

磁性流体界面解析のための数値ソレノイド

元 北海道大学大学院・工学研究院 水 田 洋

Yo Mizuta

Faculty of Engineering, Hokkaido University

1 はじめに

臨界磁場近傍における界面形状遷移のような、磁性流体界面の速い現象を詳しく解析する場合、流体解析・磁場解析共に、界面形状の複雑さに制限されない厳密ながら負担の軽い方法が必要とされる．本研究ではこれまで、磁場解析に対して「汎用磁場解析」を開発し[1, 2, 3]、Bernoulli 方程式に基づく界面力学方程式と合わせて、界面安定性の分岐図式を作成し[3, 4, 5]、界面物理量に対する波数スペクトルの時間変化[6, 7]、「界面応力と界面エネルギー密度の関係」による界面物理量の検証方法[8, 9, 10]、流体解析・磁場解析における磁性流体の非線形磁化[10, 11, 12]、などを調べてきた．

磁性流体の界面解析では、求めるべき磁場はさしあたり界面に限っておいでよい．任意形状の領域に適用できる界面磁場解析は、Green の定理から導くことができる．汎用磁場解析では、磁気ポテンシャルとその法線勾配が結合した方程式から、ほとんど近似なく「3次元界面磁場方程式」が導かれるが、これを実際に解くときは、界面形状変化がある程度緩やかなことを前提としている[13]．そこで、数値解析結果の比較検討を可能にし、さらに界面磁場解析の改良点を明らかにするため、間接境界要素法 (IBEM)[14, 15]に基づく磁場解析を新たに構築した．この方法では、境界上に置いた単極ソースの密度分布をまず求める．これにより、磁気ポテンシャルと法線勾配は、互いに分離して求められるようになる．これはちょうど、実験的研究で性能の良いソレノイドを用意するのと似ている．

2 界面力学方程式

界面形状に制限なく全ての非線形効果を取り込んで磁性流体界面の動的解析を行うには、磁性流体を非圧縮・非回転・非粘性として、Bernoulli 方程式と

界面上の力学的条件より導かれた次の界面力学方程式 (Equation for Interface Motion, EIM) を用いる [3, 6].

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + S = f(t), \quad S \equiv D + G + C + T + p_0. \quad (1)$$

ここで, $\rho, \varphi, S, f(t)$ は, 密度・速度ポテンシャル・界面応力和・空間座標によらない関数である. 速度ポテンシャルは, 界面変位 ζ と流速 $\mathbf{v}$ の鉛直成分 v_z で $\varphi = \int_{-\infty}^{\zeta} dz v_z$ と表され, S を与えれば, 時間積分により ζ を求めることができる. $g, \gamma, \kappa_{1,2}$ を重力加速度・表面張力係数・界面の主曲率とすれば, S は, 動圧 $D = \rho |\mathbf{v}|^2 / 2$ ・重力ポテンシャル $G = \rho g z$ ・表面張力 $C = \gamma(\kappa_1 + \kappa_2)$ ・磁気応力差 T ・大気圧 p_0 の和である. ただしこれ以降, 界面の動きは遅いとして D は無視し, p_0 は $f(t)$ に含める.

磁気応力差 T は, 界面における流体・真空各領域の磁気応力の法線成分の差である. $\mathbf{h}_J, \mathbf{b}_J$ を流体 ($J=1$)・真空 ($J=2$) 各領域の磁場と磁束密度, b_z, h_z をそれらの法線成分, $b_{x,y}, h_{x,y}$ を接線成分, b, h を大きさ, $[\dots]$ を界面を横切る値の跳び (流体-真空) とすれば, 熱力学的考察から (2) 第2辺のように導出される (Rosensweig 1985) [16]. 特に透磁率 μ_J が磁場に依存しない場合は, 界面条件より両領域に共通な $b_z, h_{x,y}$ を用いて第3辺のように表される.

$$T = \left[h_z b_z - \int_0^h b dh \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\mu_J} \right] \{ b_z^2 + \mu_1 \mu_2 (h_x^2 + h_y^2) \}. \quad (2)$$

磁気応力差 T は磁場から流体への作用を表し, 磁性流体の界面解析においては重要な物理量である.

3 汎用磁場解析による界面磁場解析

3.1 磁気ポテンシャル方程式と勾配方程式

調和性と界面条件を厳密に満たす接線磁場 $h_{x,y}$ と法線磁束密度 b_z を求める汎用磁場解析 (Magnetic Analysis for General Use, MAGU) は, 流体・真空それぞれの領域における Green の定理

$$\iiint_V dV' (\phi' \Delta' \psi - \psi \Delta' \phi') = \oint_S dS' \cdot \{ \phi' (\nabla' \psi) - \psi (\nabla' \phi') \} \quad (3)$$

から導かれる. ここで, $S, V, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \nu$ は, それぞれ, 界面 F とそれ以外の境界から成る閉曲面, S の内部領域, 観測点の位置ベクトル, ソース点の位置

ベクトル, $\mathbf{r}'$ に関する微分または $\mathbf{r}'$ だけの関数である.

