。また「公式 1」は、打ち切り精度に関する性質について既知公式よりもかなり優れており、安定性の面でも優っていることから、非常に有効な公式であると思われる。また「公式 5」は、打ち切り精度に関する性質についてはさほど変化なく、有効絶対安定領域の面積が非常に大きい（ほぼ最大）の公式であり、弱 stiff の問題の解法にも有効であると思われる。この公式は丸め誤差に関する短所を

持つが、間もなくこの点についてより好ましい公式が見いだされるであろう。

いずれにせよまだ解明されていない点が多く、公式の改良も今後に待たねばならないが、引続き様々な角度からより精力的にこの方法の可能性を追求していきたいと思う。

参考文献

- [1] Shanks, E. B.: Solution of Differential Equations by
Evaluations of Functions, Mathematics of Computation,
Vol. XX, No. 93 (1966)
- [2] Butcher, J. C.: The Numerical Analysis of Ordinary
Differential Equations, Jhon Wiley & Sons (1986)
- [3] Kutta, W.: Beitrage zur naherungsweise Integration
Totaler Differentialgleichungen, Z. Math. Phys., Vol. 46,
pp. 435-453 (1901)

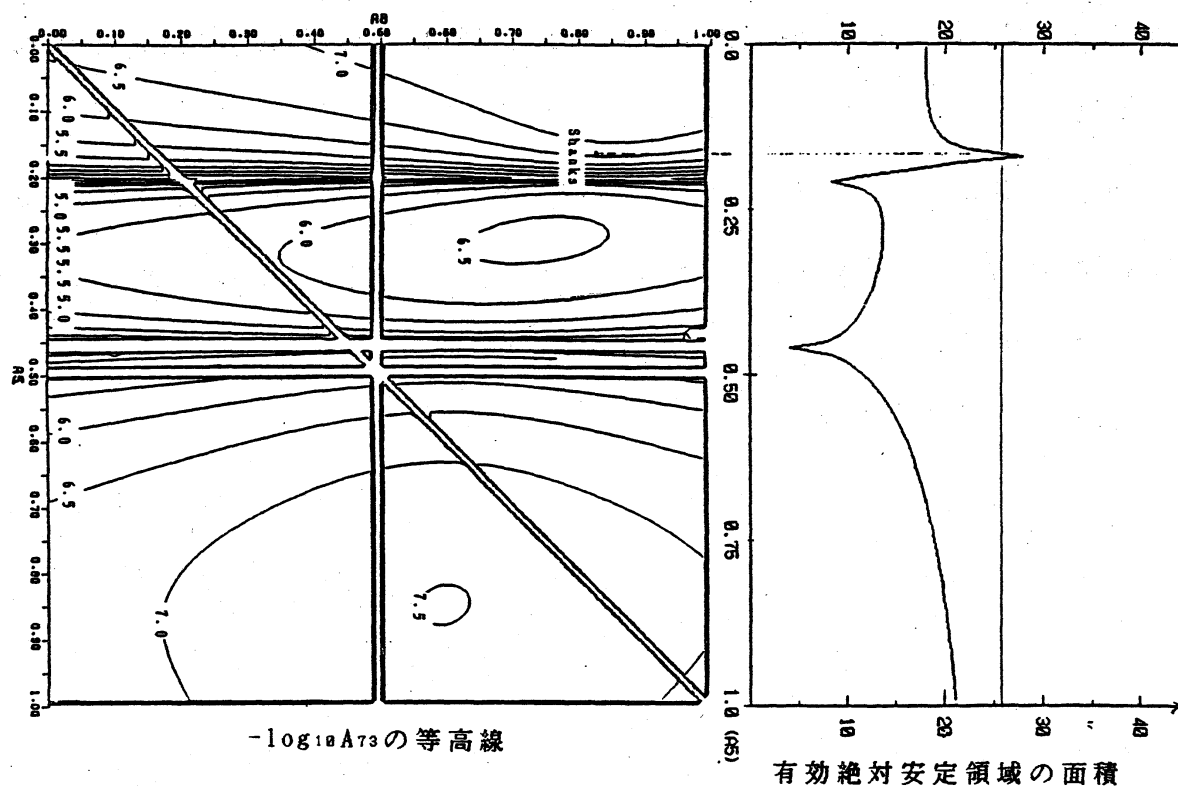
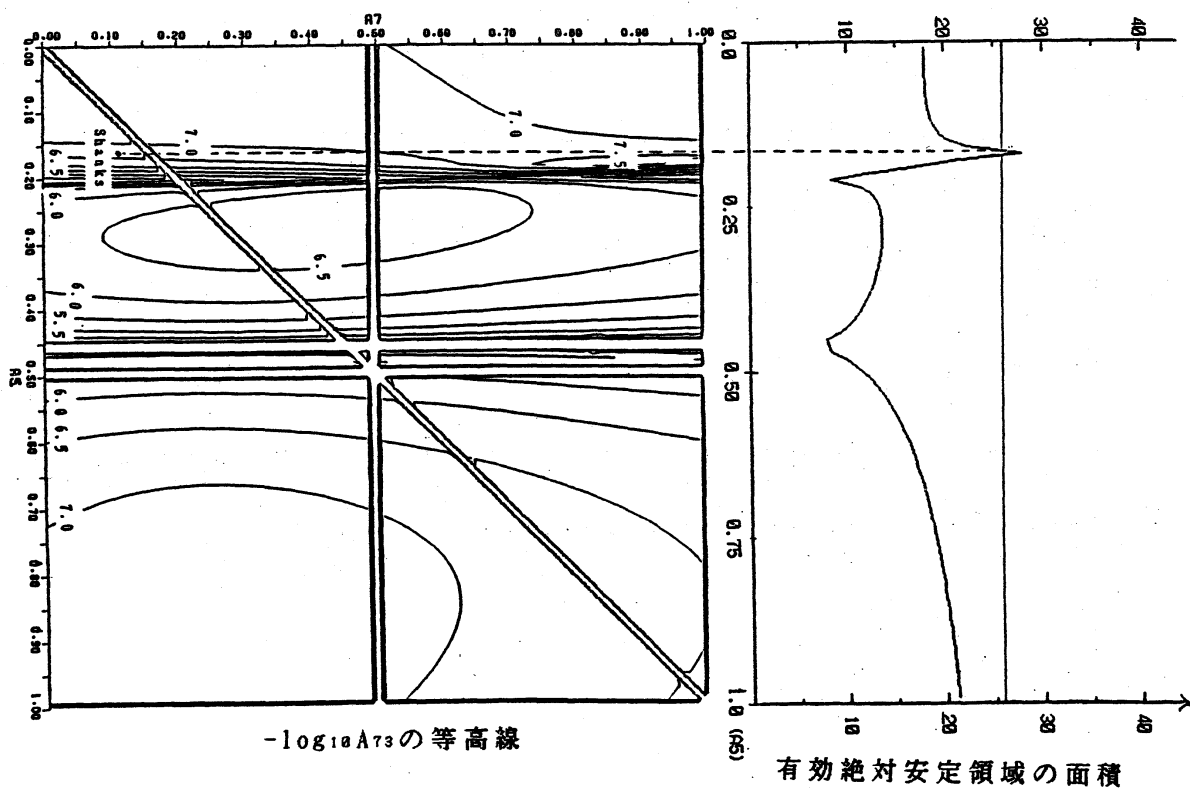
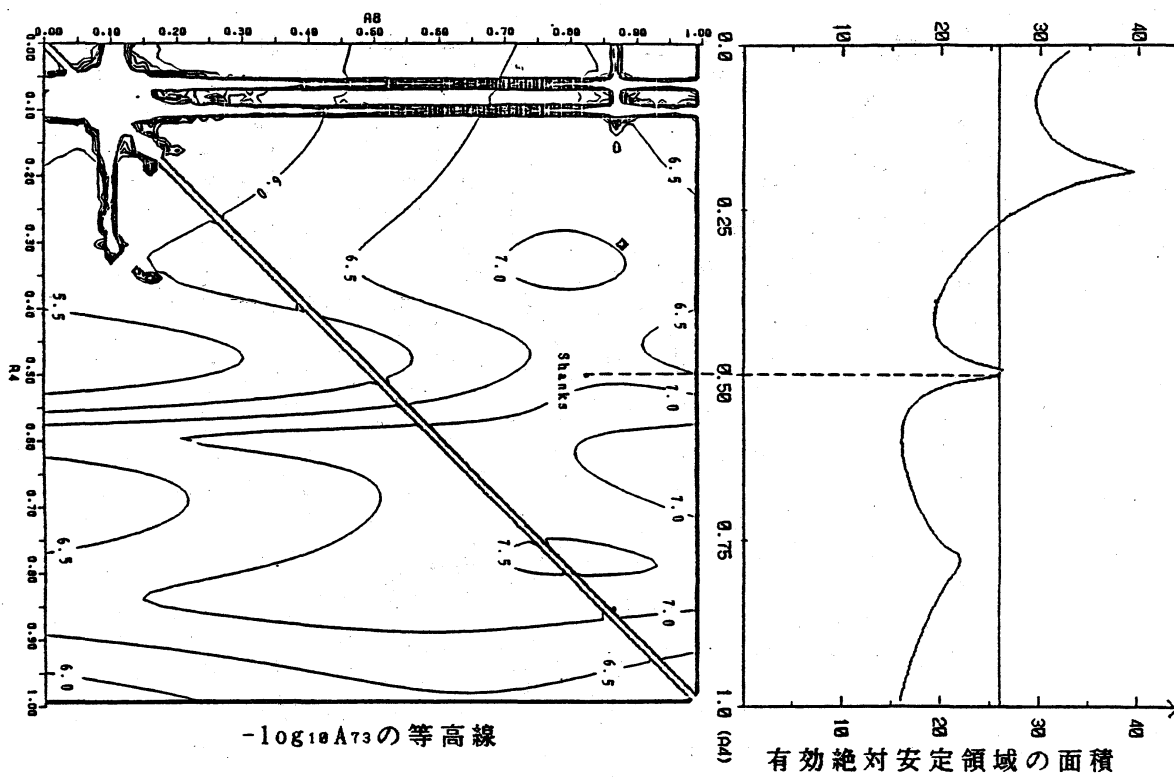
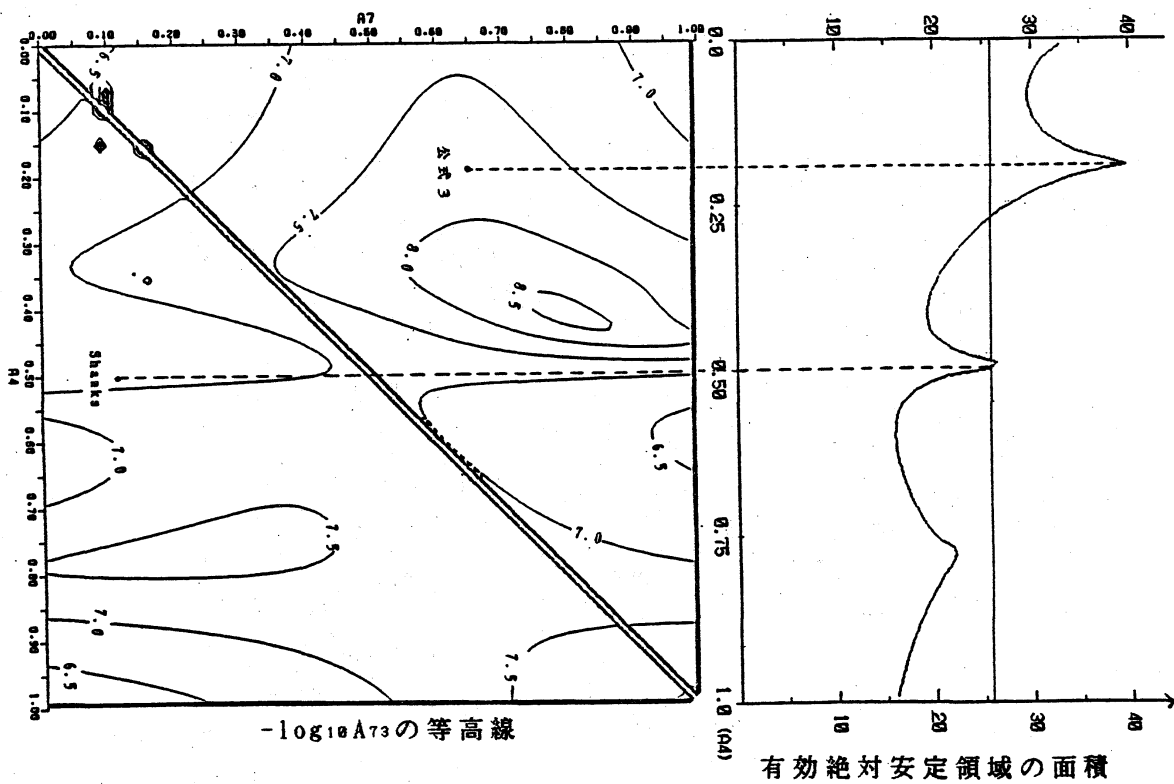
図6.1 a^4, a^7 を固定したときの特性図図6.2 a^4, a^8 を固定したときの特性図

