

ブラウン橋過程を用いた金利期間構造モデル*

滋賀大学経済学部 菊池健太郎

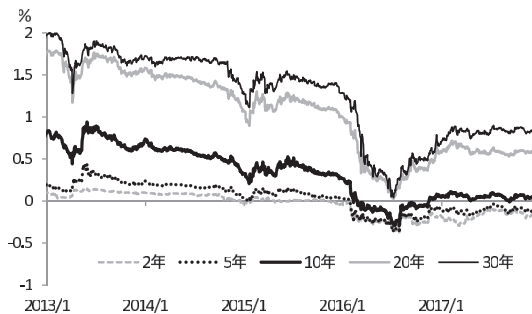
Kentaro Kikuchi

Faculty of Economics, Shiga University

1 はじめに

この数年, 日本国債やドイツ国債の金利は, 短期の年限で負の水準にある. さらに, 短期の年限のみならず, 10 年金利のような長期の年限の金利が負の水準をとっていた時期もある. 本稿を執筆している 2018 年 1 月現在においても, 両国の国債金利は短中期の年限で負の値をとっている (図 1 は日本国債金利の近年の動向を示している). 本稿では, 一部の年限で負の値をとるイールドカーブを「マイナスイールドカーブ」と呼ぶことにし, このマイナスイールドカーブを捉える金利期間構造モデルを構築することを目的とする.

図 1: 日本国債金利 (複利最終利回り) の推移



(出所) 財務省.

今まで, 負の値も取り得る金利期間構造モデルが存在しなかったわけではない. Duffie and Kan[6]によって研究されたアフィン型金利期間構造モデルの特殊形である「標準アフィン・ガウシアン金利期間構造モデル」がその代表例といえよう. 同モデルは, 金利を, 分散共分散行列が一定のガウシアン過程に従う潜在変数のアフィン関数としてモデル化したもので, Ang and Piazzesi[2]をはじめ, 同モデルを用いた実証分析が一時脚光を浴びた. 但し, 当該モデルでは, 将来の金利水準の確率分布が正規分布に従うため, 先行きの金利が大幅なマイナス水準をとる確率が市場参加者の想定よりも大きくなりやすいという問題がある. したがって, マイナスイールドカーブから将来の金

*本稿は他所に投稿予定の論文の簡約版である. 本研究は, JSPS 科研費基盤研究 (C) JP17K03802 の助成を受けたものである.

利動向に対する市場の期待を抽出する研究などには、標準アフィン・ガウシアン金利期間構造モデルは向いていないといえるだろう。

では、マイナスイールドカーブを適切に表現するモデルとして、どのようなものが考えられるのか。その有力な候補が、金利水準に下限を有する金利期間構造モデルである。「影の金利モデル（以下、SR モデル）」や「2次ガウシアン期間構造モデル（以下、QG モデル）」といったモデルが該当する。SR モデルは、Black[4] が提案し、Gorovoi and Linetsky[8] が債券価格の導出など理論面の整備に貢献した。Bauer and Rudebusch [3], Christensen and Rudebusch[5], Kim and Singleton[9], Wu and Xia [15] などでは、ゼロを金利の下限とする実証分析が行われている。一方、QG モデルは Ahn et al.[1] や Leippold and Wu[11] により提案された。Kim and Singleton[9] では、同モデルに基づき、ゼロを金利の下限と設定したうえで、日本のイールドカーブの実証分析を行っている。

SR モデルや QG モデルに基づく実証分析では、上述の通り、ゼロを金利の下限とするものが大半を占める。もちろん、これらのモデルを、負値を下限に持つモデルに修正することは可能である。最も容易な修正法は、一定の負値の下限を明示的にモデルに導入することである。SR モデルでも QG モデルでも、この修正に伴う債券の価格式の導出は難しい。しかし、このような修正は問題を有する。イールドカーブの観測値から金利の下限を推定できたとしても、「マイナス金利政策の深掘り」のような金融政策が新たに採用される状況に直面した場合、将来の金利の観測値が、モデルから推定された下限を下回る可能性がある。すなわち、モデルの予測力が破綻する状況が生じ得る。