(3)において, Ampère の法則 $\nabla \times \mathbf{h}' = \mathbf{0}$ と Gauss の法則 $\nabla' \cdot \mathbf{b}' = 0$ を満たす磁場 $\mathbf{h}'$ と磁束密度 $\mathbf{b}'$ を $\mathbf{h}' = \nabla' \phi'$, $\mathbf{b}' = \mu \mathbf{h}'$ のように与える磁気ポテンシャルを ϕ' として, 3次元 Poisson 方程式 $\nabla' \cdot (\mu \nabla' \psi) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ の解を ψ として用いると, 次の磁気ポテンシャル方程式が導かれる.

$$\phi = 2 \oint_S dS' \cdot \{-\psi b'_Z + (\mu t'_Z \cdot \nabla' \psi) \phi'\}. \quad (4)$$

ここで, 面積素 dS' , 法線単位ベクトル $\mathbf{t}'_Z$ を用いて, 面積素ベクトルと法線磁束密度を $dS' = dS' t'_Z$, $b'_Z = t'_Z \cdot \mu \mathbf{h}' = \mu t'_Z \cdot \nabla' \phi'$ と表した. また, 右辺積分の前の2は, $\mathbf{r}$ が F 上にあるとき $\iiint_V dV' \nabla' \cdot (\mu \nabla' \psi) = 1/2$ となることによる.

接線単位ベクトル $\mathbf{t}_{X,Y}$ と法線単位ベクトル $\mathbf{t}_Z$ をまとめて $\mathbf{t}_I$ ($I=X, Y, Z$) と表し, (4)の両辺に $\mathbf{t}_I \cdot \nabla$ を演算すれば, 次の勾配方程式が導かれる.

$$\mathbf{t}_I \cdot \nabla \phi = 2 \oint_S dS' \cdot \{-(\mathbf{t}_I \cdot \nabla \psi) b'_Z + (\mathbf{t}_I \cdot \nabla)(\mu t'_Z \cdot \nabla' \psi) \phi'\}. \quad (5)$$

流体 ($J=1$)・真空 ($J=2$) それぞれの領域で磁気ポテンシャル方程式と勾配方程式を書き表せば,

$$\begin{cases} \phi_2 = 2 \iint_F dS' \cdot \left\{ -\psi \frac{b'_{Z2}}{\mu_2} - (t'_Z \cdot \nabla' \psi) \phi'_2 \right\} + \mathcal{T}, \\ \phi_1 = 2 \iint_F dS' \cdot \left\{ -\psi \frac{b'_{Z1}}{\mu_1} + (t'_Z \cdot \nabla' \psi) \phi'_1 \right\} + \mathcal{B}, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \mathbf{t}_I \cdot \nabla \phi_2 = 2 \iint_F dS' \cdot \left\{ -(\mathbf{t}_I \cdot \nabla \psi) \frac{b'_{Z2}}{\mu_2} - (\mathbf{t}_I \cdot \nabla)(t'_Z \cdot \nabla' \psi) \phi'_2 \right\} + \mathbf{t}_I \cdot \nabla \mathcal{T}, \\ \mathbf{t}_I \cdot \nabla \phi_1 = 2 \iint_F dS' \cdot \left\{ -(\mathbf{t}_I \cdot \nabla \psi) \frac{b'_{Z1}}{\mu_1} + (\mathbf{t}_I \cdot \nabla)(t'_Z \cdot \nabla' \psi) \phi'_1 \right\} + \mathbf{t}_I \cdot \nabla \mathcal{B}. \end{cases} \quad (7)$$

ただし, F 上の法線単位ベクトルと法線磁束密度が

$$t_{Z1} \equiv t_Z, \quad t_{Z2} = -t_Z, \quad b_{Z1} = t_{Z1} \cdot \mathbf{b}_1, \quad b_{Z2} = t_{Z2} \cdot \mathbf{b}_2, \quad b_1 = \mu_1 \nabla \phi_1, \quad b_2 = \mu_2 \nabla \phi_2$$

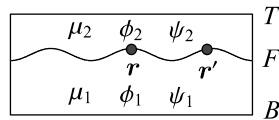


Fig. 1: 流体 (1)・真空 (2) 各領域における, 磁気ポテンシャル $\phi_{1,2}$ と 3次元 Poisson 方程式の基本解 $\psi_{1,2}$. $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ は観測点・ソース点の位置ベクトル, T, B, F は上方境界・下方境界および界面.

となること、3次元 Poisson 方程式 $\nabla' \cdot (\mu_J \nabla' \psi_J) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ の解が

$$\psi_J = \psi / \mu_J, \quad \psi \equiv -1/4\pi R, \quad R = |\mathbf{R}|, \quad \mathbf{R} \equiv \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$

と表されることから、 $\mu_1 \nabla' \psi_1 = \mu_2 \nabla' \psi_2 = \nabla' \psi = -\nabla \psi$ を用いた。さらに、上方境界・下方境界から面積分への寄与を次のように置いている。

$$\begin{cases} \mathcal{T} \equiv 2 \iint_{S_2-F} d\mathbf{S}'_2 \cdot \{-\psi_2(\mu_2 \nabla' \phi'_2) + (\mu_2 \nabla' \psi_2)\phi'_2\}, \\ \mathcal{B} \equiv 2 \iint_{S_1-F} d\mathbf{S}'_1 \cdot \{-\psi_1(\mu_1 \nabla' \phi'_1) + (\mu_1 \nabla' \psi_1)\phi'_1\}. \end{cases}$$