図6.3 a_5, a_7 を固定したときの特性図図6.4 a_5, a_8 を固定したときの特性図

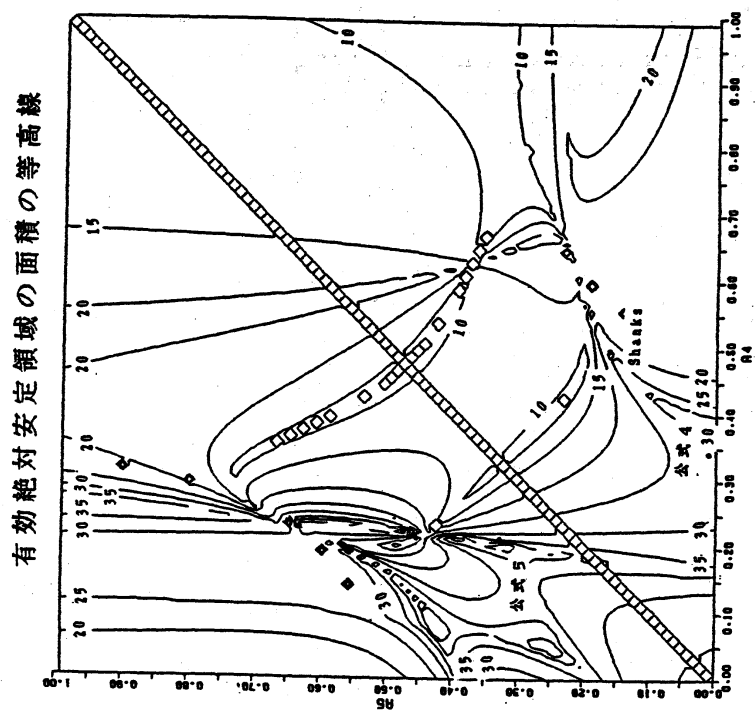


図6.5.2 a_7, a_8 を固定したときの安定性に関する特性図

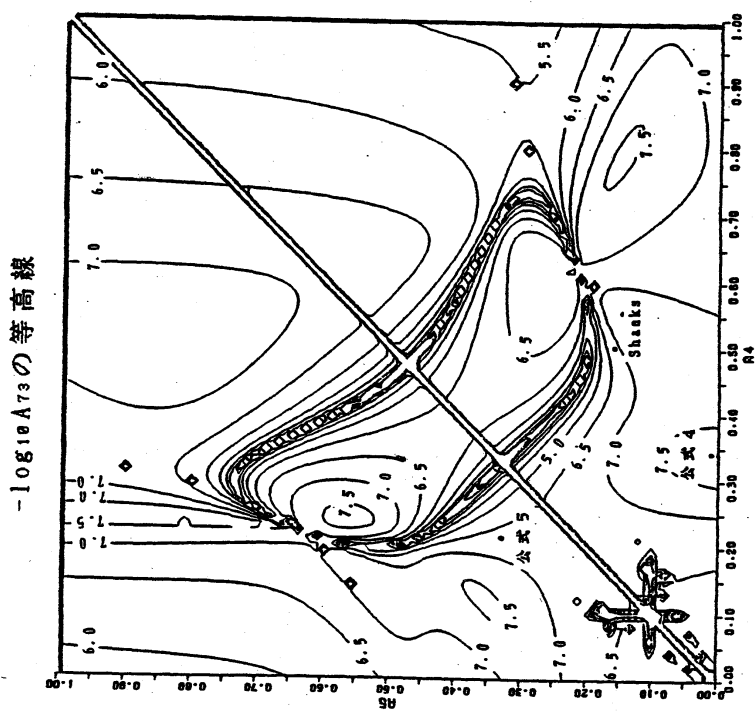


図6.5.1 a_7, a_8 を固定したときの打ち切り精度に関する特性図