この問題点の打開策として、金利の下限を時変とするモデル化が考えられる。実際、時変な金利の下限を金利期間構造に取り込む研究が最近増えてきた。例えば、Kortela[10] は、SR モデルに時間変動が確定的に定まっている金利の下限を導入し、フォワードレートの解析的な近似表現を導出している。また、市場の期待形成の変化に伴い、市場が想定する金利の下限も更新されるという見方に立ち、金利の下限が確率変動するモデルも研究されるようになってきた。例えば、Ueno[12] や Wu and Xia[14] では、確率変動する金利の下限を持つ SR モデルを扱っている。また、菊池 [16] は QG モデルに標準ブラウン運動に従う金利の下限を導入し、債券の価格式の導出や日本国債金利の時系列データを用いたリスクプレミアムの推定などを行っている。

最近、マイナスイールドカーブを捉える金利期間構造モデルを構築するうえで、考慮しなければならない新たな動きが浮上している。欧州中央銀行（ECB）や日本銀行がいつから量的緩和政策の縮小を開始するのかという、いわゆる「出口政策」の議論である。2017 年 10 月に開催された ECB の理事会では、資産購入プログラムにおける資産買入れ規模の縮小が決定されたが、同決定が従来の政策からの方針転換を意味するものなのかどうか、市場では注目が集まった。また、ブルームバーグがエコノミストに対して実施している「日銀サーベイ」では、日本銀行の金融引き締め開始時期の予想を回答させている（2018 年 1 月調査では、エコノミスト 43 名中 20 名が「2018 年内に金融引き締めに向かう」3 名が「2018 年前半に金融引き締めが開始」と回答した）。足元、「量的緩和政策の縮小開始時期」は、市場参加者の多くにとって強弱の差はあれ、無視できないトピックといえるのは確かだろう。この点を踏まえると、量的緩和政策の縮小開始までの期間や量的緩和政策終了までの期間を考慮した金利期間構造モデルを構築することは有意義であると考えられる。

上述の菊池 [16] が提案したモデルでは、金利の下限値はリスク中立確率測度の下、マルチンゲールとなる。したがって、市場が想定する「量的緩和政策終了までの期間」を債券価格に考慮できていない。「緩和的な金融政策の終了までの期間」を明示的に金利期間構造モデルに取り入れた研究として、丸茂他 [17] が挙げられる。また、Futami[7] では、丸茂他 [17] が提案したモデルを一般化したモデルを提案している。丸茂他 [17] は、日本銀行により 1999 年 2 月～2000 年 8 月まで実施された「ゼロ金利政策」と 2001 年 3 月から実施された「量的緩和政策（2006 年 3 月に終了）」期間中

にみられたイールドカーブを踏まえたショートレートモデルを提案している。具体的には、緩和政策の終了時刻が確率的に決まると仮定し、瞬間的スポットレートは緩和終了時刻まではゼロの値を取り、それ以降はバシチェックモデル (Vasicek[13]) に従うというモデル化、および債券の価格式の導出を行っている。さらに、日本国債のイールドカーブデータを用いて、同モデルから推定される緩和政策継続期間に対する確率分布の経時変化なども分析している。

本研究では、量的緩和政策の終了が近づくにつれて、市場が想定する下限金利はゼロに向かうとの立場に立つ。丸茂他 [17] や Futami[7] で提案されたモデルを参考にし、金利の下限が「量的緩和政策終了時刻」に向けてゼロに収れんしていくような確率変動をとるというモデル化を行う。具体的なモデル化の方法は、時刻 0 で 0 の値をとり、緩和政策終了時刻で 0 の値をとる「ブラウン橋過程 (Brownian Bridge)」に下限金利が従うとの仮定を置く。この下限を QG モデルに組み込み、無裁定条件の下、債券の価格式の導出を行う。

以下に本稿の構成を示す。2 節では、状態変数の確率過程の設定、「量的緩和政策終了時刻」を表す確率変数の導入、瞬間的スポットレートの仮定など、モデルのセットアップを行う。3 節では、量的緩和終了時刻が確定的な場合と確率的な場合に分け、債券価格式の導出を行う。なお、後者は前者の結果を使って求められる。4 節はまとめと今後の課題を記す。

2 モデルのセットアップ

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ の上にモデルを構築する。ここで、 $\mathbb{Q}$ はリスク中立確率測度とする。 $W^{\mathbb{Q}}$ を $\mathbb{Q}$ 上の $N+1$ 次元標準ブラウン運動とし、 W^X を $W^{\mathbb{Q}}$ の初めの N 個の成分からなる N 次元ベクトル、 W^y を $W^{\mathbb{Q}}$ の第 $N+1$ 成分 (すなわちスカラー値) とする。また、 $W_t^{\mathbb{Q}}$ の自然なフィルトレーションを $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t}$ とする。