3.2 3次元界面磁場方程式

(7)における両領域の勾配方程式を加え合わせ、法線界面条件 $b_{Z1} = -b_{Z2} = b_Z$ 、接線界面条件 $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ を適用し、 $\mathbf{b}_J = \mu_J \nabla \phi_J$ より左辺を磁束密度ベクトル $\mathbf{b}_J$ で表せば、(7)右辺面積分の被積分量第2項同士は接線界面条件で互いに打ち消しあい、次式が導かれる。

$$\mathbf{t}_I \cdot \left(\frac{\mathbf{b}_1}{\mu_1} + \frac{\mathbf{b}_2}{\mu_2} \right) = -2\hat{G}_{1I}(Mb'_Z) + \mathbf{t}_I \cdot \nabla(\mathcal{T} + \mathcal{B}), \quad (8)$$

$$\hat{G}_{1If'} \equiv 2 \iint_F d\mathbf{S}' g'_{1If'}, \quad g'_{1I} \equiv -(\mathbf{t}_I \cdot \nabla \psi) = \frac{\mathbf{t}_I \cdot \mathbf{R}}{4\pi R^3}. \quad (9)$$

ここで、 $\hat{G}_{1I}$ は3次元 Hilbert 変換演算子である。また、 $M \equiv (1/\mu_2 - 1/\mu_1)/2$ を定義した。

$\mathbf{b}_J$ と共に、磁気応力差に用いる界面磁場 $b_Z = \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{b}_J$, $h_{X,Y} = \mathbf{t}_{X,Y} \cdot \mathbf{b}_J / \mu_J$ を、 $\mathbf{b}_J = \mathbf{b}_J^0 + \mathbf{b}_J^1$, $b_Z = b_Z^0 + b_Z^1$, $h_{X,Y} = h_{X,Y}^0 + h_{X,Y}^1$ と基本場と誘導場へ分離する。基本場を既知の外部印加磁場 $\mathbf{h}^0$ で $\mathbf{b}_J^0 = \mu_J \mathbf{h}^0$, $b_Z^0 = \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{h}^0 / P$, $h_{X,Y}^0 = \mathbf{t}_{X,Y} \cdot \mathbf{h}^0$ と与える場合 ($P \equiv (1/\mu_2 + 1/\mu_1)/2$)、界面条件 $[b_Z] = 0$, $[h_{X,Y}] = 0$ を満たす誘導場同士の関係は $\mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{b}_J^1 = b_Z^1 \mp \mu_J M b_Z^0$, $\mathbf{t}_{X,Y} \cdot \mathbf{b}_J^1 = \mu_J h_{X,Y}^1$ となる (復号の上/下は領域 1/2 に対応) [17, 18]。以上により、界面磁場の誘導場 $h_{X,Y}^1$, b_Z^1 に対する方程式として、3次元界面磁場方程式が導かれる。

$$\begin{cases} P b_Z^1 = -\hat{G}_{1Z} \{ M(b_Z^0 + b_Z^1) \} + \mathbf{t}_Z \cdot \mathbf{g}, \\ h_{X,Y}^1 = -\hat{G}_{1X,Y} \{ M(b_Z^0 + b_Z^1) \} + \mathbf{t}_{X,Y} \cdot \mathbf{g}. \end{cases} \quad (10)$$

ここで、 $\mathcal{T}, \mathcal{B}$ の誘導場部分 $\mathcal{T}^1, \mathcal{B}^1$ より、 $\mathbf{g} \equiv \nabla(\mathcal{T}^1 + \mathcal{B}^1)/2$ を定義した。既に述べたいくつかの動的解析では、(10)が用いられている。

4 磁場解析の改良

汎用磁場解析の3次元界面磁場方程式はほとんど近似なく導かれているが、実際に解く際は、界面形状変化が緩やかであることを前提とした近似を用いることになる[13]. そこで以下では、数値解析結果の比較検討を可能にし、さらに界面磁場解析の改良点を明らかにするため、少し異なる方法を考える.

4.1 単一領域の場合

汎用磁場解析と同じく、ここでもまずGreenの定理(3)を考える. ϕ' として Poisson 方程式 $\Delta'\phi' = \rho'$ の解, またはその I 方向勾配 $\phi'_I \equiv (\mathbf{t}_I \cdot \nabla \phi)'$ ($I=X, Y, Z$) を, ψ として $\Delta'\psi = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ の解 $\psi = -1/4\pi R$ ($\mathbf{R} \equiv \mathbf{r}' - \mathbf{r}$, $R \equiv |\mathbf{R}|$) を選べば,

$$\alpha\phi(\mathbf{r}) = \oint_S dS' (q\phi' - \psi h') + \iiint_V dV' \psi \rho', \quad (11)$$

$$\alpha\phi_I(\mathbf{r}) = \oint_S dS' (q\phi'_I - \psi h'_I) + \iiint_V dV' \psi \rho'_I. \quad (12)$$

ここで, 観測点 $\mathbf{r}$ が領域内部, 領域境界, 領域外部に応じて, $\alpha = 1, 1/2, 0$, また, 以下のように置き換えた.

