

散逸過程における確率論的取扱

名大教養 豊田利幸, 柏村昌平

開放系の統計力学を扱う方法の一つとして, われわれは保存系が二つの開放系に分離されると仮定して, 両系を相互に関連させることにより, 散逸過程の *dynamics* を考察した[1]。そこでは拡散係数を定数とする近似を用いたが, “粘性”あるいは“摩擦”をとり入れた Ornstein-Uhlenbeck 過程がモデルとして有効であることが示された。すなわち保存的な Hamiltonian から “ゆらぎの効果” 的なものを導くさい, Kolmogorov の前進および後退方程式の解を同時に考えることにより, 開放系を保存系の枠組にくみこむことができた。

ところで拡散係数が定数でない場合について, 最近, 物理学者の間で, 出発点となる基礎方程式 (確率微分方程式) をめぐって Itô 型 (以下 (I) と略記) か Stratonovich 型 (以下 (S) と略記) の議論が行われている。なかにはある種の物理現象の *dynamics* の記述として (I) は不適当で (S) がよいという意見も出されている。これについてわれわれは次のように考える。

確率積分を (I) では $\int_s^t Y \cdot dX$, (S) では $\int_s^t Y \circ dX$ とあらわ

すことにすれば, よく知られているように

$$Y \circ dX = Y \cdot dX + \frac{1}{2} dY \cdot dX \quad (1)$$

一般的になりたつ [2]。X, Y の厳密な数学的条件については [2] を参照されたい。

さて (I) の基礎方程式を

$$dX = a dt + b \cdot dB \quad (2)$$

$$\langle (dB)^2 \rangle = \sigma^2 dt \quad (3)$$

とすれば, 簡単な計算で (1) を用いて (2) は次のように書かえられる。

$$\begin{aligned} dX &= \left(a - \frac{1}{2} b b' \sigma^2\right) dt + b \cdot dB \\ &\equiv a^* dt + b \cdot dB \end{aligned} \quad (4)$$

明らかに $b' \neq 0$ の場合 $a \neq a^*$ である。

当然, (I), (S) の変換公式はそれぞれ次のようになる。

$$(I) : df(X) = \left(f' a + \frac{1}{2} f'' b^2 \sigma^2\right) dt + f' \cdot dB \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (S) : df(X) &= f' \left(a - \frac{1}{2} b b' \sigma^2\right) dt + f' b \cdot dB \\ &= f' (a^* dt + b \cdot dB) \end{aligned} \quad (6)$$

(5) と (6) は全く同じもので表わし方が異なっているに過ぎない。

要するに物理現象の確率論的な取扱いにおいて, (I) と (S)

が異なる結果を与えるのではなくて、 a あるいは a^* をどう設定するかが問題であると思われる。

文献

- [1] Toyoda, T. and Kashiwamura, S., An Approach to Dynamical Description of Dissipative Systems, to be published.
- [2] Itô, K. and Watanabe, S., Introduction to Stochastic Differential Equations, Proc. of Intern. Symp. SDE Kyoto 1976 pp. i-xxx.