時刻 t における瞬間的スポットレート r_t は、後述するように、 N 次元状態変数ベクトル X_t とスカラー値状態変数 y_t を用いて定義される。 X_t は以下の確率過程に従うと仮定する。

$$dX_t = K(\theta - X_t)dt + \Sigma dW_t^X. \quad (1)$$

y_t の確率過程について記述する前に、非負値をとる確率変数 τ を導入する。 τ は $W^{\mathbb{Q}}$ と独立であると仮定する。ここで、 $\mathcal{H} := \sigma(1_{\tau \leq s} : 0 \leq s \leq t)$ と置き、 $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_t$ とする。 τ は、マイナスイールドカーブが解消され全ての年限の金利が非負値となる時刻、すなわち量的緩和政策終了時刻と解釈し得る確率変数である。

y_t は、 $0 \leq t \leq \tau$ において、 $y_0 = y_\tau = 0$ であるブラウン橋過程に従い、 $t \geq \tau$ では $y_t = 0$ となる確率過程に従う。すなわち、

$$dy_t = \begin{cases} -\frac{y_t}{\tau - t}dt + \sigma dW_t^y & (t < \tau) \\ 0 & (t \geq \tau) \end{cases}, \quad (2)$$

との確率過程に従うとする。

瞬間的スポットレート r_t は、

$$r_t = X_t' \Psi X_t + y_t, \quad (3)$$

と定義する。ここで、 Ψ は $N \times N$ の半正定値行列とする。また、ベクトルの右肩に付されている記号「 $'$ 」はベクトルの転置を表すとする (以下の節でも、行列やベクトルの右肩に付される記号「 $'$ 」は転置を表すことにする)。以上の設定より、短期金利は必ず y_t 以上の値をとることになる。すなわち、 y_t は時刻 t における瞬間的スポットレートの下限となる。

3 割引債の価格表現

本節では、前節で与えたモデルのセットアップに基づき、無裁定条件の下、割引債の価格式を導出する。まず、幾つかの記号を準備しておく。 $t < \tau$ の時期を「異例期 (abnormal period)」と解釈し、添え字として a を用いる。 $t \geq \tau$ の時期を「正常期 (normal period)」と解釈し、添え字として n を用いることにする。確率過程 $(X'_t, y_t)'$ に対する生成作用素は、異例期と正常期では表現が異なり、

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_t^n &= (K(\theta - X_t))' \frac{\partial}{\partial X_t} + \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\Sigma \Sigma' \frac{\partial^2}{\partial X_t \partial X_t'} \right), \\ \mathcal{D}_t^a &= (K(\theta - X_t))' \frac{\partial}{\partial X_t} + \frac{1}{2} \text{Tr} \left(\Sigma \Sigma' \frac{\partial^2}{\partial X_t \partial X_t'} \right) - \frac{y_t}{\tau - t} \frac{\partial}{\partial y_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2},\end{aligned}\quad (4)$$

となる。ここで、 $\text{Tr}(A)$ は、正方行列 A の対角和を表す。

時刻 T に満期を迎える割引債の時刻 t での価格を $P_{t,u}$ と表す。なお、 $u = T - t$ と置いている。また、「量的緩和政策終了時刻」 τ があらかじめ分かっている場合、正常期の割引債価格を $P_{t,u}^n$ 、異例期かつ $T < \tau$ の場合の価格を $P_{t,u}^{a,1}$ 、異例期かつ $T \geq \tau$ の場合の価格を $P_{t,v,w}^{a,2}$ と記すことにする。なお、 $v = \tau - t$ 、 $w = T - \tau$ と置いている。

3.1 τ が既知の場合の割引債の価格表現

本小節では、 τ が既知の場合における割引債の価格式の導出を行う。

まず、正常期 $t \geq \tau$ における、満期までの期間が $u = T - t$ の割引債価格 $P_{t,u}^n$ の表現式を導出する。ファインマン=カック (Feynman-Kac) の公式より、

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_t^n \right] P_{t,u}^n &= r_t P_{t,u}^n, \\ P_{t,0}^n &= 1 \quad (\text{境界条件}),\end{aligned}\quad (5)$$