$$\begin{aligned} q &\equiv \mathbf{t}'_Z \cdot \nabla' \psi, & \nabla' \psi &= -\nabla \psi = \mathbf{R}/4\pi R^3, \\ h' &\equiv (\mathbf{t}'_Z \cdot \nabla \phi)_I = \phi'_Z, & \Delta' \phi' &= \rho', \\ h'_I &\equiv \mathbf{t}'_Z \cdot \nabla' (\mathbf{t}_I \cdot \nabla \phi)', & \Delta' (\mathbf{t}_I \cdot \nabla \phi)' &= \mathbf{t}_I \cdot \nabla' (\Delta' \phi)' \equiv \rho'_I. \end{aligned}$$

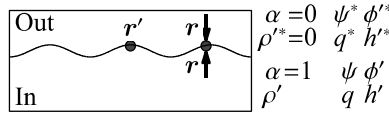


Fig. 2: 間接境界要素法における内部問題と外部問題.

次に Fig. 2 のように, 内部問題と外部問題として, $\mathbf{r}$ を領域内部または領域外部に置いた式を立てた後, $\mathbf{r}$ を領域境界まで近づける (間接境界要素法) [14, 15].

$$\begin{cases} \phi = \oint_S dS' (q\phi' - \psi h') + \iiint_V dV' \psi \rho', \\ 0 = \oint_S dS' (q^* \phi'^* - \psi^* h'^*), \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \phi_I = \oint_S dS' (q\phi'_I - \psi h'_I) + \iiint_V dV' \psi \rho'_I, \\ 0 = \oint_S dS' (q^* \phi'^*_I - \psi^* h'^*_I). \end{cases} \quad (14)$$

ここでは以下のように、外部問題に関する量を上つき添え字*で表した。

$$\begin{aligned} q^* &\equiv \mathbf{t}'_Z \cdot \nabla' \psi^*, & h'^*_I &\equiv \mathbf{t}'_Z \cdot \nabla' \phi'^*_I, & \Delta' \phi'^*_I &= 0, \\ h'^*_I &\equiv \mathbf{t}'_Z \cdot \nabla' (\mathbf{t}'_I \cdot \nabla \phi)^*, & \Delta' (\mathbf{t}'_I \cdot \nabla \phi)^* &= 0. \end{aligned}$$

境界上でポテンシャルは連続なので、 $\psi^* = \psi$, $\phi'^*_I = \phi'_I$ 。また、内部領域・外部領域に対する法線単位ベクトルは互いに逆向きで $\mathbf{t}'^*_Z = -\mathbf{t}'_Z$ なので、 $q + q^* = 0$, $h'_I = h'^*_I$ 。さらに、 $\sigma' \equiv h' + h'^*$, $\sigma'_I \equiv \phi'_I + \phi'^*_I$ (境界上に置かれた単極ソースの未知な密度分布, $I=Z$ の場合は $\phi'_Z = h'$, $\phi'^*_Z = h'^*$ より $\sigma'_Z = \sigma'$) を定義すれば, (13), (14) それぞれの内部問題・外部問題の式の和または差から, 本方法の基礎となる次の式が導かれる。

$$\phi(\mathbf{r}) = - \oint_S dS' \psi \sigma' + \iiint_V dV' \psi \rho', \quad (15)$$

$$\phi_I(\mathbf{r}) = \oint_S dS' q \sigma'_I + \iiint_V dV' \psi \rho'_I = \frac{\sigma_I}{2} + \iint_{S-S_\varepsilon} dS' q \sigma'_I + \iiint_V dV' \psi \rho'_I. \quad (16)$$

(16)の第3辺は、観測点 $\mathbf{r}$ で特異になる面積分を中心が $\mathbf{r}$ で微小半径 ε の境界外側の半球面 S_ε を用いて $S = S_\varepsilon + (S - S_\varepsilon)$ のように分け、特に前者を以下のように積分している (Fig. 3)。

$$\iint_{S_\varepsilon} dS' q \sigma'_I = \iint_{S_\varepsilon} dS' (\mathbf{t}'_Z \cdot \nabla' \psi) \sigma'_I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi R^2 \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{\mathbf{R}}{4\pi R^3} \sigma'_I = \frac{\sigma_I}{2}. \quad (17)$$

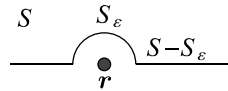


Fig. 3: 観測点 $\mathbf{r}$ で特異になる面積分の微小半径半球面による処理。

この方法では、新たな未知量 σ' , σ'_I を求める過程を経ることになるが、境界上の磁気ポテンシャル ϕ と法線磁束密度 $h = \phi_Z$ を互いに分離して求めることができる。

4.2 複合領域の場合

(15), (16)を Fig. 1 のような複合領域へ適用するには, まず, 流体領域 ($J=1$) と真空領域 ($J=2$) ごとに,

$$\phi_J, \quad \phi_{IJ} \equiv \mathbf{t}_{IJ} \cdot \nabla \phi_J, \quad \psi_J, \quad q_J = \mathbf{t}'_{ZJ} \cdot \nabla' \psi_J, \quad \hat{\sigma}_J, \quad \hat{\sigma}_{IJ}, \quad S_J$$