有効絶対安定領域の面積 = 25.60985

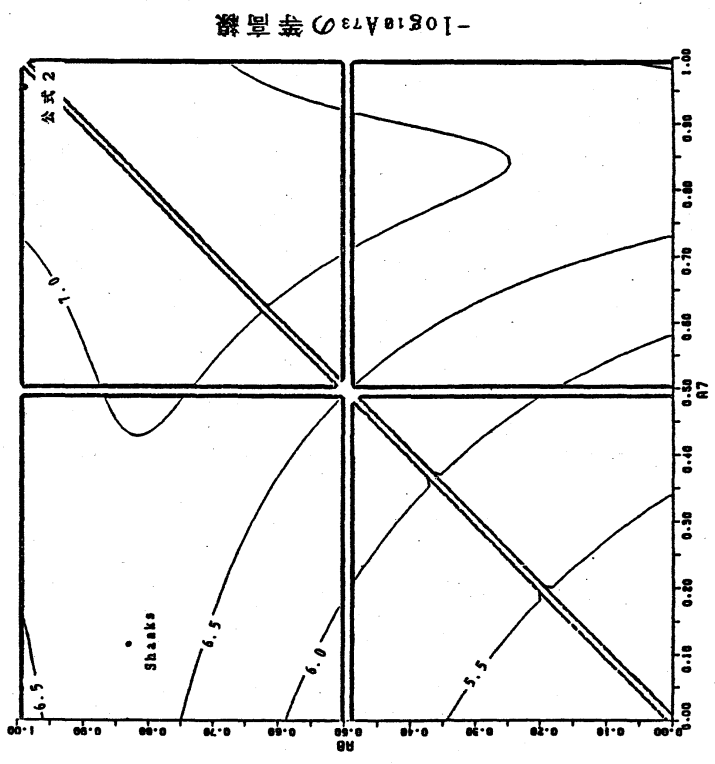


図6.6 a_4, a_5 を固定したときの特性図

有効絶対安定領域の面積の等高線

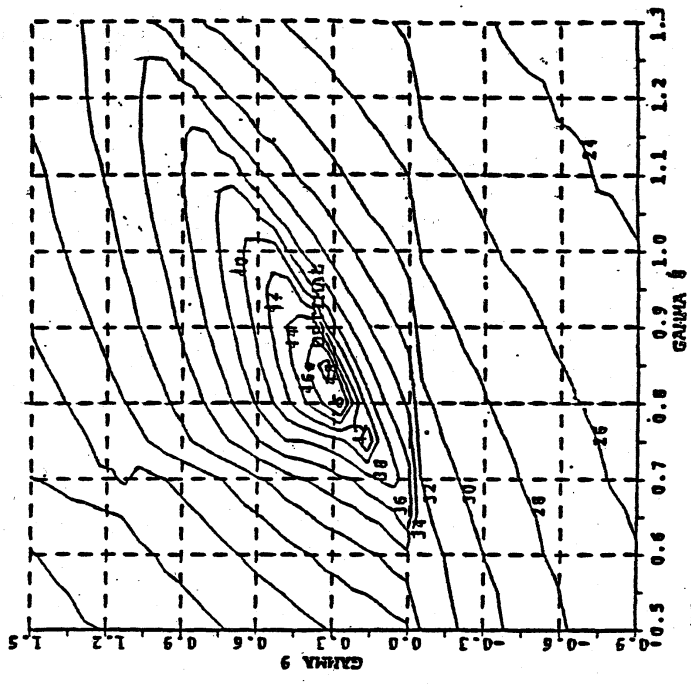


図6.7 9段数7次法の安定性に関する等高線図