が成り立つ。ここで、 $\mathcal{D}_t^n$ は式 (4) で具体的に与えられている。

式 (5) の解は以下のような形式を持つと予想される。

$$P_{t,u}^n = \exp(X'_t A_u^n X_t + b_u^{n'} X_t + c_u^n). \quad (6)$$

ここで、 $A_u^n = A_u^{n'}$ 、すなわち A_u^n は対称行列であることに注意しておく。

式 (6) を式 (5) に代入して整理すると、

$$(X'_t f_u^{n,1} X_t + f_u^{n,2'} X_t + f_u^{n,3}) P_{t,u}^n = 0, \quad (7)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned}f_u^{n,1} &= -\dot{A}_u^n - 2K' A_u^n + 2A_u^n \Sigma \Sigma' A_u^n - \Psi, \\ f_u^{n,2} &= -\dot{b}_u^n + 2A_u^n K \theta - K' b_u^n + 2A_u^n \Sigma \Sigma' b_u^n, \\ f_u^{n,3} &= -\dot{c}_u^n + (K \theta)' b_u^n + \text{Tr}(\Sigma \Sigma' (A_u^n + \frac{1}{2} b_u^n (b_u^n)'),\end{aligned}\quad (8)$$

である。式 (8) の $\dot{A}_u^n$ は A_u^n の u に関する微分を表す。 $\dot{b}_u^n$ 、 $\dot{c}_u^n$ も同様に定義されている。

式 (7) は任意の X_t で成立しなければならないので, 式 (8) から, $f_u^{n,1} = 0_{N \times N}$, $f_u^{n,2} = 0_{N \times 1}$, $f_u^{n,3} = 0$ である. したがって,

$$\begin{aligned} -\dot{A}_u^n - 2K'A_u^n + 2A_u^n \Sigma \Sigma' A_u^n - \Psi &= 0_{N \times N}, \\ -\dot{b}_u^n + 2A_u^n K \theta - K'b_u^n + 2A_u^n \Sigma \Sigma' b_u^n &= 0_{N \times 1}, \\ -\dot{c}_u^n + (K\theta)'b_u^n + \text{Tr}(\Sigma \Sigma' (A_u^n + \frac{1}{2}b_u^n (b_u^n)')) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

の連立常微分方程式が成り立つ. 境界条件は, $P_{t,0}^n = 1$ より, $A_0^n = 0_{N \times N}$, $b_0^n = 0_{N \times 1}$, $c_0^n = 0$ である. 式 (9) の求解は, ルンゲ=クッタ法 (Runge-Kutta method) などによる数値解法を用いることになる.

次に, 異例期 $t < \tau$ かつ $T < \tau$ である場合, 満期までの期間が $u = T - t$ の割引債価格 $P_{t,u}^{a,1}$ の表現式を導出する. ファインマン=カックの公式より,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_t^a \right] P_{t,u}^{a,1} &= r_t P_{t,u}^{a,1}, \\ P_{t,0}^{a,1} &= 1 \quad (\text{境界条件}), \end{aligned} \quad (10)$$

が成り立つ. ここで, $\mathcal{D}_t^a$ は式 (4) で与えられている.

式 (10) の解は以下のような形式を持つと予想される.

$$P_{t,u}^{a,1} = \exp(X_t' A_u^{a,1} X_t + b_u^{a,1'} X_t + c_u^{a,1} + d_u^{a,1} y_t). \quad (11)$$

ここで, $A_u^{a,1} = A_u^{a,1'}$, すなわち $A_u^{a,1}$ は対称行列である.

式 (11) を式 (10) に代入して整理し, X_t , y_t の係数を次数ごとにまとめる. 式 (7), (8), (9) と同様の議論から,

$$\begin{aligned} -\dot{A}_u^{a,1} - 2K'A_u^{a,1} + 2A_u^{a,1} \Sigma \Sigma' A_u^{a,1} - \Psi &= 0_{N \times N}, \\ -\dot{b}_u^{a,1} + 2A_u^{a,1} K \theta - K'b_u^{a,1} + 2A_u^{a,1} \Sigma \Sigma' b_u^{a,1} &= 0_{N \times 1}, \\ -\dot{c}_u^{a,1} + (K\theta)'b_u^{a,1} + \text{Tr}(\Sigma \Sigma' (A_u^{a,1} + \frac{1}{2}b_u^{a,1} (b_u^{a,1})')) + \frac{1}{2}\sigma^2 (d_u^{a,1})^2 &= 0, \\ \dot{d}_u^{a,1} + \frac{d_u^{a,1}}{\tau - t} + 1 &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