を定義する. 次に, $\nabla'(\mu_J \nabla' \psi_J) = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ に基づいて, $\psi \equiv \mu_J \psi_J$, $q \equiv \mu_J q_J$ を定義し, さらに $\sigma'_J \equiv \hat{\sigma}'_J / \mu_J$, $\sigma'_{IJ} \equiv \hat{\sigma}'_{IJ} / \mu_J$ と置き換えれば, (15), (16) は次のように拡張される.

$$\phi_J = - \oint_{S_J} dS' \psi_J \hat{\sigma}'_J = - \oint_{S_J} dS' \psi \sigma'_J, \quad (18)$$

$$\phi_{IJ} = \oint_{S_J} dS' q_J \hat{\sigma}'_{IJ} = \oint_{S_J} dS' q \sigma'_{IJ}. \quad (19)$$

ただしここでは, ϕ_J, ϕ_{IJ} は Poisson 方程式の代わりに Laplace 方程式にしたがうとして, $\rho' = 0, \rho'_I = 0$ と置いた.

Fig. 1 のような 2 層領域の面積分では, 両領域に共通な界面 F のほかに, 真空領域では上方境界 T , 流体領域では下方境界 B からの寄与がある. (18), (19) で界面積分を

$$\begin{aligned} \phi_J &= - \oint_{S_J} dS' \psi \sigma'_J = - \left(\iint_F + \iint_{S_J - F} \right) dS' \psi \sigma'_J, \\ \phi_{IJ} &= \oint_{S_J} dS' q \sigma'_{IJ} = \frac{\sigma_{IJ}}{2} + \left(\iint_F + \iint_{S_J - S_2 - F} \right) dS' q \sigma'_{IJ} \end{aligned} \quad (20)$$

と分離し, 上方境界・下方境界からの寄与を次のように置き換える.

$$\begin{cases} \mathcal{T} \equiv - \iint_{S_2 - F} dS' \psi \sigma'_2, & \begin{cases} \mathcal{T}_I \equiv \iint_{S_2 - F} dS' q \sigma'_{I2}, \\ \mathcal{B} \equiv - \iint_{S_1 - F} dS' \psi \sigma'_1, & \begin{cases} \mathcal{B}_I \equiv \iint_{S_1 - F} dS' q \sigma'_{I1}. \end{cases} \end{cases} \end{cases} \quad (21)$$

界面上では, 向きが領域によらない $\mathbf{t}'_I, q_F \equiv \mathbf{t}'_Z \cdot \nabla' \psi$, $b_{IJ} / \mu_J \equiv \mathbf{t}_I \cdot \nabla \phi_J$ を用いて,

$$\mathbf{t}'_{IJ} = \mp \mathbf{t}'_I, \quad q = \mu_J \mathbf{t}'_{ZJ} \cdot \nabla' \psi_J = \mp q_F, \quad \phi_{IJ} \equiv \mathbf{t}_{IJ} \cdot \nabla \phi_J = \mp b_{IJ} / \mu_J$$

と表す. 以上により,

$$\begin{cases} \phi_2 = - \iint_F dS' \psi \sigma'_2 + \mathcal{T}, \\ \phi_1 = - \iint_F dS' \psi \sigma'_1 + \mathcal{B}, \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \phi_{I2} = \mathbf{t}_{I2} \cdot \nabla \phi_2 = -\frac{b_{I2}}{\mu_2} = \frac{\sigma_{I2}}{2} - \iint_F dS' q_F \sigma'_{I2} + \mathcal{T}_I, \\ \phi_{I1} = \mathbf{t}_{I1} \cdot \nabla \phi_1 = \frac{b_{I1}}{\mu_1} = \frac{\sigma_{I1}}{2} + \iint_F dS' q_F \sigma'_{I1} + \mathcal{B}_I. \end{cases} \quad (23)$$

上式は、汎用磁場解析で3次元界面磁場方程式を導く際の磁気ポテンシャル方程式(6)と勾配方程式(7)に相当する。

(22), (23)を用いると、接線界面条件・法線界面条件は次のように表される。

$$0 = \phi_1 - \phi_2 = -\iint_F dS' \psi (\sigma'_1 - \sigma'_2) + \mathcal{B} - \mathcal{T}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} 0 &= b_{Z1} - b_{Z2} \\ &= \frac{\mu_1 \sigma_{Z1} + \mu_2 \sigma_{Z2}}{2} + \iint_F dS' q_F (\mu_1 \sigma'_{Z1} - \mu_2 \sigma'_{Z2}) + \mu_1 \mathcal{B}_Z + \mu_2 \mathcal{T}_Z. \end{aligned} \quad (25)$$

5 数値解析

本節では、Fig. 1のような複合領域について、数値解析により境界上の磁場を求める手順を述べる。

5.1 離散化

(18), (19)の面積分は、境界領域 S_J を N_J 個の微小面積素に分割し、それらの和で置き換える。ここで、 j 番目の面積素 S_{Jj} 内で σ'_j は一定とする。 $\mathbf{r}_i$ を観測点の座標、 $\mathbf{r}'_j$ を面積素中央の座標、 $\sigma_{Jj} = \sigma_J(\mathbf{r}'_j)$ とすれば、(18), (19)は

$$\begin{aligned} \phi_{Ji} \equiv \phi_J(\mathbf{r}_i) &= \left(-\oint_{S_J} dS' \psi \sigma'_J \right)_i = \sum_{j=1}^{N_J} G_{Jij} \sigma_{Jj}, \\ G_{Jij} &= \int_{S_{Jj}} \frac{dS'}{4\pi R} \quad (R = \mathbf{r}'_j - \mathbf{r}_i, \quad R = |\mathbf{R}|), \\ \mu_J \phi_{ZJi} \equiv \mu_J \phi_{ZJ}(\mathbf{r}_i) &= \mu_J \left(\oint_{S_J} dS' q \sigma'_J \right)_i = \sum_{j=1}^{N_J} H_{Jij} \sigma_{Jj}, \end{aligned} \quad (26)$$