という連立常微分方程式が得られる. 境界条件は, $P_{t,0}^{a,1} = 1$ より $A_0^{a,1} = 0_{N \times N}$, $b_0^{a,1} = 0_{N \times 1}$, $c_0^{a,1} = 0$, $d_0^{a,1} = 0$ である. なお, 式 (12) の 4 つ目の方程式は「ダランベールの微分方程式 (d'Alembert's equation)」と呼ばれており, 解析的に閉じた解を持つ. 具体的には, $w = T - \tau$ と置いたとき,

$$d_u^{a,1} = -\frac{u(u-2w)}{2(u-w)}, \quad (13)$$

となる.

次に, 異例期 $t < \tau$ かつ $\tau \leq T$ である場合, 割引債価格 $P_{t,v,w}^{a,2}$ の表現式を導出する. ここで, $v = \tau - t$, $w = T - \tau$ と置いている.

$P_{t,v,w}^{a,2}$ は, 条件付期待値を用いて以下のようにかける.

$$P_{t,v,w}^{a,2} = E \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right]. \quad (14)$$

式 (14) に繰り返し期待値の法則 (law of iterated expectation) を適用すると,

$$\begin{aligned} P_{t,v,w}^{a,2} &= E \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right], \\ &= E \left[E \left[\exp \left(- \int_t^\tau r_s ds - \int_\tau^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[\exp \left(- \int_t^\tau r_s ds \right) E \left[\exp \left(- \int_\tau^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_\tau \right] \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[\exp \left(- \int_t^\tau r_s ds \right) P_{\tau,T-\tau}^n \middle| \mathcal{F}_t \right], \end{aligned} \quad (15)$$

となる. 式 (15) から, ファインマン=カックの公式により,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}_t^a \right] P_{t,v,w}^{a,2} &= r_t P_{t,v,w}^{a,2}, \\ P_{t,0,w}^{a,2} &= P_{t,w}^n \quad (\text{境界条件}), \end{aligned} \quad (16)$$

である.

価格の解は以下のような形をとると予想される.

$$P_{t,v,w}^{a,2} = \exp(X_t' A_{v,w}^{a,2} X_t + (b_{v,w}^{a,2})' X_t + c_{v,w}^{a,2} + d_{v,w}^{a,2} y_t). \quad (17)$$

ここで, $A_{v,w}^{a,2} = A_{v,w}^{a,2'}$, すなわち $A_{v,w}^{a,2}$ は対称行列である.

式 (17) を式 (16) に代入して式を整理すると,

$$\begin{aligned} -\dot{A}_{v,w}^{a,2} - 2K' A_{v,w}^{a,2} + 2A_{v,w}^{a,2} \Sigma \Sigma' A_{v,w}^{a,2} - \Psi &= 0_{N \times N} \\ -\dot{b}_{v,w}^{a,2} + 2A_{v,w}^{a,2} K \theta - K' b_{v,w}^{a,2} + 2A_{v,w}^{a,2} \Sigma \Sigma' b_{v,w}^{a,2} &= 0_{N \times 1} \\ -\dot{c}_{v,w}^{a,2} + (K \theta)' b_{v,w}^{a,2} + \text{Tr}(\Sigma \Sigma' (A_{v,w}^{a,2} + \frac{1}{2} b_{v,w}^{a,2} (b_{v,w}^{a,2})')) + \frac{1}{2} \sigma^2 (d_{v,w}^{a,2})^2 &= 0 \\ \dot{d}_{v,w}^{a,2} + \frac{d_{v,w}^{a,2}}{v} + 1 &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

という, v を独立変数に持つ連立常微分方程式が得られる. 境界条件 $P_{t,0,w}^{a,2} = P_{t,w}^n$ から, 式 (6) と (17) より, $A_{0,w}^{a,2} = A_w^n$, $b_{0,w}^{a,2} = b_w^n$, $c_{0,w}^{a,2} = c_w^n$ となる.

実は $d_{v,w}^{a,2}$ に関する境界条件をまだ論じていない. $P_{t,v,w}^{a,2}$ は, 式 (15) から

$$\begin{aligned} P_{t,v,w}^{a,2} &= E \left[\exp \left(- \int_t^\tau r_s ds \right) P_{\tau,T-\tau}^n | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[\exp \left(- \int_t^\tau (X_s' \Psi X_s + y_s) ds \right) P_{\tau,T-\tau}^n | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[\exp \left(- \int_t^\tau y_s ds \right) | \mathcal{F}_t \right] E \left[\exp \left(- \int_t^\tau X_s' \Psi X_s ds \right) P_{\tau,T-\tau}^n | \mathcal{F}_t \right], \end{aligned} \quad (19)$$

と式変形できる. 式 (19) の 3 番目の等号成立は, X_s と Y_s が独立であることによる. 式 (19) の右辺は, $P_{t,v,w}^{a,2}$ の表現式 (17) の y_t の係数 $d_{v,w}^{a,2}$ が w に依存しないで決定されることを意味している. したがって,

$$d_{v,w}^{a,2} = d_{v,0}^{a,2}, \quad (20)$$

である. また, $w = 0$ の時, $P_{t,v,0}^{a,2} = P_{t,v}^{a,1}$ であることを踏まえると,

$$d_{v,0}^{a,2} = d_v^{a,1}, \quad (21)$$

である. したがって, 式 (13), (20), (21) から, $d_{v,v}^{a,2}$ は,

$$d_{v,w}^{a,2} = d_{v,0}^{a,2} = d_v^{a,1} = -\frac{1}{2}v, \quad (22)$$

で与えられる.

3.2 τ が確率的な場合の割引債の価格表現

前小節の結果をもとに τ が確率的な場合における割引債の価格表現を導出する. 以下の議論は, 丸茂他 [17] や Futami [7] で展開されたものと本質的にはほぼ同等である.

割引債価格 $P_{t,T-t}$ は以下のように記述される.

$$\begin{aligned}
 P_{t,T-t} &= E \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] \\
 &= E \left[1_{\{\tau < t\}} \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] \\
 &\quad + E \left[1_{\{t \leq \tau \leq T\}} \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] \\
 &\quad + E \left[1_{\{T < \tau\}} \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right].
 \end{aligned} \tag{23}$$

式 (23) の右辺第 1 項は,

$$\begin{aligned}
 E \left[1_{\{\tau < t\}} \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] &= 1_{\{\tau < t\}} E \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] \\
 &= 1_{\{\tau < t\}} E \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
 &= 1_{\{\tau < t\}} P_{t,T-t}^n,
 \end{aligned} \tag{24}$$

となる.

式 (23) の右辺第 3 項は, 次のように変形される.

$$\begin{aligned}
 E \left[1_{\{T < \tau\}} \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] &= E \left[E \left[1_{\{T < \tau\}} \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_T \vee \mathcal{H}_t \right] \middle| \mathcal{G}_t \right] \\
 &= E \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) E \left[1_{\{T < \tau\}} \middle| \mathcal{F}_T \vee \mathcal{H}_t \right] \middle| \mathcal{G}_t \right] \\
 &= E \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) 1_{\{\tau > t\}} E \left[1_{\{T < \tau\}} \middle| \mathcal{F}_T, \{\tau > t\} \right] \middle| \mathcal{G}_t \right] \\
 &= 1_{\{\tau > t\}} E \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) E \left[1_{\{T < \tau\}} \middle| \mathcal{F}_T, \{\tau > t\} \right] \middle| \mathcal{F}_t, \{\tau > t\} \right] \\
 &= 1_{\{\tau > t\}} E \left[\exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] E \left[1_{\{T < \tau\}} \middle| \{\tau > t\} \right] \\
 &= 1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{Q}(T < \tau)}{\mathbb{Q}(t < \tau)} P_{t,T-t}^{a,1} = 1_{\{\tau > t\}} \frac{1 - F(T)}{1 - F(t)} P_{t,T-t}^{a,1}.
 \end{aligned} \tag{25}$$

ここで, $F(t)$ は τ の分布関数である. また, 上の式変形では τ と W_t^Q が独立であるという仮定を使っている.