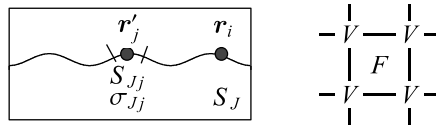


Fig. 4: 間接境界要素法における積分方程式の離散化。

ソース点 $\mathbf{r}'_j$ は面要素 F 上、観測点 $\mathbf{r}_i$ は面要素 F または点要素 V 上。

$$H_{Jij} = \mu_J \left(\int_{S_{Jj}} dS' q \right)_i = \mu_J \left(\frac{\delta_{ij}}{2} + \int_{S_{Jj}-S_\varepsilon} \frac{dS' t'_{ZJ} \cdot \mathbf{R}}{4\pi R^3} \right) \quad (27)$$

のように離散化され、さらに行列形式で次のように表される.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}_J = \mathbf{G}_J \boldsymbol{\sigma}_J, & \boldsymbol{\phi}_J = (\phi_{Ji}), & \mathbf{G}_J = (G_{Jij}), & \boldsymbol{\sigma}_J = (\sigma_{Jj}), \\ \mathbf{b}_J = \mathbf{H}_J \boldsymbol{\sigma}_J, & \mathbf{b}_J = (\mu_J \phi_{ZJi}), & \mathbf{H}_J = (H_{Jij}), & (1 \leq i, j \leq N_J). \end{cases} \quad (28)$$

$\mathbf{G}_J, \mathbf{H}_J$ の対角要素では、面積素内に被積分関数の特異点があるため、正確を期すには数値積分が望ましい. しかしここでは、 G_{Jii} については、面積素を取り敢えず半径 R の円で置き換え、次のように評価する.

$$G_{Jii} = \int_{S_{Ji}} \frac{dS'}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi} \int_0^R R' dR' \int_0^{2\pi} d\theta' \frac{1}{R'} = \frac{R}{2}. \quad (29)$$

また、 H_{Jii} については、流体領域・真空領域それぞれの (11) で $\phi=1, h=0, \rho=0$ とすれば、 H_{Jij} に関する総和則が導かれることを利用して、次のように求める.

$$\begin{aligned} \alpha \phi(\mathbf{r}) &= \oint_S dS' (q\phi' - \psi h') + \iiint_V dV' \psi \rho', \\ \alpha &= \oint_{S_J} dS' q = \sum_{j=1}^{N_J} \left(\int_{S_{Jj}} dS' q \right)_i = \sum_{j=1}^{N_J} \frac{H_{Jij}}{\mu_J}, \quad H_{Jii} = \alpha \mu_J - \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N_J} H_{Jij}. \end{aligned} \quad (30)$$

5.2 境界条件・界面条件の適用

流体 ($J=1$)・真空 ($J=2$) 各領域の境界は、課せられる境界条件・界面条件に応じて次のいずれかに分類される (上つきバーは既知の値を示す).

- (1) $\boldsymbol{\phi}_J^{(1)} = \bar{\boldsymbol{\phi}}_J^{(1)}$ を既知として、 $\mathbf{b}_J^{(1)}$ を求める (Dirichlet 条件).
- (2) $\mathbf{b}_J^{(2)} = \bar{\mathbf{b}}_J^{(2)}$ を既知として、 $\boldsymbol{\phi}_J^{(2)}$ を求める (Neumann 条件).
- (3) 界面条件 $\mathbf{0} = \boldsymbol{\phi}_1^{(3)} - \boldsymbol{\phi}_2^{(3)}, \mathbf{0} = \mathbf{b}_1^{(3)} + \mathbf{b}_2^{(3)}$ を満たすように、 $\boldsymbol{\phi}_J^{(3)}, \mathbf{b}_J^{(3)}$ を求める.

(28) より、各境界上の $\boldsymbol{\phi}_J^{(1)(2)(3)}, \mathbf{b}_J^{(1)(2)(3)}$ は、直接には同じ領域に属する自身上や他の境界上の量とだけ $\boldsymbol{\sigma}_J^{(1)(2)(3)}$ を通して関係し、別な領域に属する境界上の量とは界面条件を通じてのみ関係する. このことは、上述の境界条件・界面条件に応じた分類も考慮しながら、次のように表される.

$$\begin{cases} \boldsymbol{\phi}_J^{(1)(2)(3)} = \mathbf{G}_J^{(11)(21)(31)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(1)} + \mathbf{G}_J^{(12)(22)(32)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(2)} + \mathbf{G}_J^{(13)(23)(33)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(3)}, \\ \mathbf{b}_J^{(1)(2)(3)} = \mathbf{H}_J^{(11)(21)(31)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(1)} + \mathbf{H}_J^{(12)(22)(32)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(2)} + \mathbf{H}_J^{(13)(23)(33)} \boldsymbol{\sigma}_J^{(3)}. \end{cases} \quad (31)$$