式 (23) の右辺第 2 項は, 次のように変形される.

$$\begin{aligned}
 E \left[1_{\{t \leq \tau \leq T\}} \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] &= E \left[E \left[1_{\{t \leq \tau \leq T\}} \exp \left(- \int_t^T r_s ds \right) \exp \left(- \int_\tau^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{G}_\tau \right] \middle| \mathcal{G}_t \right] \\
 &= E \left[1_{\{t \leq \tau \leq T\}} \exp \left(- \int_t^\tau r_s ds \right) E \left[\exp \left(- \int_\tau^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{G}_\tau \right] \middle| \mathcal{G}_t \right].
 \end{aligned} \tag{26}$$

ここで, 右辺の式中に現れる

$$E \left[\exp \left(- \int_\tau^T r_s ds \right) \middle| \mathcal{G}_\tau \right],$$

を Z_τ と置く. Z_t は $(\mathcal{G}_t)$ 適合である点に注意しておく.

さらに計算を進めていくために, 確率過程 $N_t = 1_{\{\tau \leq t\}}$ を用意する. N_t の強度を λ_t とする. λ_t は τ の分布関数 $F(t)$ とその確率密度関数 $f(t)$ を用いて,

$$\lambda_t = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

と表される.

ここで, ドゥーブ=マイヤー分解 (Doob-Meyer decomposition) から,

$$M_t = N_t - \int_0^t \lambda_s 1_{\{\tau > s\}} ds \tag{27}$$

は、 $(\mathcal{G}_t)$ -マルチンゲールとなる。

式 (26) の右辺の期待値演算子の中身は、式 (27) を用いると以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} 1_{\{t \leq \tau \leq T\}} \exp\left(-\int_t^\tau r_s ds\right) Z_\tau &= \int_t^T \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) Z_s dN_s \\ &= \int_t^T \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) Z_s (dM_s + \lambda_s 1_{\{\tau > s\}} ds) \end{aligned} \quad (28)$$

以上より、式 (23) の第 2 項は、式 (28) と M_t が $(\mathcal{G}_t)$ -マルチンゲールであることを用いて以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} E\left[1_{\{t \leq \tau \leq T\}} \exp\left(-\int_t^\tau r_s ds\right) Z_\tau | \mathcal{G}_t\right] &= E\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) Z_s (dM_s + \lambda_s 1_{\{\tau > s\}} ds) | \mathcal{G}_t\right] \\ &= E\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) Z_s dM_s | \mathcal{G}_t\right] + E\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) Z_s \lambda_s 1_{\{\tau > s\}} ds | \mathcal{G}_t\right] \\ &= E\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) Z_s \lambda_s 1_{\{\tau > s\}} ds | \mathcal{G}_t\right] \\ &= 1_{\{t < \tau\}} E\left[\int_t^T \exp\left(-\int_t^s r_u du\right) Z_s \lambda_s 1_{\{\tau > s\}} ds | \mathcal{F}_t, \{t < \tau\}\right] \\ &= 1_{\{t < \tau\}} \int_t^T E\left[\exp\left(-\int_t^s r_u du\right) Z_s \lambda_s 1_{\{\tau > s\}} | \mathcal{F}_t, \{t < \tau\}\right] ds \\ &= 1_{\{t < \tau\}} \int_t^T E\left[\exp\left(-\int_t^s r_u du\right) Z_s | \mathcal{F}_t\right] \lambda_s E\left[1_{\{\tau > s\}} | \{t < \tau\}\right] ds \\ &= 1_{\{t < \tau\}} \int_t^T E\left[\exp\left(-\int_t^s r_u du\right) Z_s | \mathcal{F}_t\right] \lambda_s E\left[1_{\{\tau > s\}} | \{t < \tau\}\right] ds \\ &= 1_{\{t < \tau\}} \int_t^T P_{t,s-t,T-s}^{a,2} \frac{f(s)}{1-F(s)} \frac{1-F(s)}{1-F(t)} ds \\ &= 1_{\{t < \tau\}} \int_t^T P_{t,s-t,T-s}^{a,2} \frac{f(s)}{1-F(t)} ds. \end{aligned} \quad (29)$$

以上をまとめると、 τ が確率的な場合の時刻 t での債券価格 (式 (23)) は、式 (24), (26), (29) より、

$$P_{t,T-t} = 1_{\{\tau < t\}} P_{t,T-t}^n + 1_{\{t < \tau\}} \int_t^T P_{t,s-t,T-s}^{a,2} \frac{f(s)}{1-F(t)} ds + 1_{\{t < \tau\}} \frac{1-F(T)}{1-F(t)} P_{t,T-t}^{a,1}, \quad (30)$$