5.3 解析の手順

前節で述べたことから、数値解析の手順は、次のようにまとめられる。

(A) (32), (33) を同時に解いて, $\sigma_J^{(1)}, \sigma_J^{(2)}, \sigma_J^{(3)}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} \bar{\phi}_J^{(1)} \\ \bar{b}_J^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_J^{(11)} & G_J^{(12)} & G_J^{(13)} \\ H_J^{(21)} & H_J^{(22)} & H_J^{(23)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_J^{(1)} \\ \sigma_J^{(2)} \\ \sigma_J^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (J = 1, 2), \quad (32)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1^{(31)} & G_1^{(32)} & G_1^{(33)} & -G_2^{(31)} & -G_2^{(32)} & -G_2^{(33)} \\ H_1^{(31)} & H_1^{(32)} & H_1^{(33)} & H_2^{(31)} & H_2^{(32)} & H_2^{(33)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^{(1)} \\ \sigma_1^{(2)} \\ \sigma_1^{(3)} \\ \sigma_2^{(1)} \\ \sigma_2^{(2)} \\ \sigma_2^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

(B) 求められた $\sigma_J^{(1)}, \sigma_J^{(2)}, \sigma_J^{(3)}$ を (34), (35) に用いて, 残る未知の $\phi_J^{(2)}, b_J^{(1)}, \phi_J^{(3)}, b_J^{(3)}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} \phi_J^{(2)} \\ b_J^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_J^{(21)} & G_J^{(22)} & G_J^{(23)} \\ H_J^{(11)} & H_J^{(12)} & H_J^{(13)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_J^{(1)} \\ \sigma_J^{(2)} \\ \sigma_J^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$\begin{pmatrix} \phi_J^{(3)} \\ b_J^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_J^{(31)} & G_J^{(32)} & G_J^{(33)} \\ H_J^{(31)} & H_J^{(32)} & H_J^{(33)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_J^{(1)} \\ \sigma_J^{(2)} \\ \sigma_J^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

6 一様鉛直磁場における境界磁場の数値解析

同じ厚さで水平方向に広がった流体領域・真空領域が界面で接していて、上方境界と下方境界に同じ大きさの一様鉛直磁場を印加するとき、同様の磁場が界面上にも現れることが予想される。この様子を、各境界に Fig. 5 に示すような境界条件・界面条件を与え、前節に述べた方法で求めた磁気ポテンシャル ϕ_J と法線磁束密度 $b_{zJ} = \mu_J \phi_{zJ}$ から得られた磁場を各境界上に示したのが Fig. 6 と Fig. 7 である。ただしいずれも、流体領域のみを示している。

境界を分割するにあたり、Fig. 6 では極座標格子を用いているため、中央部の格子が密になり過ぎ界面磁場は一様にならない。そこで、直線座標格子に替えて計算し直したのが Fig. 7 である。

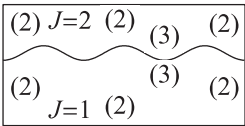


Fig. 5: 境界磁場の数値解析のための境界条件と界面条件.

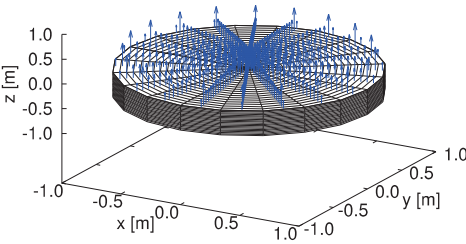


Fig. 6: 極座標格子による境界磁場の計算. 流体領域のみを示す.

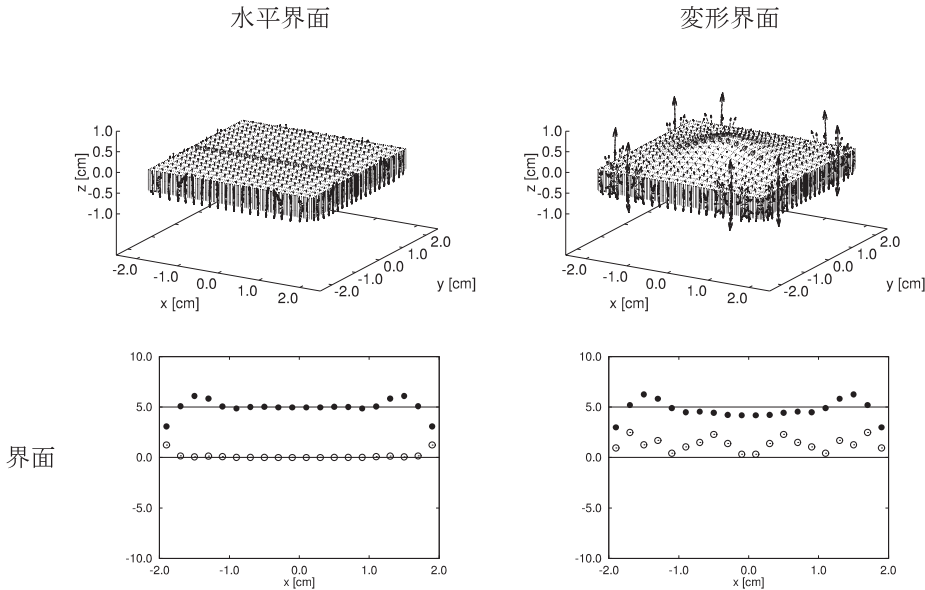


Fig. 7: 直線座標格子による境界磁場の計算. 左: 水平界面の場合, 右: 変形界面の場合. 下段: x 軸に平行な $y = 0 \text{ cm}$ 付近の断面内における, 法線磁場 (●) と接線磁場の大きさ (○) の変化. 実線: 既知の一様磁場の大きさ.