となる。

4 まとめと今後の課題

本研究では、ブラウン橋過程に従う下限金利を持つ 2 次ガウシアン期間構造モデルを構築した。このモデルは、マイナスイールドカーブを表現できるだけでなく、量的緩和政策の終了時刻をモデルに明示的に組み込んでいる点が最大の特徴である。量的緩和政策の縮小時期や終了時期を市場が想定し、それを国債価格が織り込むようになった場合、本稿で提案したモデルは有用性を増すに違いない。

今後の課題は、構築したモデルに基づく市場データを用いた実証分析である。分析の例として、市場で観測されるイールドカーブに織り込まれた量的緩和政策終了時刻 τ の確率分布を推定することなどが考えられる。

参考文献

- [1] Ahn, D.H., R.F. Dittmar, and A.R. Gallant (2002) “Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence,” *The Review of Financial Studies*, Vol. 15, No. 1, pp. 243-288.

- [2] Ang, A. and M. Piazzesi (2003) “A No-Arbitrage Vector Autoregression of Term Structure Dynamics with Macroeconomic and Latent Variables,” *Journal of Monetary Economics*, Vol. 50, No. 4, pp. 745-787.
- [3] Bauer, M.D. and G.D. Rudebusch (2016) “Monetary Policy Expectations at the Zero Lower Bound,” *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 48, No. 7, pp. 1439-1465.
- [4] Black, F. (1995) “Interest Rates as Options,” *The Journal of Finance*, Vol. 50, No. 5, pp. 1371-1376.
- [5] Christensen, J.H.E. and G.D. Rudebusch (2015) “Estimating Shadow-Rate Term Structure Models with Near-Zero Yields,” *Journal of Financial Econometrics*, Vol. 13, No. 2, pp. 226-259.
- [6] Duffie, D. and R. Kan (1996) “A Yield-factor Model of Interest Rates,” *Mathematical Finance*, Vol. 6, No. 4, pp. 379-406.
- [7] Futami, H. (2009) “Multi-factor Affine Term Structure Model with Single Regime Shift: Real Term Structure under Zero Interest Rate,” *Asia-Pacific Financial Markets*, Vol. 16, pp. 347-369.
- [8] Gorovoi, V. and V. Linetsky (2004) “Black’s Model of Interest Rates as Options, Eigenfunction Expansions and Japanese Interest Rates,” *Mathematical Finance*, Vol. 14, No. 1, pp. 49-78.
- [9] Kim, D.H. and K.J. Singleton (2012) “Term Structure Models and the Zero Lower Bound: An Empirical Investigation of Japanese Yields,” *Journal of Econometrics*, Vol. 170, No. 1, pp. 32-49.
- [10] Kortela, T. (2016) “A Shadow Rate Model with Time-Varying Lower Bound of Interest Rates,” Bank of Finland Research Discussion Paper.
- [11] Leippold, M. and L. Wu (2002) “Asset Pricing under the Quadratic Class,” *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 37, No. 2, pp. 271-295.
- [12] Ueno, Y. (2017) “Term Structure Models with Negative Interest Rates,” Bank of Japan IMES Discussion Paper Series.
- [13] Vasicek, O. (1977) “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, pp. 339-348.
- [14] Wu, J.C. and F.D. Xia (2017) “Time-Varying Lower Bound of Interest Rates in Europe,” The University of Chicago Booth School of Business Working Paper.
- [15] Wu, J.C. and F.D. Xia (2016) “Measuring the Macroeconomic Impact of Monetary Policy at the Zero Lower Bound,” *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 48, No. 2-3, pp. 253-291.
- [16] 菊池健太郎 (2017) 「時変な下限を持つ金利期間構造モデル」,『数理解析研究所講究録』, 第2029巻, 6-20頁.

- [17] 丸茂幸平・中山貴司・西岡慎一・吉田敏弘 (2003) 「ゼロ金利政策下における金利の期間構造モデル」．日本銀行金融市場局ワーキングペーパー．

Faculty of Economics, Shiga University

Hikone, Shiga, 522-8522, Japan

E-mail address: kentaro-kikuchi@biwako.shiga-u.ac.jp

滋賀大学・経済学部 菊池 健太郎