Fig. 6では法線磁場 $(b_{zJ}/\mu_J)t_z$ のみを示しているが、Fig. 7では更に、Neumann条件・界面条件を与えた境界上で、手順(B)で求めた磁気ポテンシャル $\phi_J^{(2)(3)}$ の勾配から接線磁場 $\nabla\phi_J^{(2)(3)} \times t_z$ を求め、これらの合成磁場を示している。このとき、面要素上の接線磁場が精度よく求められるように、 $\phi_J^{(2)(3)}$ は面要素上ではなく点要素上で求める (Fig. 4右参照)。これは、手順(A)で方程式(32)を立てたとき、既知の $\phi_J^{(1)}$ を面要素上としたのとは対照的である。

Fig. 7の下段には、 x 軸に平行な $y = 0\text{ cm}$ 付近の断面内で、界面における法線磁場と接線磁場の大きさの変化を●と○で示した。界面形状が平面(左)と変形(右)いずれも、中央付近には一様磁場とみなせる領域があるが、縁に近づくとも側面の影響のため、磁場は変動している。この変動は、水平界面では法線磁場・接線磁場とも縁付近に限られる。一方変形界面では、法線磁場は水平界面よりやや下がりこそすれ変動はそれほど大きくないが、接線磁場では中央付近にまで及んでいる。

これらの数値解析では、Fig. 5に示すとおり、界面以外の全ての境界でNeumann条件(2)、すなわち上面・下面では法線磁束密度 b_{zJ} を既知の一様磁場の大きさで与え、側面では磁束が漏れないように $b_{zJ}=0$ としている。これにより、流体・真空それぞれの領域ごとに、磁束保存則が満たされている。この代わりに側面で、一様鉛直磁場を与えるような磁気ポテンシャル ϕ_J をDirichlet条件(1)として与えることも考えられる。しかしこの場合は、計算された b_{zJ} による磁束の漏洩が大きく、各領域ごとの磁束保存則は満たされない(両領域を合わせれば満たされる)。また、界面磁場の変動も大きくなる。

界面磁場の変動は、側面の影響という物理的原因がまず考えられるが、その前に、格子分割のような数値的原因を切り分けておく必要がある。これは、実験で良質な磁場を発生できるソレノイドを用意することにも似ている。

7 まとめと今後の課題

磁性流体の界面現象を解析する際に重要になる磁場解析について、解析方法の改良や結果の比較検討が可能となるよう、これまでの汎用磁場解析に加えて、間接境界要素法に基づく方法を開発し、一様鉛直磁場における境界

磁場の数値解析例を示した。

今後、磁場法則や「界面応力と界面エネルギー密度の関係」により任意の界面形状においても信頼できる界面磁場や界面応力が求められることを確認した後、界面形状遷移などの動的解析を実施していく。

参考文献

- [1] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2010 拡張要旨集 (2010) (CD-ROM).
- [2] Mizuta, Y., *Magnetohydrodynamics*, **44-2** (2008), pp.155–165.
- [3] Mizuta, Y., *J. Magn. Magn. Mater.*, **323-10** (2011), pp.1354–1359.
- [4] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の多様性と普遍性」, **1761** (2011), pp.163–176.
- [5] Mizuta, Y., *Magnetohydrodynamics*, **49-2-4** (2013), pp.191–195.
- [6] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2013 講演論文集 (2013) (CD-ROM).
- [7] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2014 講演論文集 (2014) (CD-ROM).
- [8] Mizuta, Y., *J. Magn. Magn. Mater.*, **431** (2017), pp.209–213.
- [9] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理に関する最近の進展」, **2034** (2017), pp.139–149.
- [10] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理とその応用」, **2076** (2018), pp.20–31.
- [11] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2017 講演論文集 (2017) (CD-ROM).
- [12] 水田 洋, 磁性流体連合講演会講演論文集, **30** (2017), pp.21–25.
- [13] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2009 拡張要旨集 (2009) (CD-ROM).
- [14] Brebbia, C.A. and Butterfield, R., *Appl. Math. Modelling*, **2** (1978), pp.132–134.
- [15] ウォーカー, C.A. ブレビア, S., 境界要素法の基礎と応用 (神谷紀生他訳), 培風館, 東京 (1981), 第 2 章.
- [16] Rosensweig, R.E., *Ferrohydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (1985), Chap.4, Chap.5.
- [17] 水田 洋, 京都大学数理解析研究所講究録「非線形波動現象の数理と応用」, **1483** (2006), pp.175–187.
- [18] 水田 洋, 日本流体力学会年会 2006 講演要旨集 (2006) (CD-ROM).